Mécanique des solides et des planètes

MS6: Exercices du 5 mars 2007

2007MS6E1 :

Le module F_{TV} de la force de traînée visqueuse sur une sphère de rayon R se déplaçant à une vitesse V dans un fluide incompressible de viscosité μ est donné par la formule de Stokes (voir cours chapitre 4 équation 4.6), soit:

$$F_{TV} = 6\pi\mu RV \ . \qquad (1)$$

On a ici:

$$F_{TV} = 6\pi \times 10^{-3} \times 10^{-2} \times 10 = 1.9 \times 10^{-3} \text{ N}. \qquad (2)$$

2007MS6E2 :

A l'équilibre, le moment de tous les poids par rapport au fléau de la balance est nul. Comptons positivement les moments des forces tendant à faire tourner dans le sens trigonométrique (vecteur perpendiculaire à la feuille pointant vers le lecteur) et négatif le sens opposé (vecteur perpendiculaire à la feuille pointant vers la page). La masse inconnue m (en kg) doit vérifier :

$$-0.5\text{N} \times 3\text{m} + 1\text{N} \times 2\text{m} + 2\text{N} \times 1\text{m} + 1\text{N} \times 1\text{m} - m \times 10 \times 2\text{m} + 1\text{N} \times 3\text{m} = 0 \ . \qquad (3)$$

soit:

$$6.5 - 20m = 0 \ . \qquad (3)$$

$$m = 325\text{g} \ . \qquad (4)$$

Le moment des forces du bras gauche exerçant une action dans le sens trigonométrique est 4 Nm, et -1.5 Nm dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour le bras droit, le moment des forces exerçant une action dans le sens trigonométrique est 4 Nm, et -6.5 Nm dans le sens des aiguilles d'une montre.

2007MS6E3 :

Le moment cinétique σ_1 de la sphère en rotation avec une vitesse angulaire ω_1 autour d'un axe fixe (que nous supposerons passant par son centre) est $\sigma_1=I_1\omega_1$ où I_1 est le moment d'inertie de la sphère par rapport à cet axe, soit $2/5MR^2$ où M est sa masse et R son rayon. La sphère s'aplatit en un disque de même rayon, donc de moment d'inertie $I_2=1/2MR^2$ par rapport au même axe. Pendant l'aplatissement, le moment cinétique est conservé puis qu'aucune force extérieure n'intervient. La vitesse angulaire de rotation après aplatissement doit donc vérifier $\sigma_1=I_1\omega_1=I_2\omega_2$, d'où $2/5MR^2\omega_1=1/2MR^2\omega_2$. On a donc $\omega_2=4/5\omega_1$. La vitesse angulaire diminue donc de 20 % après l'aplatissement de la sphère.

2007MS6E4 :

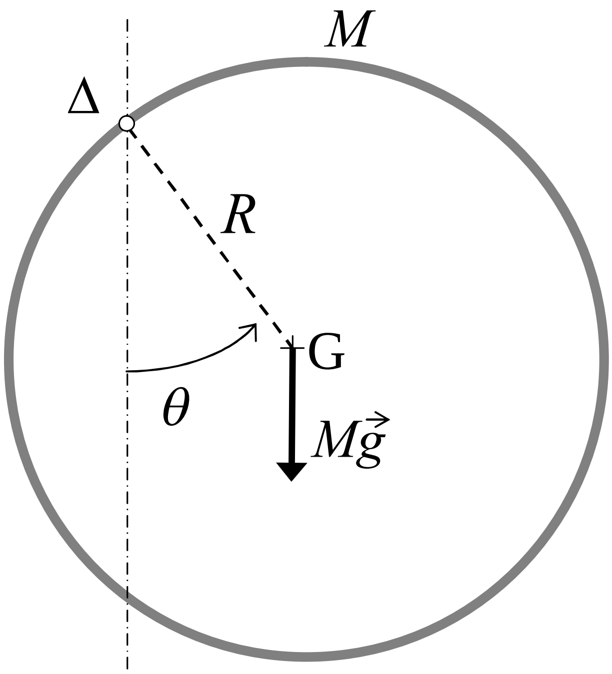
La période T des petites oscillations du pendule physique de masse M tournant librement autour d'un axe Δ situé à une distance d de son centre d'inertie est:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{Mgd}}\,, \qquad (5)$$

où I_{Δ} est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe Δ.

