Chapitre 2
Eléments de cinématique du solide

Dans ce chapitre, nous allons introduire quelques notions pour décrire le mouvement de points et d'objets, une discipline qu'on appelle la cinématique, sans pour le moment essayer de faire le lien entre ce mouvement et ses causes, qui est l'objet de la dynamique, et de chapitres ultérieurs ! Je vais commencer par faire quelques rappels sur le mouvement d'un point matériel, puis nous aborderons le mouvement de systèmes de points et de solides.

2.1 Rappels sur le mouvement d'un point matériel

Considérons un point M de masse *m* dont le mouvement est décrit dans un référentiel orthonormé Oxyz fixe quelconque équipé d'une horloge. Soient $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ les trois vecteurs directeurs unitaires définissant notre repère (Figure 2.1).

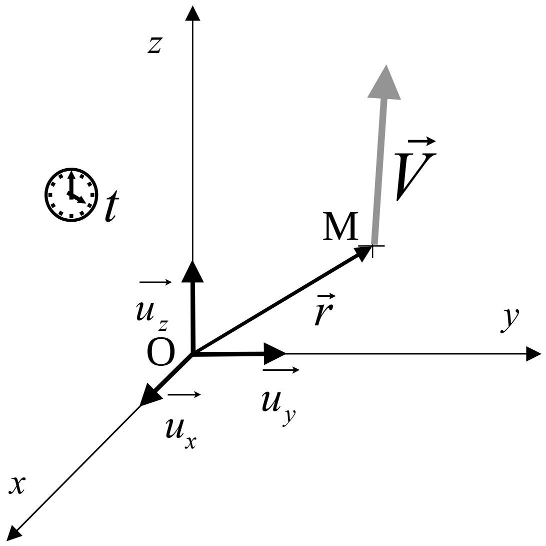


Figure 2.1. Mouvement d'un point par rapport à un référentiel.

Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position de ce point à un instant *t*. Sa vitesse est :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \,. \tag{2.1}$$

Sa quantité de mouvement, comme rappelé dans le chapitre précédent, est :

$$\vec{p} = m\vec{V} \tag{2.2}$$

et l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_K = \frac{1}{2}m\vec{V}^2 = \frac{1}{2}m\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right) = \frac{\vec{p}^2}{2m} \,. \tag{2.3}$$

L'accélération est définie par :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}} \,. \tag{2.4}$$

On peut aussi exprimer toutes ces quantités en fonction des coordonnées *x(t)*, *y(t)*, et *z(t)* du point, qui sont des fonctions du temps :

$$\vec{r} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z} \,, \tag{2.5}$$

$$\vec{V} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z} \;, \tag{2.6}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z} \;. \tag{2.7}$$

Nous allons voir qu'il est souvent très utile de ramener aussi le mouvement par rapport à des points particuliers. Pour cela, on introduit la notion de moment cinétique.

2.1.1 Moment cinétique d'un point

Soit P un autre point quelconque de l'espace, fixe ou mobile. Le moment cinétique du point M de masse m par rapport au point P, noté $\vec{\sigma}_P$, est défini (Figure 2.2) par :

$$\vec{\sigma}_P = \overrightarrow{PM} \times m\vec{V} = \overrightarrow{PM} \times \vec{p} \;. \tag{2.8}$$

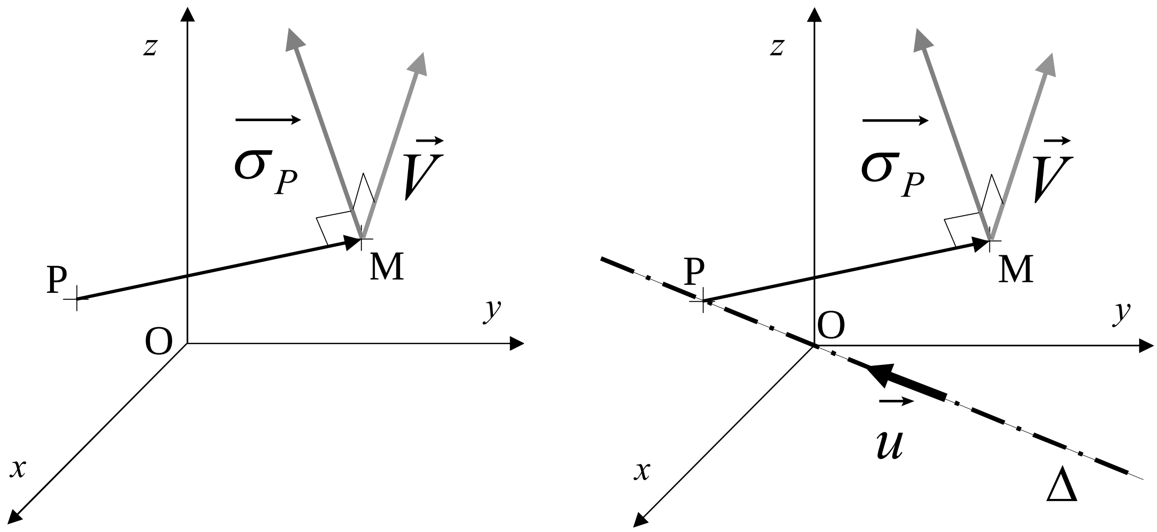


Figure 2.2. Moment cinétique d'un mobile M par rapport à un point P (à gauche) et par rapport à un axe Δ (à droite).

