Cours 1: Ondes en Sciences de la Terre

- Introduction aux ondes (sismique, ondes de pression, ondes électromagnétiques, ondes de tsunami)
- Onde acoustique (onde de pression)
- Onde de tsunami (onde de gravité)
- Source d’une onde
- Onde plane
- Vitesse de phase-vitesse de groupe (quelques exemples simples- GPS)

Quelques exemples d’ondes

- Ondes sismiques
  - Prospection pétrolière
  - Imagerie du sous-sol
  - Imagérie de la Terre
- Ondes acoustiques
  - Imagerie du sous-sol
  - Imagerie non-destructive des batiments
  - Imagerie médicale
- Ondes électromagnétiques
  - Radio communications
  - Radar
  - Positionnement

A la base de la propagation

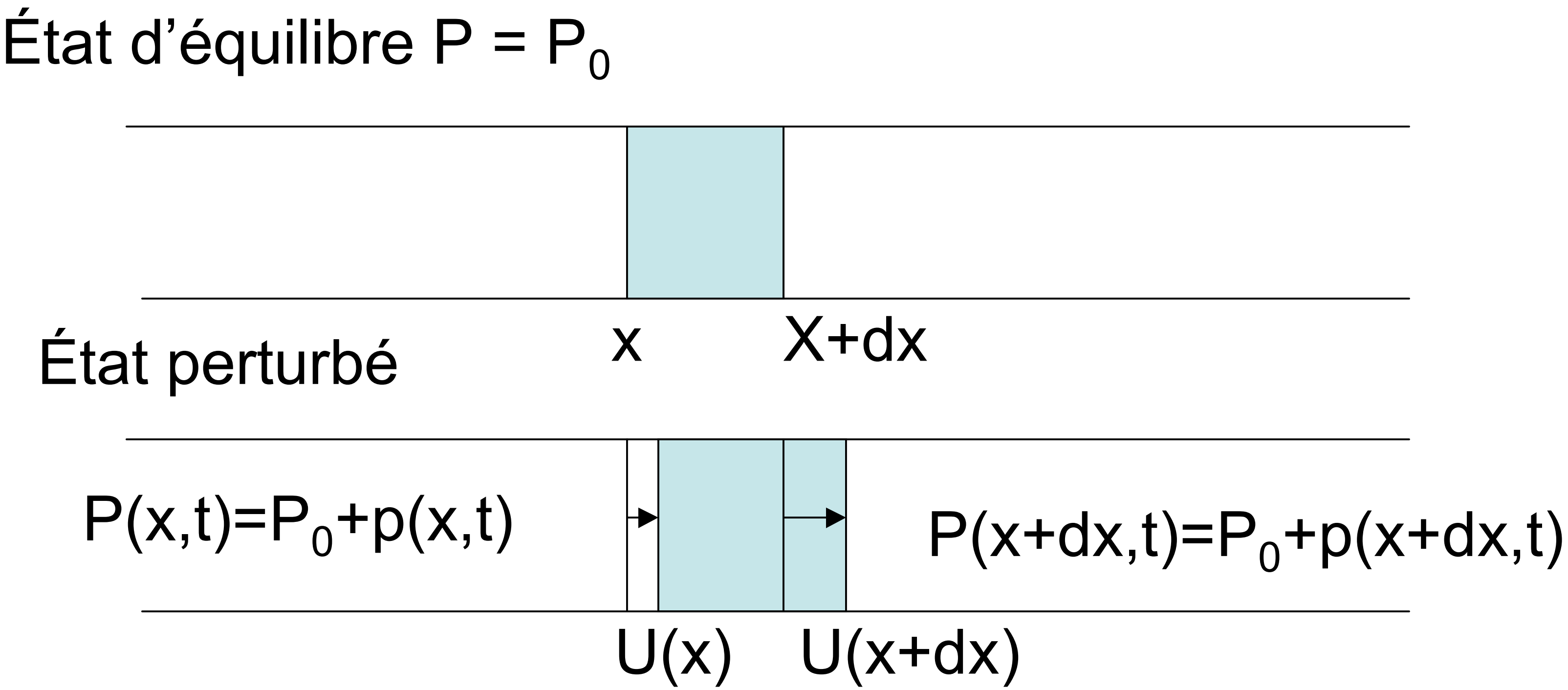
- Echange/interaction entre deux réservoirs
  - Energie cinétique/potentielle
  - Energie magnétique/electrique
- L’un génère une vitesse (dérivée en temps), l’autre génére un gradient (dérivé dans l’espace)… évolution/propagation dans l’espace lorsque le temps avance

En mécanique…

- Deux ondes possibles
- Ondes acoustiques/sismiques
  - Energie potentielle liée à la déformation de la matière (compression, cisaillement, modification de tension)
  - Ondes sismiques, son (ondes acoustiques et infrasons)
- Ondes de gravité
  - Energie potentielle liée au déplacement de la matière dans la gravité terrestre
  - Ondes de tsunami, vagues, etc

Ondes de pression

- Oscillations entre énergie cinétique et énergie de compression
- On considère un tube de section S dans lequel se trouve un fluide compressible
- La perturbation est représenté par les variables u(x,t) et p(x,t), qui donne le déplacement et la pression sur un plan initialement à la position x
- C'est une vibration longitudinale (le déplacement est dans la direction de propagation)



Bilan des forces (1/3)

$$\rho_0 S dx \frac{d^2u}{dt^2} = S(p(x) - p(x + dx))$$

$$\frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_?$$

- K est le coefficient d'incompressibilité du gaz, dP et dV les variations de volume par rapport à l'état d'équilibre
- Quel coefficient d'incompressibilité
  - Isotherme? Adiabatique?

