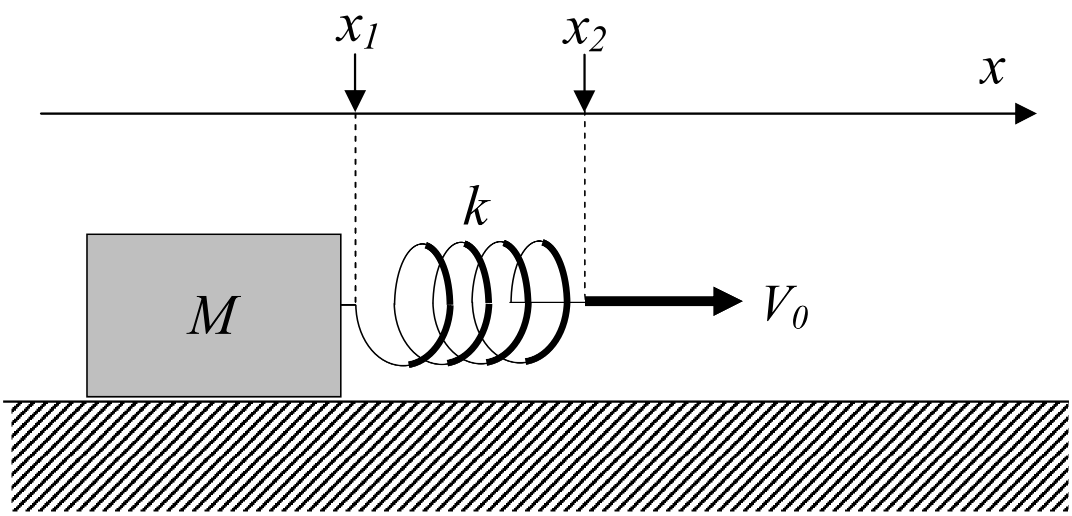
Licence STEP L2 Module Physique pour les géosciences S4

Mécanique des solides et des planètes

Problèmes à remettre avant le 30 mars 2007

Problème numéro 1. Modèle de glissement-adhérence à un patin.

Considérons un ressort de raideur k qui tire avec une vitesse constante V_0 un patin de masse M sur une surface plane. Soit L la longueur du ressort au repos, x_1 la coordonnée le long d'une axe x de l'extrémité du ressort attachée au patin, et x_2 la coordonnée de l'autre extrémité du ressort. On supposera que V_0 est suffisamment faible pour que, à cette vitesse, le patin soit en friction statique.



1.1) A l'instant t=0, le patin est immobile et on a x_1=0 et x_2=L. Que se passe-t-il quand, à t=0, on commence à tirer le ressort? Jusqu'à quel moment t_0 cette situation perdure? Quelle est l'expression de x_1 et x_2 quand $t=t_0$? On notera f_S le coefficient de friction statique entre le patin et le plan.

1.2) Posons :

$$y = x_2 - x_1 - L$$

Montrer que, pour t supérieur ou égal à t_0, on a :

$$M\ddot{y} = -ky + f_D Mg$$

où f_D est le coefficient de fraction dynamique entre le patin et le plan. Expliquer le contenu physique de cette équation : quelle est la contribution qui tend à augmenter l'allongement y du ressort et quelle est l'effet qui tend à le diminuer. On fera l'hypothèse habituelle que f_D<f_S. Préciser les valeurs de y et $\dot{y}$ à $t=t_0$.

1.3) Montrer qu'une solution de l'équation différentielle ci-dessus vérifiant les conditions à $t=t_0$ s'écrit :

$$y = y_1 + y_2 \cos\left(\Omega\left(t - t_0\right)\right)$$

Donner les expressions de y_1, y_2 et Ω.

Vérifier que cette équation prédit que l'allongement d'abord diminue doucement puis s'accélère puis se stabilise, ce qui veut dire que la vitesse de variation de y devient de nouveau nulle. Cela se produit à un instant t_1 dont on donnera l'expression. Que vaut y à cet instant? Quelle la variation totale de y pendant tout ce mouvement entre t_0 et t_1?