Considérons un cerceau homogène de masse M et de rayon R pouvant tourner librement autour d'un axe perpendiculaire à son plan passant par sa circonférence. On connaît le moment d'inertie I_G de ce cerceau par rapport à un axe perpendiculaire à son plan passant par son centre, c'est $I_G=MR^2$. Le moment d'inertie I_{Δ} par rapport à l'axe Δ est donné par la règle de Steiner-Huygens:

$$I_{\Delta} = I_G + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2\,. \qquad (6)$$

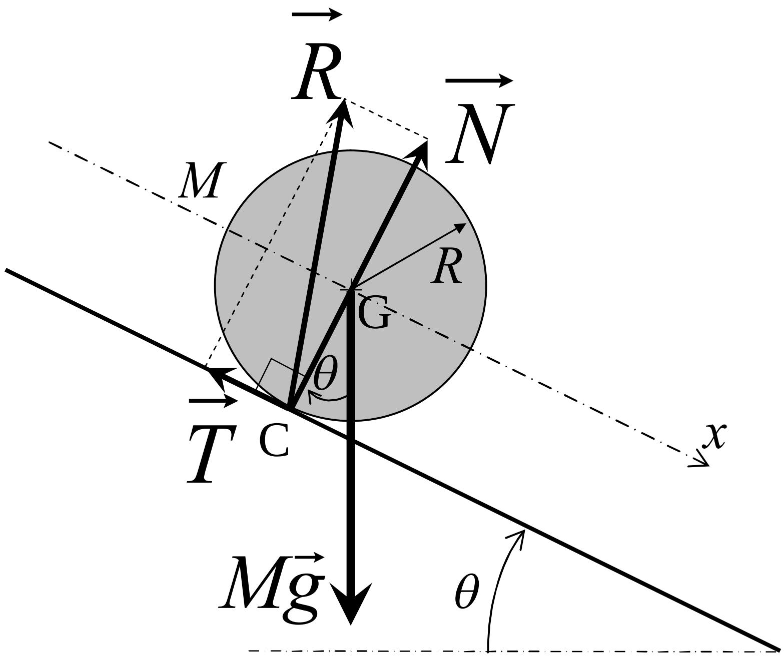


On a donc:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MRg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}\,. \qquad (6)$$

<u>**2007MS6E5 :**</u>

Considérons (ci-dessous) une sphère homogène, de masse M et de rayon R, qui roule sans glisser le long d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Dans cette hypothèse du roulement sans glissement, ce système ne possède qu'un seul degré de liberté. Soit x la coordonnée du centre d'inertie G le long d'un axe parallèle au plan incliné et orienté vers le bas. La vitesse instantanée de rotation ω autour du centre d'inertie est $\omega = \dot{x}/R$.



Cherchons les forces appliquées à notre sphère. Il y a d'abord son poids $M\vec{g}$. Il y a aussi la réaction $\vec{R}$ du plan que nous pouvons décomposer en une composante tangentielle $\vec{T}$ et une composante normale $\vec{N}$. Appliquons tout d'abord le théorème du moment cinétique. Si $\vec{a}$ est l'accélération du centre d'inertie, on a :

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{R} \ . \tag{7}$$

Projetons cette relation sur l'axe Gx :