Considérons une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}$. On utilisera plutôt le terme d'axe, en pensant évidemment à des rotations autour de cette droite. Soit P un point quelconque de cet axe. On appelle moment cinétique par rapport à l'axe Δ, noté σ_Δ, le produit scalaire :

$$\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_P \cdot \vec{u} \;; \tag{2.9}$$

notons bien que si le moment cinétique par rapport à un point est un vecteur, le moment cinétique par rapport à un axe est une quantité scalaire.

Remarque 1 : Le moment cinétique par rapport à un axe, défini par (2.9), ne dépend pas du choix du point P. Vérifions-le en prenant un autre point P' de l'axe. Il existe ainsi un nombre réel α tel que $\overrightarrow{P'P} = \alpha\vec{u}$ et on a alors :

$$\sigma_\Delta' = \vec{\sigma}_{P'} \cdot \vec{u} = \left(\overrightarrow{P'M} \times \vec{p}\right)\cdot\vec{u} = \left(\left(\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PM}\right)\times \vec{p}\right)\cdot\vec{u} = \left(\overrightarrow{P'P}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{u} + \left(\overrightarrow{PM}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{u} \tag{2.10}$$

soit :

$$\sigma_\Delta' = \alpha\left(\vec{u}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{u} + \sigma_\Delta \tag{2.11}$$

mais $\left(\vec{u}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{u} = 0$, effectivement le vecteur $\vec{u}\times\vec{p}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$, donc :

$$\sigma_\Delta' = \sigma_\Delta \;. \tag{2.12}$$

Remarque 2 : Décomposons la vitesse $\vec{V}$ en une composante perpendiculaire à l'axe $\vec{V}_\perp$ et une composante parallèle à l'axe $\vec{V}_\parallel$ (Figure 2.3) :

$$\vec{V} = \vec{V}_\perp + \vec{V}_\parallel \;. \tag{2.13}$$

Si d est la distance du point M à l'axe, H le pied de la perpendiculaire à Δ passant par M, $V_\perp$ le module de la vitesse du point M perpendiculaire à l'axe (Figure 2.3), et θ l'angle orienté entre le vecteur $\overrightarrow{HM}$ et le vecteur $\vec{V}_\perp$, alors le moment cinétique de M par rapport à l'axe s'écrit :

$$\sigma_\Delta = mdV_\perp \sin\theta \;. \qquad (2.14)$$

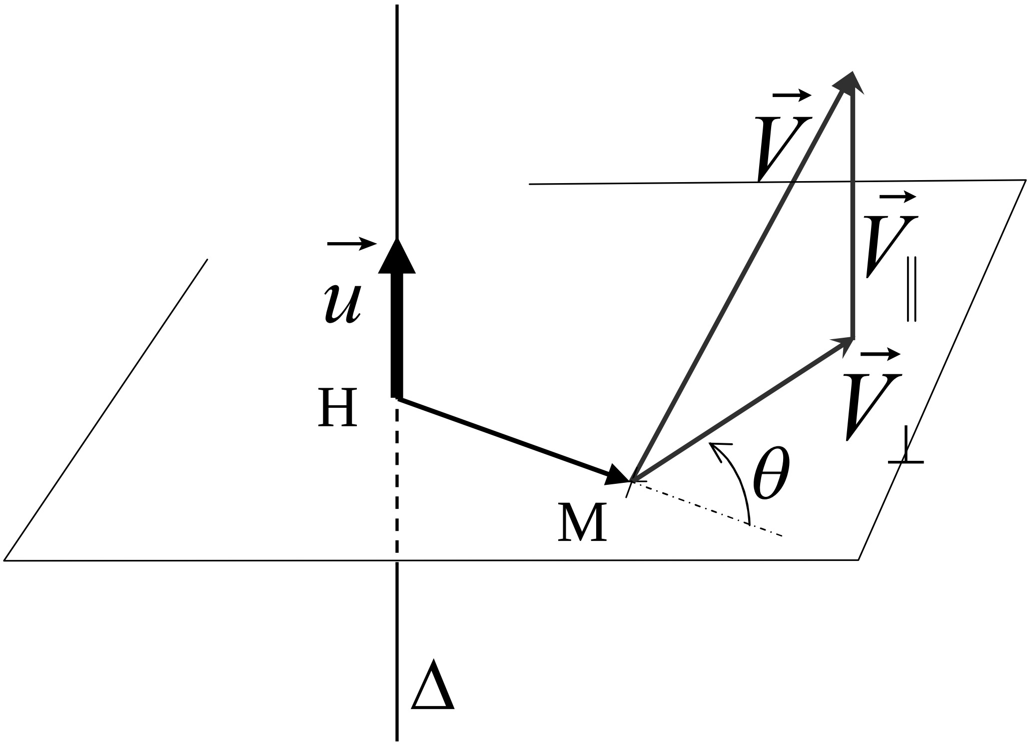


Figure 2.3. Analyse de la signification explicite du moment cinétique par rapport à un axe.