Bilan des forces (2/3)

- Si les oscillations se font rapidement devant le temps de diffusion de la chaleur, la chaleur générée (ou perdue) par la compression (ou décompression) du gaz n'a pas le temps de diffuser
  - Cas des ondes sismiques dans la terre, des ondes acoustiques dans la basse atmosphère, des ondes dans les cristaux, etc

$$\frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{adiabatique}$$

  - Dans certains cas, la chaleur a le temps de diffuser, et écrire la seconde équation n'est plus possible.Il faut alors faire aussi le bilan de l'énergie thermique

Bilan des forces (3/3)

Etapes intermédiaires…

$$V_0 = Sdx$$

$$dV = V(t) - V_0 = S(u(x+dx,t) + dx - u(x,t) - dx)$$

$$= S\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$P = p$$

D'où

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p(x)}{\partial x}$$

Equation du mouvement
- à modifier si d'autres forces sont prises en compte

$$p = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}$$

Equation constitutive
- à modifier si la milieu ne réagit pas de façon adiabatique…

Equation d'onde

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\kappa \frac{\partial u}{\partial x})$$

D'où, uniquement si le milieu est homogène

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ Équation des ondes

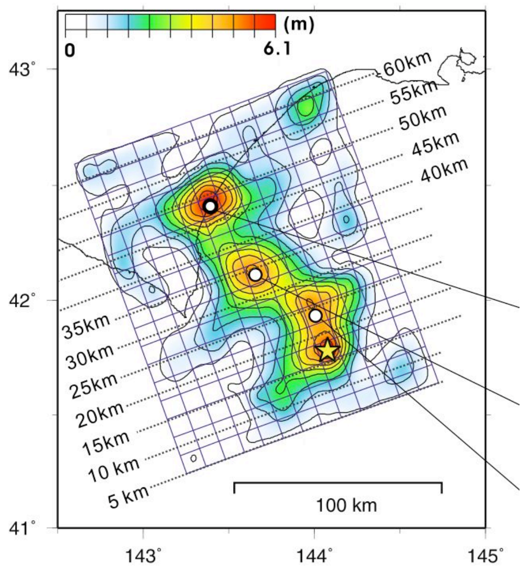
$$c^2 = \frac{\kappa}{\rho_0}$$ Vitesse de propagation

Ne pas oublier….

- La source

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{f(x,t)}{\rho_0}$$

- Spatialement peut être
  - ponctuelle (non nulle uniquement en un point, ex explosion, petit séisme, etc)
  - De taille finie (ex, un grand séisme)
  - Délocalisée (par exemple, la turbulence dans le soleil)



Source d'un grand séisme
(Hokkaido, Japon, 25/09/2003, Ms=8.1)

Ne pas oublier….

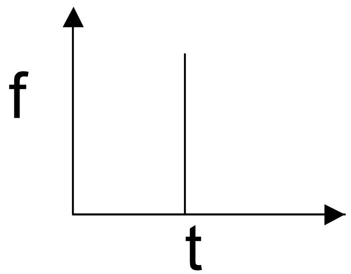
- La source

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{f(x,t)}{\rho_0}$$

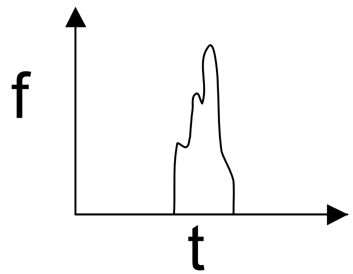
- Temporellement peut être
  - A: De durée très courte (explosion)
  - B: De durée finie (impact et pénétration d'une météorite)
  - C: De durée infinie (séisme…?)

Rupture

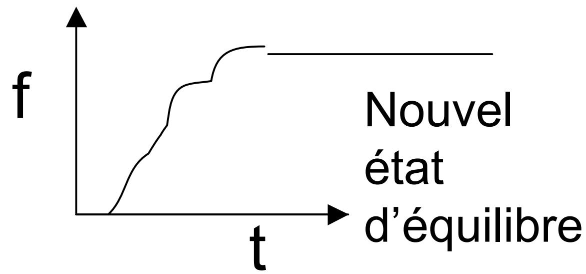
A



B



C



Ne pas oublier

- Les conditions aux limites
  - L'équation des ondes n'est pas valable sur les frontières du milieu (pas de dérivation possible)

  - Milieu infini (pas de conditions aux limites), demi-infini ou fini (conditions imposées sur les frontières)