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta - T \ . \tag{8}$$

Si on projette sur un axe perpendiculaire à Gx et au plan incliné :

$$0 = -Mg\cos\theta + N \ . \tag{9}$$

Appliquons maintenant le théorème du moment cinétique par rapport au centre d'inertie G. Le moment de la force de réaction par rapport à G se limite à *RT*. Le moment du poids par rapport à G est nul. On a donc :

$$\frac{d}{dt}\sigma_\Delta = I_\Delta\dot{\omega} = I_\Delta\frac{\ddot{x}}{R} = \Gamma_\Delta = RT \ . \tag{10}$$

Le moment d'inertie I_Δ de la sphère homogène par rapport à tout axe passant par son centre est $I_\Delta = 2/5MR^2$, ce qui fournit l'expression de la réaction tangentielle en fonction de l'accélération du centre d'inertie :

$$T = \frac{I_\Delta\ddot{x}}{R^2} = \frac{2}{5}M\ddot{x} \ . \tag{11}$$

En injectant cette expression dans (10), on obtient :

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta - \frac{2}{5}M\ddot{x} \ . \tag{12}$$

d'où :

$$\ddot{x} = \frac{5}{7}g\sin\theta \ . \tag{13}$$

On constate que la sphère ne se comporte pas comme un masse ponctuelle qui glisse sans frottement le long du plan incliné ($g\sin\theta$). Le roulement du cylindre a un effet : son accélération est 5/7 celle de la masse qui glisse sans frottement.

Pour que la condition de roulement sans glissement soit vérifiée, il faut que:

$$\frac{T}{N} \leq f_S \,, \tag{14}$$

où f_s est le coefficient de friction statique de la sphère sur le plan.

On obtient T à partir de la relation (11) et N à partir de la relation (9). On obtient alors la condition :

$$\frac{2}{7}\tan\theta \leq f_S \,. \tag{15}$$

Comment les choses seraient-elles changées si nous avions une balle de ping-pong, assimilable à une sphère creuse infiniment fine, au lieu d'une sphère homogène? Le moment d'inertie I_Δ de la sphère creuse par rapport à tout axe passant par son centre est (voir exercice MS5E4) $I_\Delta = 2/3MR^2$. On a alors :

$$T = \frac{I_\Delta \ddot{x}}{R^2} = \frac{2}{3}M\ddot{x} \,. \tag{16}$$

En injectant cette expression dans (10), on obtient :

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta - \frac{2}{3}M\ddot{x} \,. \tag{17}$$

d'où :

$$\ddot{x} = \frac{3}{5}g\sin\theta \,. \tag{18}$$

L'accélération de la balle de ping-pong sera donc inférieure à celle de la sphère creuse! Quant à la condition de roulement sans glissement, elle s'écrit dans ce cas:

$$\frac{2}{5}\tan\theta \leq f_S \,. \tag{19}$$

Quand on augmente l'angle du plan incliné, la balle de ping-pong commencera à glisser avant la sphère.

2007MS6E1C :

Considérons une trajectoire balistique d'un mobile de masse m en présence d'une force de friction visqueuse $\vec{F} = -\alpha m \vec{V}$. Soit V_0 la vitesse initiale et θ l'angle de jet avec l'horizontale. Soit Ox l'axe horizontal, Oy l'axe vertical et x=0, y=y_0 le point du jet. A un instant t, le mobile se trouve en x, y et on a:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\alpha\dot{x} \\ \ddot{y} = -g - \alpha\dot{y} \end{cases} . \tag{20}$$

La première équation s'intègre avec une solution de la forme $\dot{x} = Ce^{-\alpha t}$ où C est une constante. Les conditions initiales imposent $\dot{x}(t=0) = V_0\cos\theta = C$, d'où $\dot{x} = V_0\cos\theta e^{-\alpha t}$ et, en intégrant:

$$x(t) = \frac{V_0\cos\theta}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) . \tag{21}$$