Montrons-le ! Puisque σ_Δ ne dépend pas du choix du point P, on est libre de choisir un point particulier comme H. On a alors :

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta &= \vec{\sigma}_H \cdot \vec{u} = \left(\overrightarrow{HM} \times m\vec{V}\right)\cdot \vec{u} = m\left(\overrightarrow{HM} \times \left(\vec{V}_\perp + \vec{V}_\parallel\right)\right)\cdot \vec{u} \\ &= m\left(\overrightarrow{HM} \times \vec{V}_\perp\right)\cdot \vec{u} + m\left(\overrightarrow{HM} \times \vec{V}_\parallel\right)\cdot \vec{u}\end{aligned} \;. \qquad (2.15)$$

Le deuxième terme est nul car $\overrightarrow{HM} \times \vec{V}_\parallel$ est perpendiculaire à l'axe. Il vient donc :

$$\sigma_\Delta = m\left(\overrightarrow{HM} \times \vec{V}_\perp\right)\cdot \vec{u} = mdV_\perp \sin\theta \;. \qquad (2.16)$$

Cette expression est utile car elle permet de visualiser physiquement la signification de la notion de moment cinétique par rapport à un axe. Nous allons d'ailleurs préciser cette interprétation physique plus loin.

2.1.2 Cas du mouvement dans un plan

C'est un cas particulier très important en pratique. Considérons donc le mouvement de notre point M dans le repère Oxy (Figure 2.4). Entre t et $t+dt$, le mobile se déplace de M en M' et on a MM'=Vdt.

Calculons l'aire dA balayée par le rayon vecteur OM entre t et dt. C'est $\dot{A}dt$ par définition de la vitesse aréolaire $\dot{A}$ (voir relation 1.4). Mais on peut aussi calculer directement cette aire à partir de la Figure 2.4.

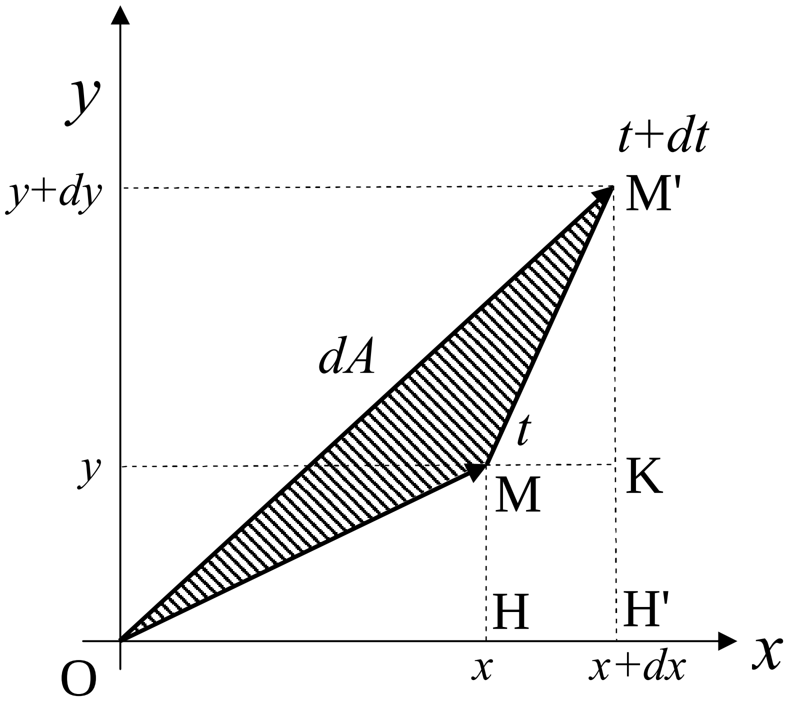


Figure 2.4. Mouvement dans un plan et vitesse aréolaire.

C'est en effet l'aire du triangle OMM' moins l'aire du triangle OH'M' moins l'aire du triangle MKM' et moins l'aire du rectangle HH'MK, soit :

$$\begin{aligned} dA &= \dot{A}dt = A(\Delta OMM') \\ &= A(\Delta OM'H') - A(\Delta OHM) - A(\Delta MKM') - A(\square HMK'H'), \\ &= \frac{1}{2}(x+dx)(y+dy) - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}dxdy - ydx = \frac{1}{2}xdy - \frac{1}{2}ydx \end{aligned} \qquad (2.17)$$

d'où on déduit une expression de la vitesse aréolaire :

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) . \qquad (2.18)$$

Notons que parfois, pour les mouvements dans un plan, on préfère utiliser des coordonnées polaires $r,\ \theta$ au lieu des coordonnées $x,\ y$ (voir encadré 2.1). En coordonnées polaires, l'expression de la vitesse aréolaire est :

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} . \qquad (2.19)$$

Il est facile de le vérifier à partir de (2.18) et des formules de l'encadré 2.1.