Type de conditions aux limites

- Rigide: déplacement nul dans le sens du mouvement)

$$u(x_L, t) = 0$$

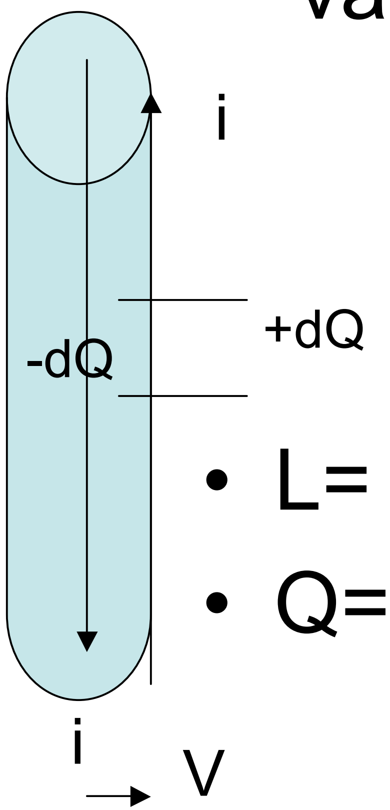
- Libre: pas de forces exercées

$$p(x_L, t) = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Radiative
  - Les ondes sont rayonnées et sortent du système
- Autres…

D’autres équations à 1D

- Guide d’onde (câble co-axial)
- variables q (~u),V (~p)



$$Ldx\,\frac{di}{dt} = V(x+dx,t) - V(x,t)$$

$$dQ = CdxV$$

- L= inductance par unité de longueur
- Q=capacitance par unité de longueur

- Comme les électrons vont dans le sens inverse du courant

$$Ldx\,\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$d\dot{Q} = Cdx\,\frac{\partial V}{\partial t} = i(x + dx, t) - i(x) = \frac{\partial i}{\partial x}\,dx$$

- D'où

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$$

$$c^2 = \frac{C}{L}$$

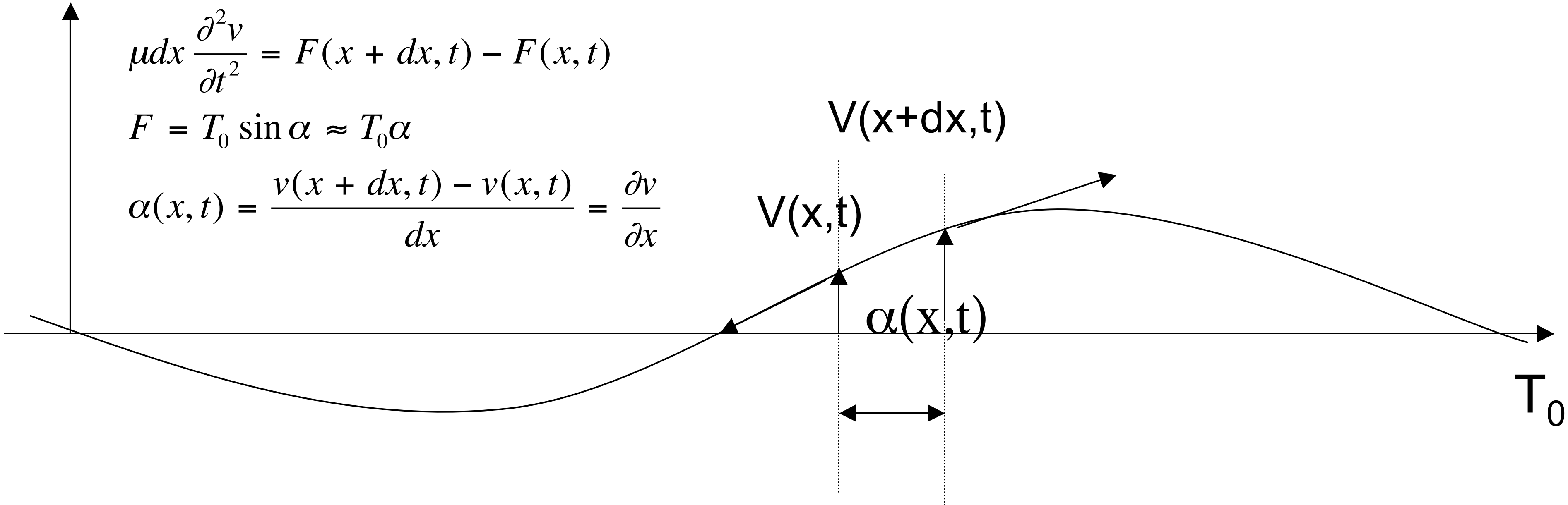
Equation d'une corde

- Exemple de mouvement transversal (le mouvement se fait perpendiculairement à la direction de propagation)
- Autres exemples transversaux: ondes de cisaillement des séismes, dites S

$$\mu dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F(x+dx,t) - F(x,t)$$

$$F = T_0 \sin\alpha \approx T_0\alpha$$

$$\alpha(x,t) = \frac{v(x+dx,t) - v(x,t)}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$