De même, la deuxième équation de (20) s'intègre avec une solution de la forme $\dot{y} = -\frac{g}{\alpha} + Ce^{-\alpha t}$. Les conditions initiales imposent $\dot{y}(t=0) = V_0 \sin\theta = -\frac{g}{\alpha} + C$ d'où $\dot{y} = -\frac{g}{\alpha} + \left(V_0 \sin\theta + \frac{g}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}$. En intégrant, on obtient:

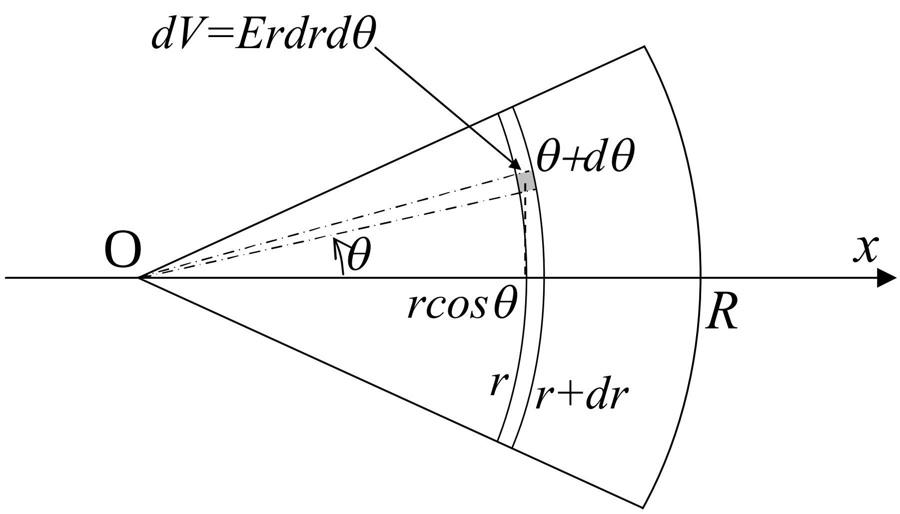
$$y(t) = -\frac{g}{\alpha}t + \frac{1}{\alpha}\left(V_0 \sin\theta + \frac{g}{\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t}\right). \qquad (22)$$

En éliminant t entre (21) et (22), on obtient l'équation de la trajectoire balistique en présence de friction visqueuse:

$$y = \frac{g}{\alpha^2} Log\left(1 - \frac{\alpha x}{V_0 \cos\theta}\right) + \left(\tan\theta + \frac{g}{\alpha V_0 \cos\theta}\right). \qquad (23)$$

2007MS6E2C :

Considérons un secteur homogène de rayon R et d'angle au sommet α :



Soit O le sommet du secteur et E son épaisseur. Son volume est donc $R^2E\alpha/2$ et la masse $M=\rho R^2 E\alpha/2$, où ρ désigne la masse volumique. Par symétrie, le centre d'inertie G doit se placer dans le plan médian du secteur et sur la bissectrice Ox de l'angle au sommet. Sa position x_G est donnée par :

$$x_G = \frac{1}{M}\int x\rho dV . \qquad (24)$$

Utilisons des coordonnées polaires r, θ pour délimiter un petit élément de volume dV situé entre r et $r+dr$, θ et $\theta+d\theta$ (voir figure). On a $dV=Erdrd\theta$, d'où :

$$x_G = \frac{1}{M}\int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} r\cos\theta\, \rho\, Erdrd\theta = \frac{\rho E}{M}\int_0^R r^2 dr \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\rho E}{M}\int_0^R r^2 dr\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho E}{M} 2\sin\frac{\alpha}{2}\int_0^R r^2 dr = \frac{\rho E}{M} 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{\rho E}{M} 2\sin\frac{\alpha}{2}\frac{R^3}{3}. \qquad (25)$$