2.1.3 Cas du mouvement dans l'espace à trois dimensions

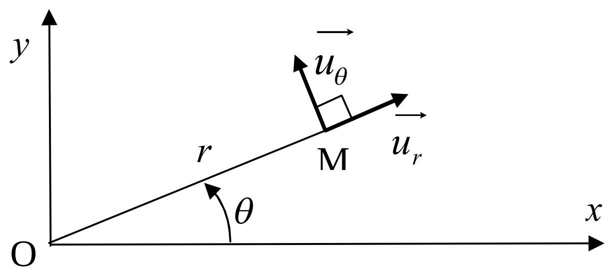
Revenons maintenant au cas général du mouvement d'un point dans l'espace à trois dimensions et exprimons l'énergie cinétique en fonction des coordonnées $x,\ y,\ z$ du point M. C'est tout simplement :

$$E_K = \frac{1}{2}m\vec{V}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) . \qquad (2.20)$$

Quant au moment cinétique par rapport à un point P de coordonnées x_P, y_P, z_P on peut l'écrire :

Encadré 2.1 : Repérage du mouvement dans un plan en coordonnées polaires.

Mouvement dans le plan :



Coordonnées du point M : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

On définit alors les vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ dépendant du temps t : $\vec{u}_r = \left|\begin{matrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{matrix}\right.$ $\quad \vec{u}_\theta = \left|\begin{matrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{matrix}\right.$

Vecteur position :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

On a :

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot\theta\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot\theta\vec{u}_r$$

d'où on déduit :

Vitesse :

$$\vec{V} = \dot r\vec{u}_r + r\dot\theta\vec{u}_\theta$$

Energie cinétique :

$$E_K = \frac{1}{2}m\left(\dot x^2 + \dot y^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right)$$

Accélération :

$$\vec{a} = \left(\ddot r - r\dot\theta^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta\right)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\sigma}_P = \overrightarrow{PM}\times m\vec{V} = m\left|\begin{matrix} x-x_P \\ y-y_P \\ z-z_P\end{matrix}\right. \times \left|\begin{matrix}\dot x \\ \dot y \\ \dot z\end{matrix}\right. = m\left|\begin{matrix}(y-y_P)\dot z-(z-z_P)\dot y \\ (z-z_P)\dot x-(x-x_P)\dot z \\ (x-x_P)\dot y-(y-y_P)\dot x\end{matrix}\right. . \qquad (2.21)$$

Dans de nombreux cas, plutôt que d'utiliser les coordonnées cartésiennes x, y, z, on préfère utiliser les coordonnées cylindriques et sphériques. Les expressions de la vitesse et de l'accélération dans ces systèmes de coordonnées sont rappelées dans l'encadré 2.2 (voir à la fin du chapitre), encadré que je vous engage à regarder en détail.

Regardons maintenant le moment cinétique par rapport à l'origine, dans un cas particulier intéressant, celui où le mouvement est dans le plan Oxy. On a alors :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM}\times m\vec{V} = m\left|\begin{matrix} x \\ y \\ 0\end{matrix}\right. \times \left|\begin{matrix}\dot x \\ \dot y \\ 0\end{matrix}\right. = m\left|\begin{matrix}0 \\ 0 \\ x\dot y - y\dot x\end{matrix}\right. . \qquad (2.22)$$

On constate, en regardant (2.22) et (2.18), que le moment cinétique est aligné avec l'axe vertical et que sa composante suivant cet axe vaut, à la masse près, deux fois la vitesse aréolaire :

$$\sigma_z = \overrightarrow{\sigma_O}\cdot\vec{u}_z = m\left(x\dot y - y\dot x\right) = 2m\dot A . \qquad (2.23)$$

Voici donc une interprétation physique très alléchante du moment cinétique par rapport à un axe! Il est proportionnel à la vitesse aréolaire dans le plan perpendiculaire à l'axe!

Généralisons maintenant ces concepts à un ensemble de points.

2.2 Description du mouvement d'un ensemble de points matériels

2.2.1 Centre d'inertie d'un système

Considérons un ensemble de points matériels M_i de masse m_i qu'on appellera système. La masse totale du système, notée M, sera évidemment :

$$M = \sum_i m_i \ . \qquad (2.24)$$

On peut alors définir le barycentre G du système de points. On a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i \ . \qquad (2.25)$$

On appelle aussi ce point centre de gravité ou plutôt, dans ce cours de mécanique, centre d'inertie. Souvenons-nous de la propriété suivante, qui résulte de (2.25) :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = 0 \ . \qquad (2.26)$$

Dans la plupart des problèmes de mécanique du solide, il faut commencer par trouver la position du centre d'inertie, voire le centre d'inertie de chaque partie mobile. Quelques exemples simples sont proposés en exercice. Nous verrons progressivement des cas plus compliqués.

2.2.2 Quantité de mouvement totale d'un système

La quantité de mouvement totale du système, notée $\vec{P}$, est définie par :

$$\vec{P} = \sum_i \overrightarrow{p_i} = \sum_i m_i \overrightarrow{V}_i \ , \qquad (2.27)$$

où $\overrightarrow{p_i}$ désigne la quantité de mouvement du point M_i et $\overrightarrow{V}_i = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}_i$ sa vitesse. On remarque que :

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}_i = M\vec{V}_G \ , \qquad (2.28)$$

où $\overrightarrow{V_G} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}$ désigne la vitesse du centre d'inertie. Autrement dit, la quantité de mouvement totale d'un système est égale à la quantité de mouvement du centre d'inertie affecté de la masse totale du système.