Corde vibrante

- Equation d'onde

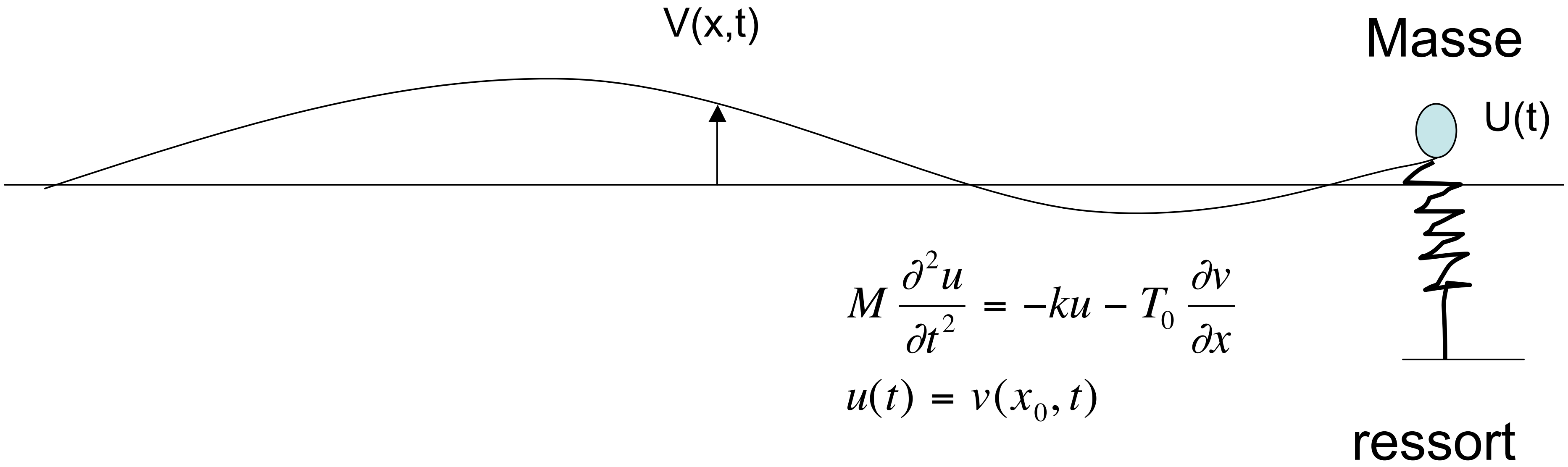
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$c^2 = \frac{T_0}{\mu}$$

- Conditions aux limites

$$F = T_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

Exemple de condition aux limites hybride…



$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -ku - T_0 \frac{\partial v}{\partial x}$$