1.4) A cet instant t_1, il y a un changement qualitatif de comportement. En effet, la vitesse du patin devient alors égale à V_0 que nous avons supposée faible. On supposera alors que le patin, subissant brusquement une fraction statique, s'arrête. On est donc revenu dans les conditions qui prévalaient à t=0. Faire un graphe de la variation de y en fonction de t à partir de t=0 en montrant trois cycles et en précisant les instants caractéristiques et les valeurs correspondantes de y.

1.5) Quelle analogie en sciences de la Terre vous inspire ce système physique? Commenter.

<u>Problème numéro 2. Moment d'inertie et structure interne d'un objet céleste.</u>

Soit un objet céleste à symétrie sphérique de masse totale M et de rayon R. Soit I le moment d'inertie de cet objet par rapport à un axe passant par son centre d'inertie. On appelle <u>moment d'inertie réduit</u> la quantité I/MR^2.

2.1) Quel est le moment d'inertie réduit d'une sphère homogène? D'une sphère creuse de rayon interne R_I? On utilisera ici les résultats démontrés en exercice. Quand R_I est petit devant R, donner une formule approchée du moment d'inertie réduit.

2.2) Considérons maintenant un objet à symétrie sphérique dont la masse volumique ρ dépend du rayon $r<R$ suivant la loi $\rho(r)=a/r^2$ où a est une constante. Quelle est alors dans ce cas la valeur du moment d'inertie réduit? Comment pouvez-vous caractériser qualitativement cette situation?

2.3) En pratique, il est assez difficile de déterminer précisément la loi de variation de la masse volumique des objets célestes en fonction du rayon. On préfère simplifier le problème en imaginant que l'objet est constitué d'une sphère intérieure (le noyau) de rayon R_I de masse volumique ρ_N et que le milieu entre R_I et R (le manteau) possède une masse volumique ρ_E différente. Montrer que dans ce modèle à deux couches, le moment d'inertie réduite s'écrit :

$$\frac{I}{MR^2} = \frac{8\pi\rho_E R^3}{15M}\left[1+\left(\frac{\rho_N}{\rho_E}-1\right)\left(\frac{R_I}{R}\right)^5\right]$$

2.4) Pour Ganymède, un des satellites de Jupiter, les observations indiquent que le moment d'inertie réduit vaut 0.3105±0.0028 pour une masse de 1.482 10^{23} kg et un rayon de 2634 km. Que pouvez-vous immédiatement conclure sur la structure interne de cet objet? En prenant ρ_N =6000 kg m^{-3} (mélange contenant surtout du fer) et ρ_E=1380 kg m^{-3} (mélange de silicates et de glace), déduire le rayon du noyau de Ganymède. Ces résultats indiquent-ils un noyau relativement grand? En comparant à la taille relative du noyau de la Terre, que pensez-vous de la possibilité d'un champ magnétique sur Ganymède?

<u>Problème numéro 3. Roulement sans glissement sur un plan incliné: Synthèse.</u>

Dans le cours et dans les exercices, nous avons considéré le roulement sans glissement de divers objets sur un plan incliné : cylindre homogène, sphère, coquille creuse, etc… Reprenons ces différents problèmes sous un angle plus général.

3.1) Considérer de façon générale le roulement sans glissement d'un objet de masse M tel que la distance R entre le centre d'inertie et le point de contact avec le plan demeure constante. Soit I_G le moment d'inertie de cet objet par rapport à un axe horizontal parallèle au plan de glissement et passant par le centre d'inertie. Donner l'expression de l'accélération du centre d'inertie et la condition qui doit être vérifiée pour que le roulement soit sans glissement.

3.2) Comparer l'accélération obtenue pour différents objets et faire un tableau comparatif. Choisir au moins cinq objets différents. Si on lâche ces objets du même point, quel est l'objet qui arrive en bas le plus vite? Quand on augmente progressivement l'angle du plan incliné avec l'horizontale, quel est l'objet qui glisse le premier?