2.2.3 Moment cinétique total d'un système

De façon logique, le moment cinétique total d'un système par rapport à un point P est défini par :

$$\vec{\sigma}_P = \sum_i \vec{\sigma}_{iP} = \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times m_i \vec{V}_i \ . \qquad (2.29)$$

Quant au moment cinétique total d'un système par rapport à un axe Δ, il est défini comme précédemment par :

$$\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_P \cdot \vec{u} \ , \qquad (2.30)$$

où est P un point quelconque de Δ.

2.2.4 Energie cinétique totale d'un système

Sans surprise, l'énergie cinétique totale d'un système est la somme des énergies cinétiques de ses points :

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^{\,2} = \sum_i \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m_i} \ . \qquad (2.31)$$

Pour fixer les idées, nous allons maintenant regarder le cas d'un système rigide en rotation par rapport à un axe fixe.

2.3 Cas du système rigide en rotation autour d'un axe fixe

2.3.1 Notion de moment d'inertie par rapport à un axe

Considérons un système rigide en rotation par rapport à un axe fixe Δ (Figure 2.5) et soit ω la vitesse angulaire instantanée de rotation. Projetons chaque point M_i sur l'axe et appelons cette projection H_i. Alors, puisque le système est rigide, le module V_i de la vitesse $\vec{V}_i$ du point *i*, s'écrit :

$$V_i = \omega r_{i/\Delta}, \tag{2.32}$$

où $r_{i/\Delta}$ est la distance H_iM_i.

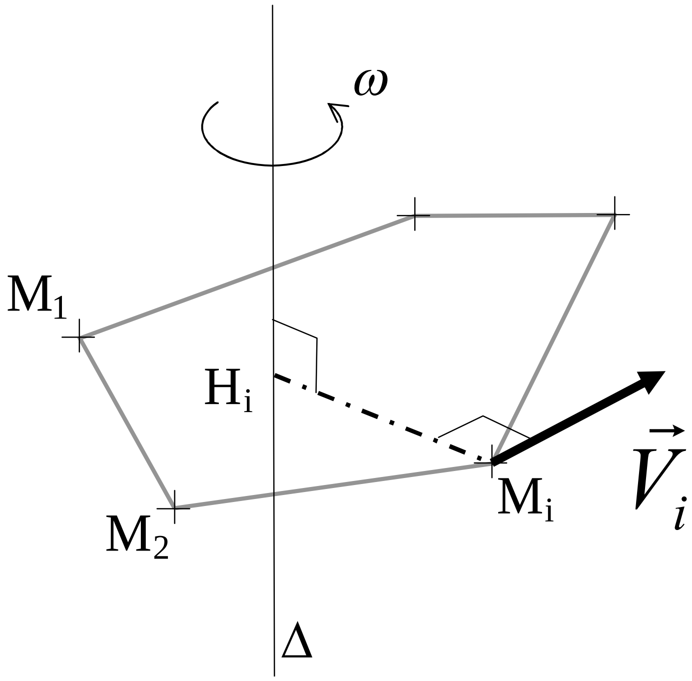


Figure 2.5. Rotation d'un système rigide autour d'un axe fixe.

L'énergie cinétique du système s'écrit donc :

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_{i/\Delta}{}^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_{i/\Delta}{}^2, \tag{2.31}$$

et donc peut s'écrire :

$$E_K = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2, \tag{2.32}$$

avec :

$$I_\Delta = \sum_i m_i r_{i/\Delta}{}^2. \tag{2.33}$$

Cette quantité I_Δ s'appelle moment d'inertie du système par rapport à l'axe Δ. On voit dans l'équation (2.32) que, si la vitesse angulaire instantanée ω joue, pour la rotation, le rôle de la vitesse de translation, alors le moment d'inertie joue le rôle de la masse.

Regardons par exemple (Figure 2.6) le cas très simple de deux masses *m* identiques et ponctuelles placées aux deux extrémités d'une tige légère (de masse négligeable) de longueur *l*, et calculons le moment d'inertie I_Δ par rapport à l'axe perpendiculaire à la tige passant par son centre.

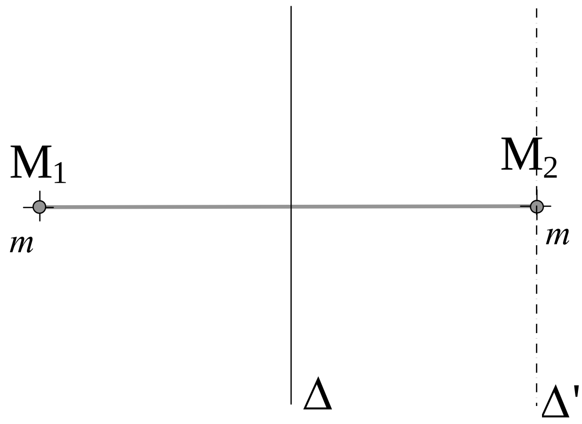


Figure 2.6. Exemple de système rigide en rotation autour d'un axe fixe.

On a d'après (2.33) :

$$I_\Delta = \sum_i m_i r_{i/\Delta}{}^2 = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2 \,. \qquad (2.34)$$

Nous verrons de nombreux autres exemples, parfois plus compliqués, dans ce chapitre et au cours des exercices.

2.3.2 Règle de Steiner-Huygens

Parmi les axes possibles autour desquels on peut faire tourner un système rigide, on doit distinguer une famille particulière, les axes qui passent par le centre d'inertie G. Il y a d'ailleurs une relation, très importante et très utile en pratique, entre le moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe quelconque Δ et le moment d'inertie $I_{\Delta G}$ par rapport à l'axe Δ_G parallèle à Δ passant par G (Figure 2.7).