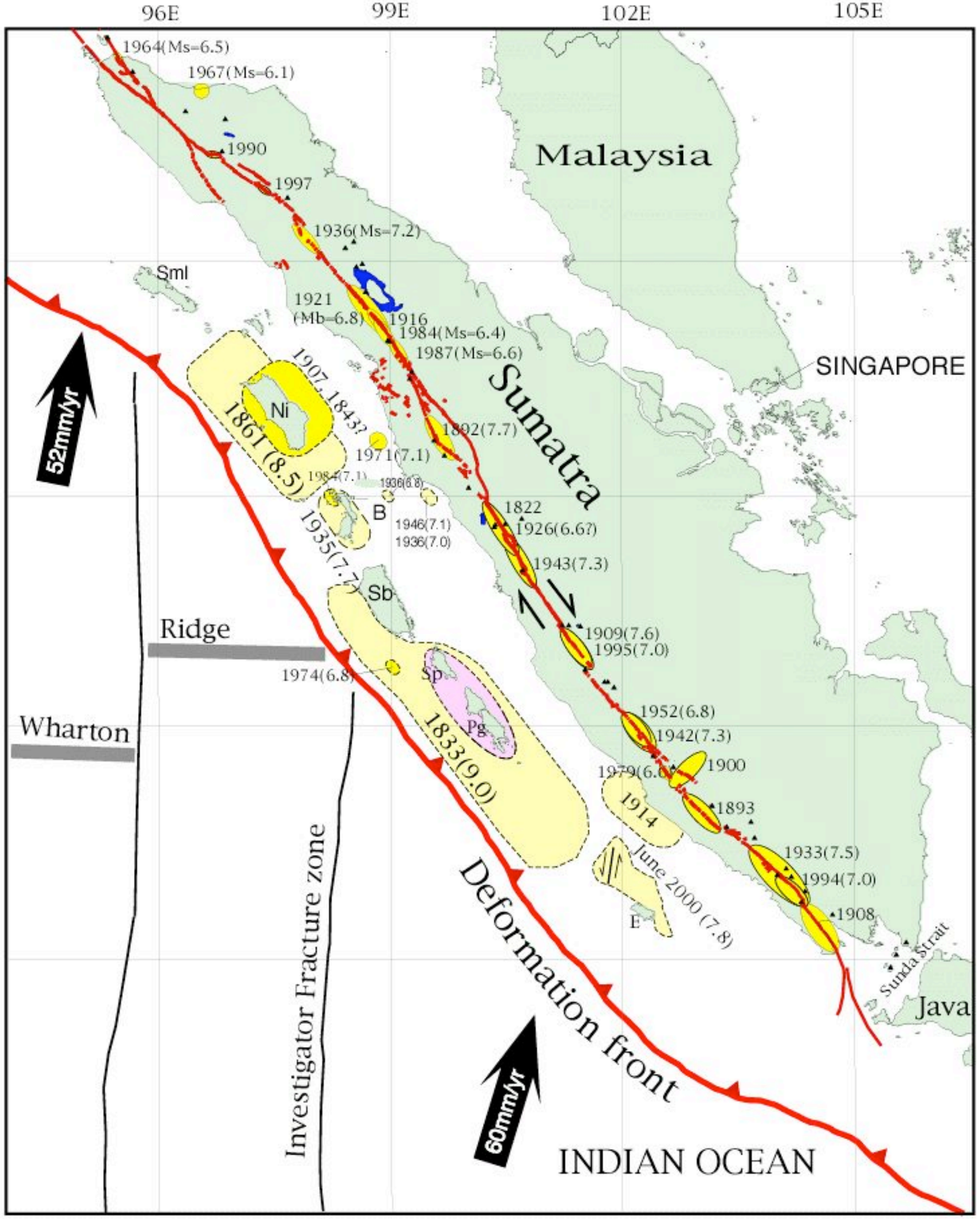
$$u(t) = v(x_0, t)$$

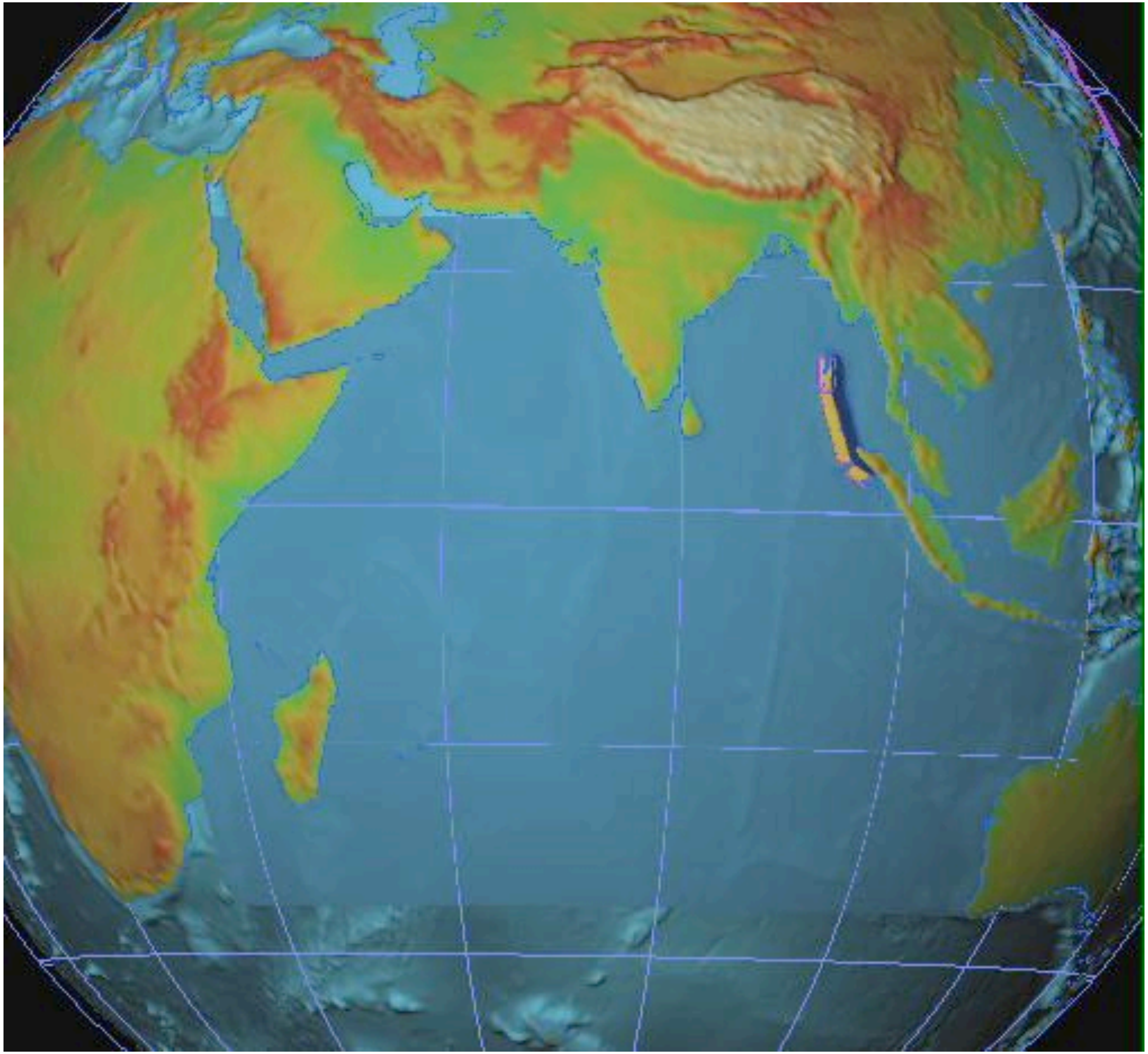
Onde de gravité

- La force de rappel n’est plus la compression mais la gravité
- Les ondes de gravité
  - Océan: tsunami
  - Atmosphère

Tsunami d’Indonésie, 26/12/2004

- Tsunami de moins d’un m en haute mer
- Amplitude maximum de 35 m a Sumatra
- Longue rupture (30 min) sur une longueur de faille de près de 1000km
- Période du tsunami de 13 min
- Profondeur moyenne de l’océan indien de 3500 m


96E
99E
102E
105E
6N
3N
0
3S
6S
1964(Ms=6.5)
1967(Ms=6.1)
1990
1997
1936(Ms=7.2)
Malaysia
Sml
1921
(Mb=6.8)
1916
1984(Ms=6.4)
1987(Ms=6.6)
SINGAPORE
Sumatra
52mm/yr
1907, 1843?
Ni
1861 (8.5)
1892(7.7)
1971(7.1)
1984(7.1)
1936(6.8)
B
1946(7.1)
1936(7.0)
1822
1926(6.6?)
1935(7.7)
1943(7.3)
Sb
Ridge
1909(7.6)
1995(7.0)
1974(6.8)
Sp
Pg
1833(9.0)
1952(6.8)
1942(7.3)
Wharton
1900
1979(6.6)
1914
1893
June 2000 (7.8)
1933(7.5)
1994(7.0)
1908
E
Sunda Strait
Java
Investigator Fracture zone
Deformation front
60mm/yr
INDIAN OCEAN