$$= \frac{2}{\alpha R^2} 2\sin\frac{\alpha}{2}\frac{R^3}{3}$$

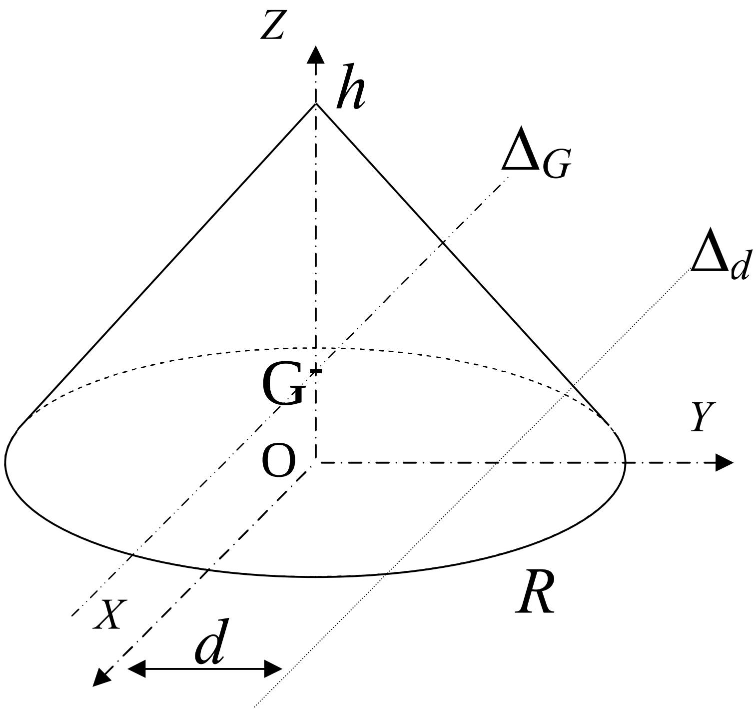
soit :

$$x_G = \frac{4\sin\frac{\alpha}{2}R}{3\alpha} \qquad (26)$$

Pour $\alpha=\pi$, on obtient $x_G=4R/3\pi$; on retrouve bien le résultat de l'exercice MS4E3C (demi-disque homogène).

2007MS6E3C :

Considérons un cône droit homogène de masse M, de hauteur h et de base circulaire de rayon R:



Soit O le centre de la base et OXY le plan horizontal, l'axe OZ coïncide avec l'axe de symétrie de révolution du cône. Commençons par chercher le moment d'inertie du cône par rapport à un axe du plan de la base passant par le centre O, par exemple I_{XX}. Ce moment d'inertie peut s'exprimer comme la somme des moments d'inerties par rapport à deux plans perpendiculaires :

$$I_{XX} = I_{\Pi XY} + I_{\Pi XZ} \quad . \qquad (27)$$

On peut facilement trouver l'expression de. En effet, on connaît (voir exercice MS4E4 du 19 février 2007) le moment d'inertie du cône par rapport à l'axe IZ. Or ce moment d'inertie lui aussi peut s'exprimer comme la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires :