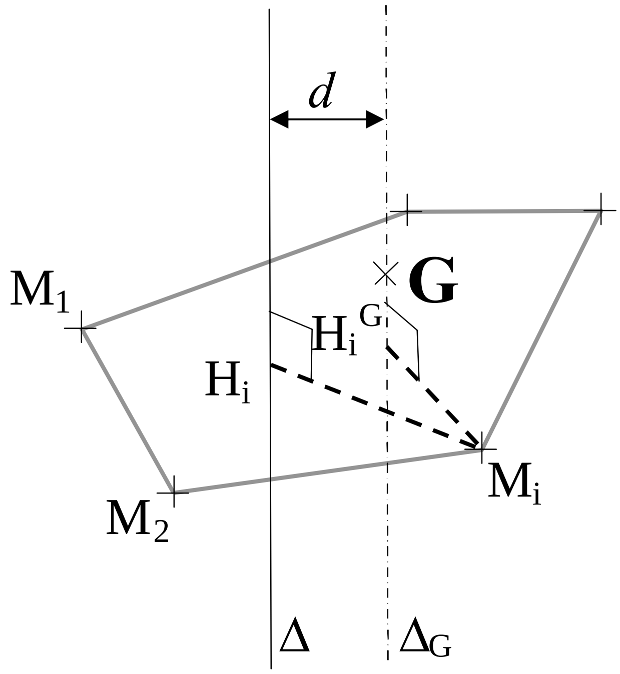


Figure 2.7. Moment d'inertie d'un solide rigide par rapport à un axe et par rapport à un axe parallèle passant par le centre d'inertie.

Si H_i est la projection de M_i sur Δ, appelons H_i^G la projection de M_i sur Δ_G. On remarque, pour tout point *i*, le module du vecteur $\overrightarrow{H_i H_i^G}$ est égal à la distance *d* entre Δ et Δ_G, et tous ces vecteurs sont identiques : $\overrightarrow{H_i H_i^G} = \vec{d}$.

Développons alors la définition de I_Δ pour faire apparaître les points H_i^G :

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \sum_i m_i \overrightarrow{H_i M_i}^2 = \sum_i m_i \left(\overrightarrow{H_i H_i^G} + \overrightarrow{H_i^G M_i} \right)^2 \\ &= \sum_i m_i \overrightarrow{H_i H_i^G}^2 + \sum_i m_i \overrightarrow{H_i^G M_i}^2 + 2\sum_i m_i \overrightarrow{H_i H_i^G} \cdot \overrightarrow{H_i^G M_i} \\ &= \sum_i m_i d^2 + I_{\Delta G} + 2\vec{d} \cdot \left(\sum_i m_i \overrightarrow{H_i^G M_i} \right) \end{aligned} \tag{2.35}$$

Dans le deuxième terme, on a effectivement reconnu $I_{\Delta G}$; quant au troisième terme, il est nul. En effet :

$$\vec{d} \cdot \left(\sum_i m_i \overrightarrow{H_i^G M_i} \right) = \vec{d} \cdot \left(\sum_i m_i \overrightarrow{H_i^G G} \right) + \vec{d} \cdot \left(\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} \right) = 0 \, , \tag{2.36}$$

où le premier terme est nul car tous les vecteurs $\overrightarrow{H_i^G G}$ sont alignés avec l'axe Δ_G et donc sont perpendiculaire à $\vec{d}$, et le deuxième terme est nul en vertu de l'équation (2.26).

On a ainsi démontré que :

$$I_\Delta = I_{\Delta G} + Md^2 \, . \tag{2.37}$$

C'est la règle de Steiner-Huygens, d'après le mathématicien suisse Jakob Steiner (1796-1803).

C'est une relation très sympathique, car elle évite de répéter des calculs inutiles. Par exemple, nous pouvons d'ores et déjà, sans effort, donner la valeur du moment d'inertie par rapport à l'axe Δ' dans le système de la Figure 2.6. C'est, d'après la règle de Steiner-Huygens :

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta G} + (2m)\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2 + \frac{1}{2}ml^2 = ml^2 \, . \tag{2.37}$$

Dans ce cas très simple, on voit bien que c'est effectivement ce qu'aurait donné un calcul direct ! Remarquons aussi que la règle de Steiner-Huygens implique que, pour toute direction considérée, le moment d'inertie est minimal quand l'axe passe par le centre d'inertie du système.