Imagerie des retraits de vagues

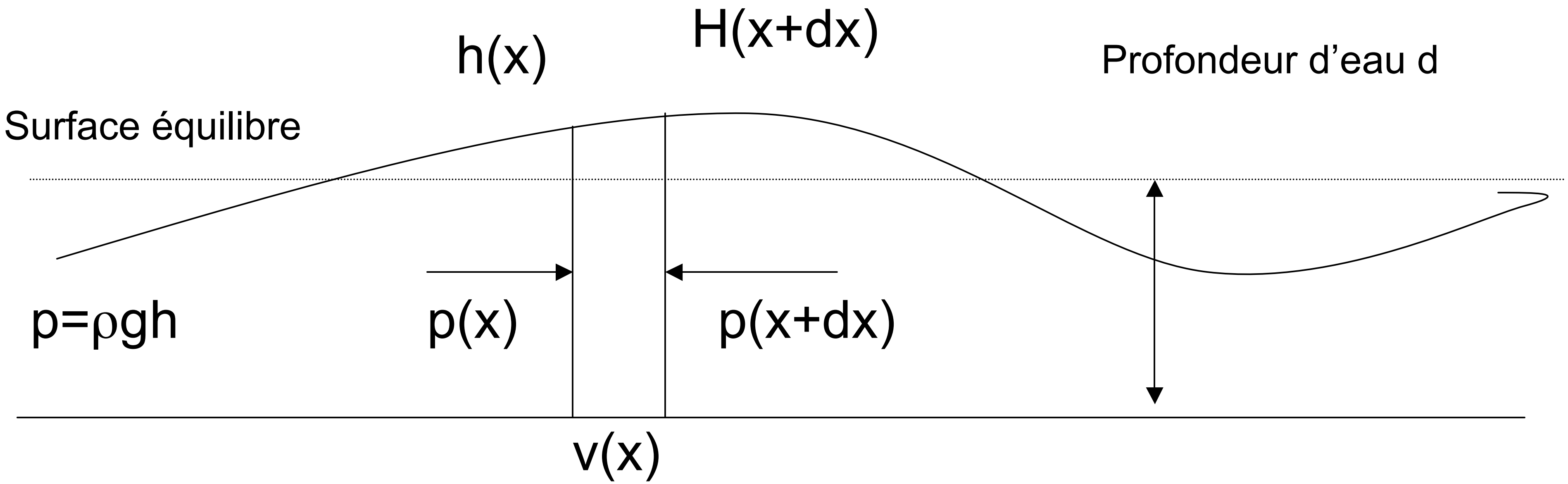
- Ex Image Quickbird à Kalutara, Sri Lanka (4 heures après le séisme)

Phase de retrait

Seconde phase de retrait > 30 minutes

Onde de gravité: équation

- onde longitudinale (vitesse v)
- fluide incompressible (eau)=> surpression = poids de la hauteur d’eau
- Relation de la dynamique +conservation de la masse



$$Equation \quad du \quad mouvement$$

$$\rho d \frac{\partial v}{\partial t} = d\rho g h(x,t) - d\rho g h(x+dx,t)$$

$$Conservation \quad de \quad la \quad masse$$

$$v(x,t) * d - v(x+dx,t) * d = \frac{\partial h}{\partial t} dt$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x}$$