$$I_{ZZ} = \frac{3}{10}MR^2 = I_{\Pi XZ} + I_{\Pi YZ} \quad . \qquad (28)$$

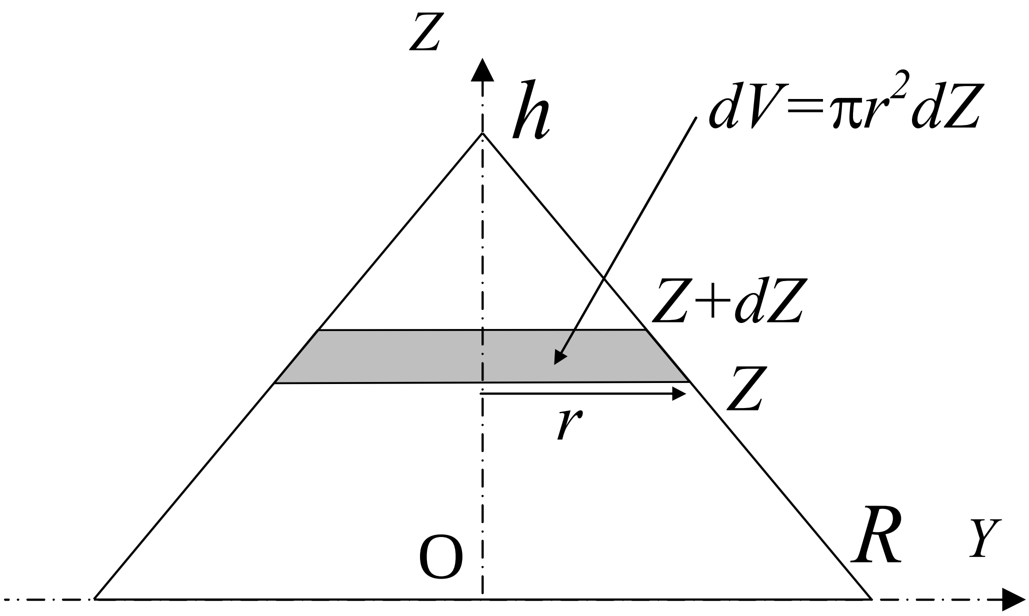
Or, par symétrie, ces deux dernières quantités sont égales. On a donc :

$$I_{\Pi XZ} = \frac{3}{20}MR^2 = I_{\Pi YZ} \quad . \qquad (29)$$

Il nous reste donc dans l'équation (27) à trouver l'expression du moment d'inertie $I_{\Pi XY}$ du cône par rapport au plan de sa base. Pour cela, on va découper le cône en petits disques élémentaires comme dans la figure suivante, situés entre Z et $Z+dZ$ et de rayon r. Le volume élémentaire est $dV=\pi r^2 dZ$. Mais on a une relation entre r et Z: $r=(h-Z)R/h$. On a donc :

$$I_{\Pi XY} = \int dmZ^2 = \int_0^h \rho\pi\left(\frac{(h-Z)R}{h}\right)^2 Z^2 dZ = \rho\pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h (h-Z)^2 Z^2 dZ \,, \tag{30}$$

où $\rho=3M/\pi R^2 h$ désigne la masse volumique du cône.



On obtient donc :

$$I_{\Pi XY} = \frac{3M}{\pi R^2 h}\pi\frac{R^2}{h^2}\left(h^2\left[\frac{Z^3}{3}\right]_0^h - 2h\left[\frac{Z^4}{4}\right]_0^h + \left[\frac{Z^5}{5}\right]_0^h\right) = 3Mh^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}Mh^2 \,. \tag{31}$$

En injectant (31) et (29) dans (27), on obtient :

$$I_{XX} = \frac{1}{10}Mh^2 + \frac{3}{20}MR^2 \,. \tag{32}$$

Nous pouvons maintenant considérer le moment d'inertie $I_{\Delta d}$ par rapport à un axe Δ_d quelconque du plan de la base. Soit d la distance entre Δ_d et l'axe parallèle passant par O, par exemple OX dans la figure de la page précédente. Soit $I_{\Delta d}$ le moment d'inertie du cône par rapport à l'axe parallèle à OX et Δ_d passant par G. La règle de Steiner-Huygens dit que :

$$I_{XX} = I_{\Delta G} + M(OG)^2 \,. \tag{33}$$

et aussi :

$$I_{\Delta d} = I_{\Delta G} + M\left(OG^2 + d^2\right) . \tag{34}$$

Faisons la différence de ces deux relations et nous obtenons :

$$I_{\Delta d} = I_{XX} + Md^2 \,. \tag{35}$$

Le moment d'inertie du cône par rapport à un axe quelconque du plan de sa base est donc:

$$I_{\Delta d} = \frac{1}{10}Mh^2 + \frac{3}{20}MR^2 + Md^2 \,. \tag{36}$$