2.3.3 Expression du moment cinétique total par rapport à l'axe

Il est aussi très utile d'exprimer le moment cinétique total σ_Δ par rapport à l'axe Δ en fonction du moment d'inertie I_Δ et de la vitesse angulaire de rotation ω. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de l'axe et P un point quelconque sur l'axe. On a par définition :

$$\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_P \cdot \vec{u} = \left(\sum_i \overrightarrow{PM_i} \times m_i \vec{V}_i \right) \cdot \vec{u} \, . \tag{2.38}$$

Dans le cas d'un système rigide, il est aisé d'exprimer vectoriellement les vitesses :

$$\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PM_i} \, , \tag{2.39}$$

où $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$ désigne le vecteur instantané de rotation. On a alors :

$$\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_P \cdot \vec{u} = \left(\sum_i \overrightarrow{PM_i} \times m_i \vec{V}_i \right) \cdot \vec{u} = \left(\sum_i m_i \overrightarrow{PM_i} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{PM_i} \right) \right) \cdot \vec{u} \, . \tag{2.40}$$

Décomposons le double produit vectoriel, en nous souvenant que, pour trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, on a :

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\ , \tag{2.41}$$

ce qui, dans notre cas, donne :

$$\overrightarrow{PM}_i\times\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{PM}_i\right)=PM_i^{\,2}\vec{\omega}-\overrightarrow{PM}_i\cdot\vec{\omega}\overrightarrow{PM}_i\ . \tag{2.42}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta &= \sum_i m_i\left(PM_i^{\,2}\omega-PH_i^{\,2}\omega\right)=\omega\sum_i m_i\left(PM_i^{\,2}-PH_i^{\,2}\right)=\omega\sum_i m_i H_iM_i^{\,2}\\ &=\omega\sum_i m_i r_{i/\Delta}^{\;\;2}\end{aligned} \tag{2.43}$$

soit :

$$\sigma_\Delta = I_\Delta\omega\ . \tag{2.44}$$

2.3.4 Cas du solide continu

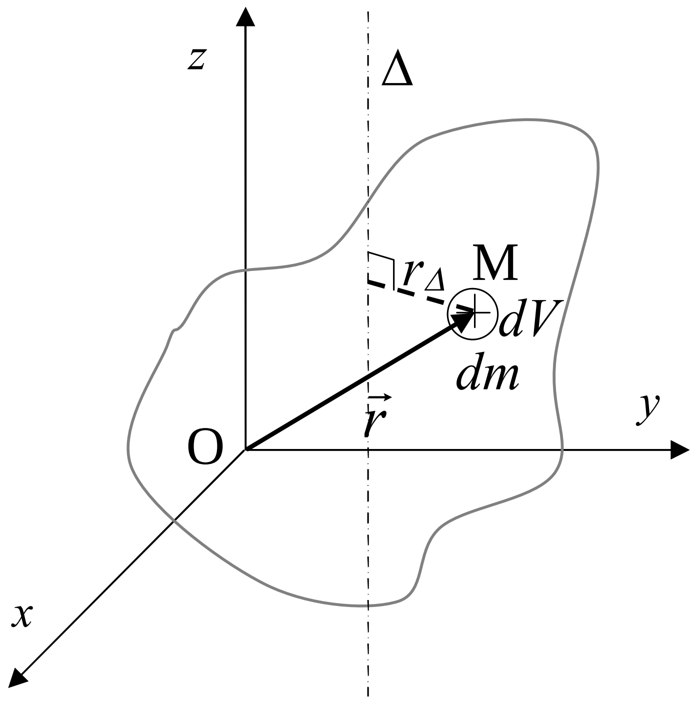


Figure 2.8. Solide continu en rotation autour d'un axe fixe.

Un solide est en fait constitué d'un grand nombre de points et, plutôt que des sommes finies, on va exprimer nos quantités avec des intégrales. Si on considère (Figure 2.8) un petit élément de volume dV autour du point M, il contient une masse dm donné par la masse volumique locale ρ(M) :

$$\rho=\frac{dm}{dV}\ . \tag{2.45}$$

La masse totale M est alors :

$$M=\int dm=\int\rho dV \tag{2.46}$$

et le centre d'inertie G est défini par :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{M}\int\overrightarrow{OM}dm=\frac{1}{M}\int\overrightarrow{OM}\rho dV\ . \tag{2.47}$$

Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ est alors :

$$I_\Delta = \int r_\Delta^2 dm = \int r_\Delta^2 \rho dV \ , \tag{2.48}$$

où r_Δ désigne la distance entre M et l'axe Δ (Figure 2.8).