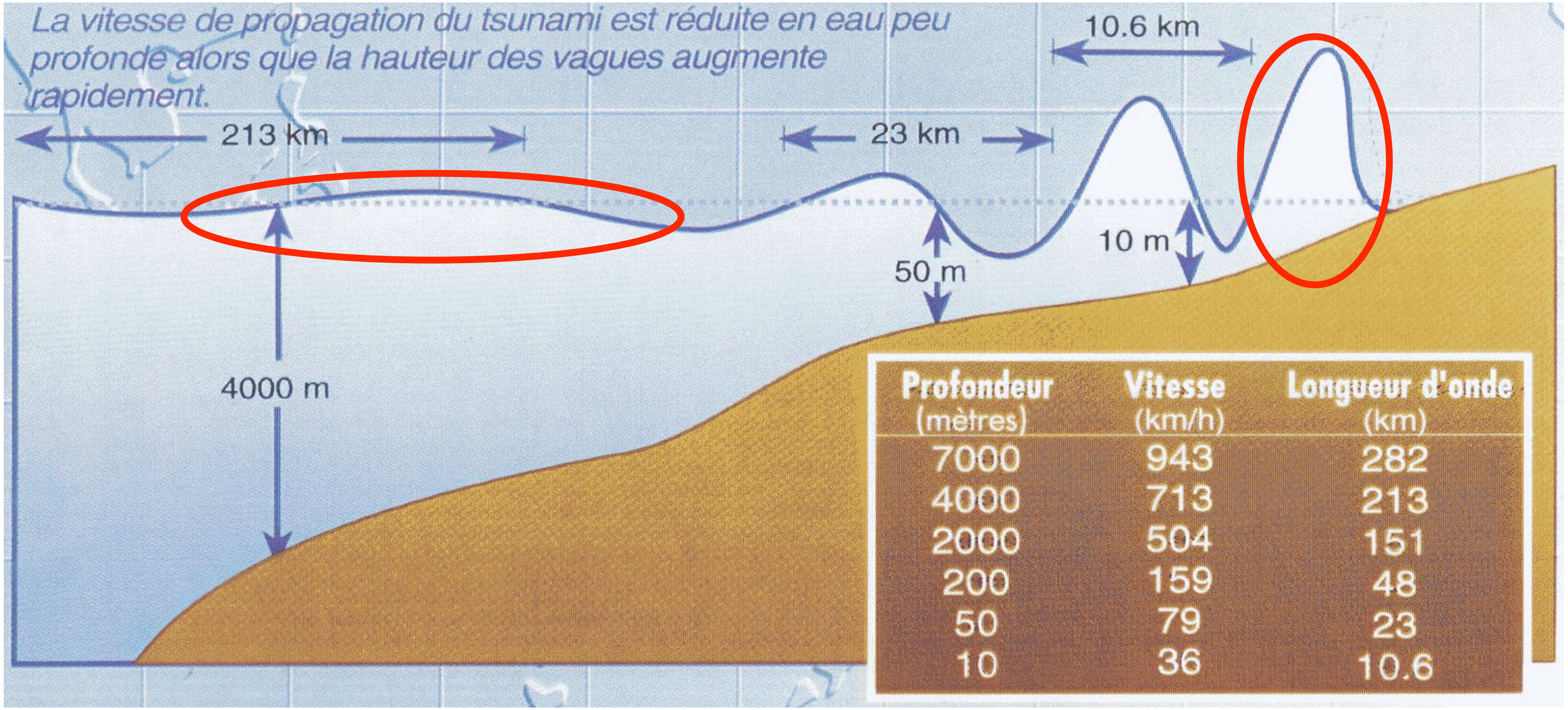
$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial (vd)}{\partial x}$$

$$d'où$$

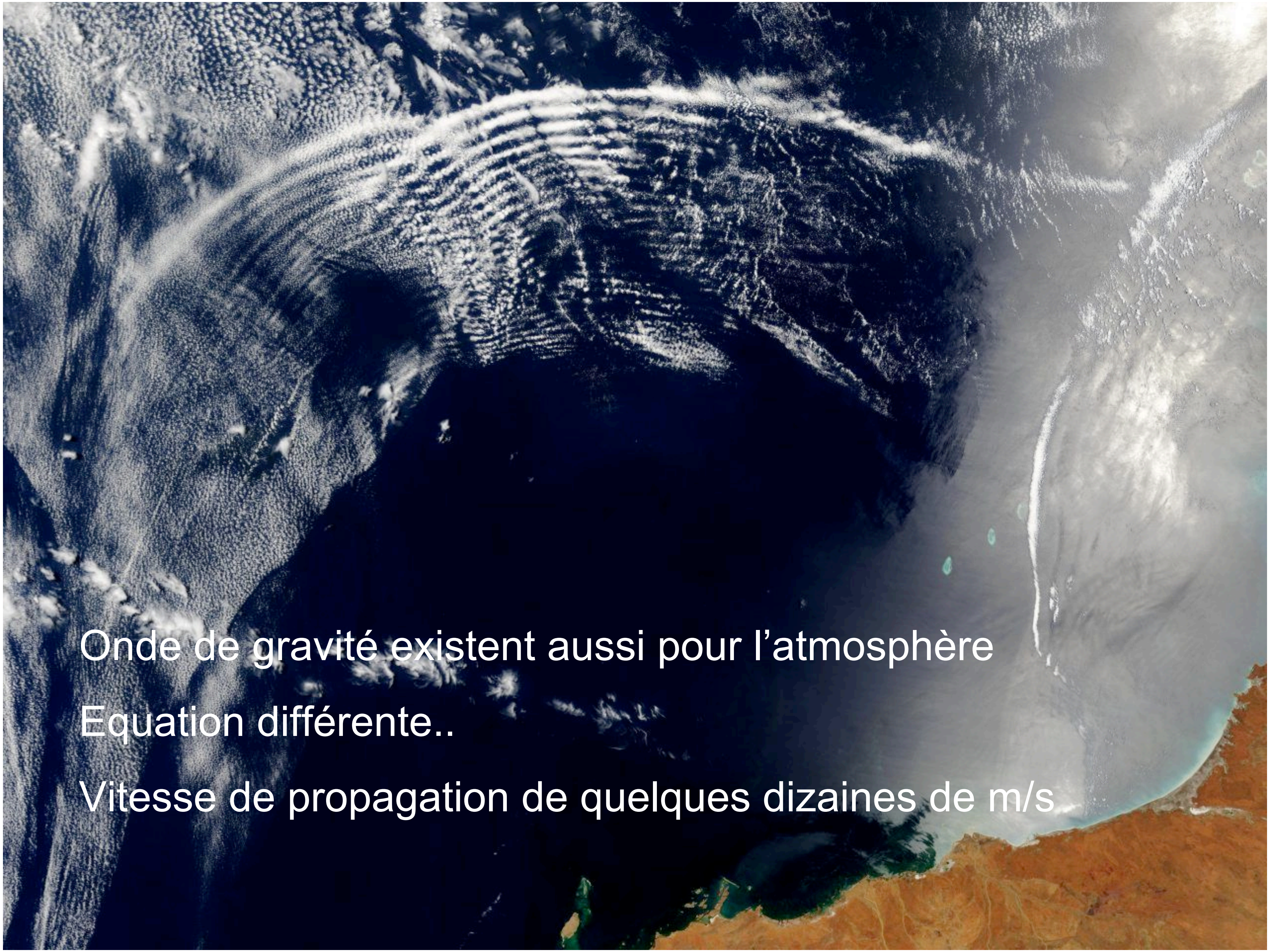
$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[c^2 \frac{\partial h}{\partial x}\right]$$