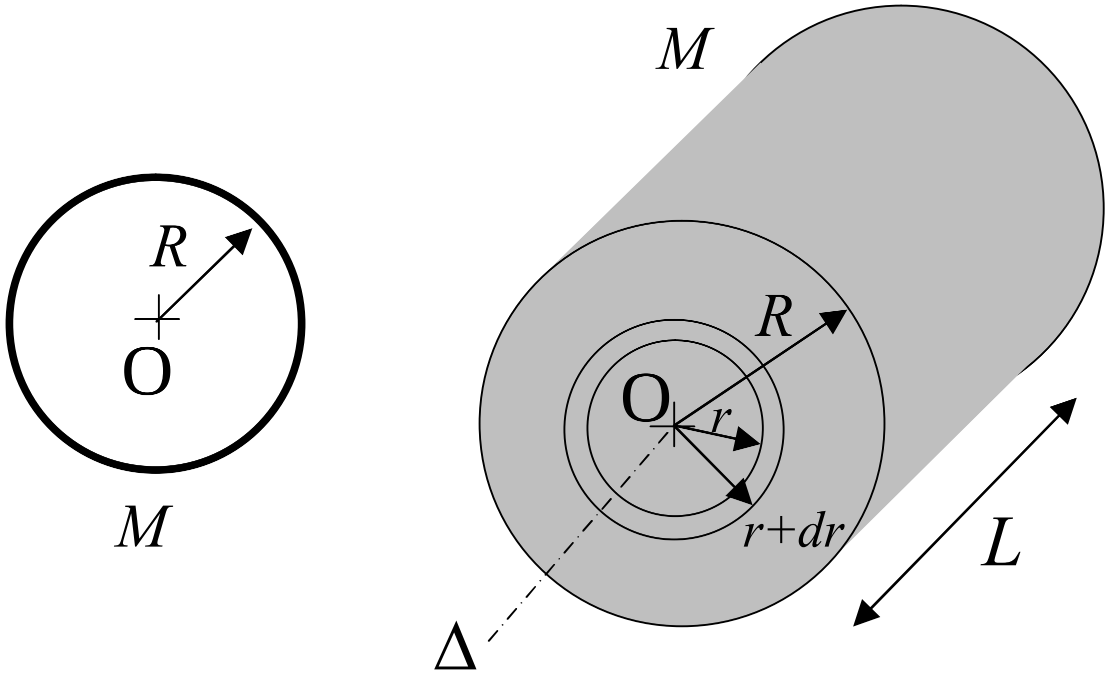


Figure 2.9. Cerceau et cylindre : moment d'inertie par rapport à l'axe de symétrie cylindrique.

Regardons par exemple le cas du moment d'inertie d'un cerceau fin de masse M et de rayon R (Figure 2.9) par rapport à un axe perpendiculaire à son plan, passant par son centre O. On a :

$$I_\Delta^{cerceau} = \int r_\Delta^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2 \ . \tag{2.49}$$

Regardons maintenant le cas d'un cylindre homogène de masse M, de rayon R et de longueur L (Figure 2.9). Son volume est $V=\pi R^2 L$ et sa masse volumique $\rho=M/V=M/\pi R^2 L$. Pour trouver le moment d'inertie par rapport à l'axe de symétrie de révolution Δ, découpons le cylindre en petits éléments de longueur L et s'appuyant sur un anneau entre r et $r+dr$ (Figure 2.9). Le petit élément de volume est alors $dV=2\pi r dr L$ et on a :

$$I_\Delta = \int r_\Delta^2 dm = \int r^2 \rho dV = \rho \int r^2 2\pi r dr L = \rho 2\pi L \int r^3 dr = \frac{M}{\pi R^2 L} 2\pi L \frac{R^4}{4} \tag{2.50}$$

soit

$$I_\Delta^{cylindre} = \frac{1}{2} MR^2 \ . \tag{2.51}$$

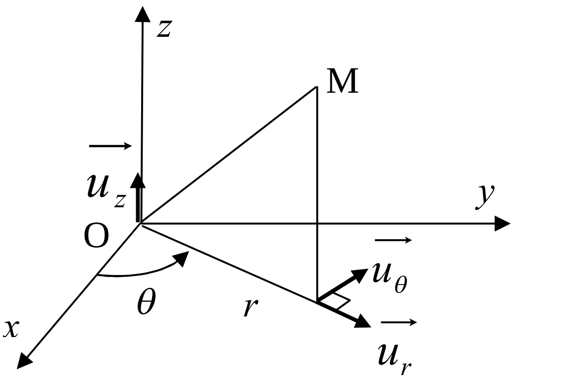
Ces deux résultats simples (2.49) et (2.51) sont à retenir ! Retenons aussi le moment d'inertie d'une sphère homogène de masse M et de rayon R par rapport à un axe passant par son centre :

$$I_\Delta^{sphère} = \frac{2}{5} MR^2 \ . \tag{2.52}$$

Nous verrons d'autres exemples de calculs de moments d'inertie en exercices ! Nous sommes maintenant prêts pour aborder le cas du mouvement général d'un solide.

Encadré 2.2 : **Repérage du mouvement dans l'espace en coordonnées cylindriques et sphériques.**

Coordonnées cylindriques :



Vecteur position :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

Vitesse :

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

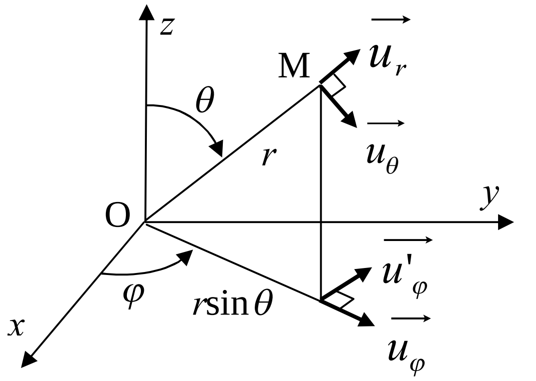
Accélération :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

Energie cinétique :

$$E_K = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Coordonnées sphériques :



Coordonnées : $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

Vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{vmatrix} \quad \vec{u}_\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{vmatrix} \quad \vec{u}_\varphi = \begin{vmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{u}'_\varphi = \begin{vmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{vmatrix}$$

Vitesse : $\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}'_\varphi$

Energie cinétique :

$$E_K = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

Ce qu'il faut retenir de ce chapitre :

- La notion de moment cinétique par rapport à un point
- La notion de moment cinétique par rapport à un axe
- La notion de moment d'inertie
- La règle de Steiner-Huygens