$$avec \quad c^2 = gd$$

- La vitesse de propagation des ondes est ~ $\sqrt{gd}$
  - *d* : profondeur d'eau
- Ralentissement près des côtes : ondes plus courtes
  - augmentation des amplitudes par conservation de l'énergie…



Profondeur (mètres)	Vitesse (km/h)	Longueur d'onde (km)
7000	943	282
4000	713	213
2000	504	151
200	159	48
50	79	23
10	36	10.6


Onde de gravité existent aussi pour l’atmosphère
Equation différente..
Vitesse de propagation de quelques dizaines de m/s

Résolution de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

- Cas homogène
- Une équation particulière, car invariante si le temps ou la direction sont renversées

$$x \longrightarrow -x$$

$$t \longrightarrow -t$$

- Conséquence:
  - les ondes se propagent de la même façon de droite à gauche que de gauche à droite
  - Si le temps est renversé, les ondes font le chemin inverse
    - Renversement temporel (technique utilisée en médecine)

- Similarité avec $$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

D'où

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)v = 0$$

Changement de variable

X=x+ct, Y=x-ct

D'où

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial Y} = c\frac{\partial}{\partial X} - c\frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x} = -2c\frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x} = 2c\frac{\partial}{\partial X}$$

- L’équation s’écrit alors $$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0$$
- Et à comme solution

U = F(X)+G(Y)= F(x-ct)+G(x+ct)

Où F et G sont deux fonctions quelconques.

Comment trouver les fonctions?

Conditions initiales

- Equation d'onde = équation différentielle du second degrés
  - Deux conditions initiales nécessaire
- A t=0

$$u_o(x) = F(x) + G(x)$$

$$v_o(x) = -c\dot{F}(x) + c\dot{G}(x)$$

- donc

$$\frac{1}{c}\int_0^x v_o(z)dz = G(x) - F(x)$$

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\left(u_o(x) - \frac{1}{c}\int_{-\infty}^x v_o(z)dz\right)$$

$$et \quad G(x) = \tfrac{1}{2}\left(u_o(x) + \frac{1}{c}\int_{-\infty}^x v_o(z)dz\right)$$

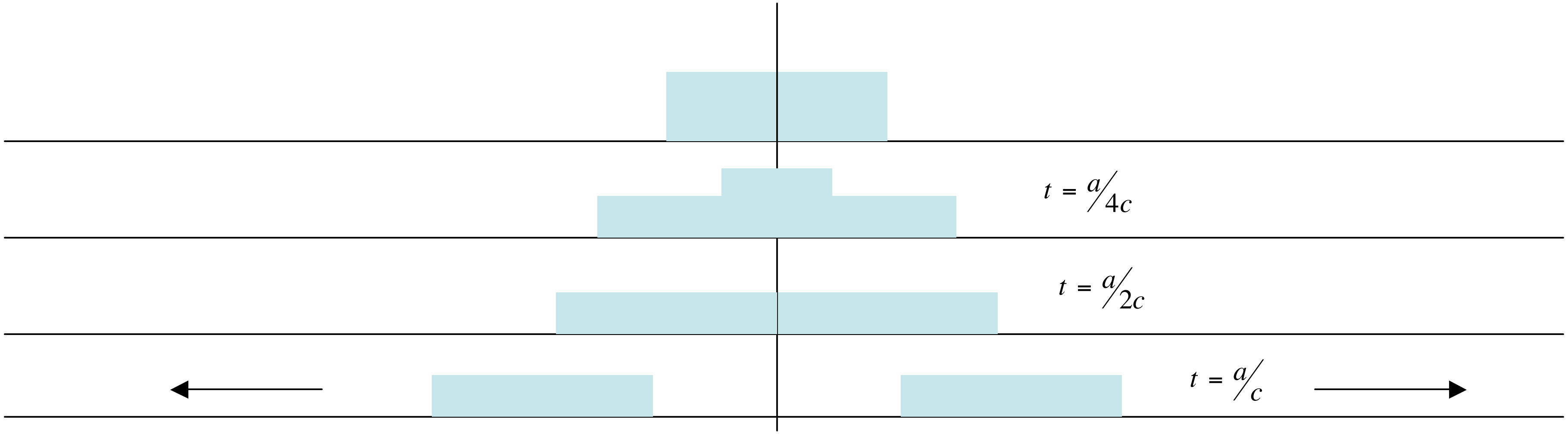
Exemple 1

Déplacement initial $\quad u_0(x) = P_a(x)$

(P_a est la fonction porte, nulle en dehors de l'interval -a/2, a/2)

$$F(x) = \frac{P_a(x)}{2} ; G(x) = \frac{P_a(x)}{2}$$

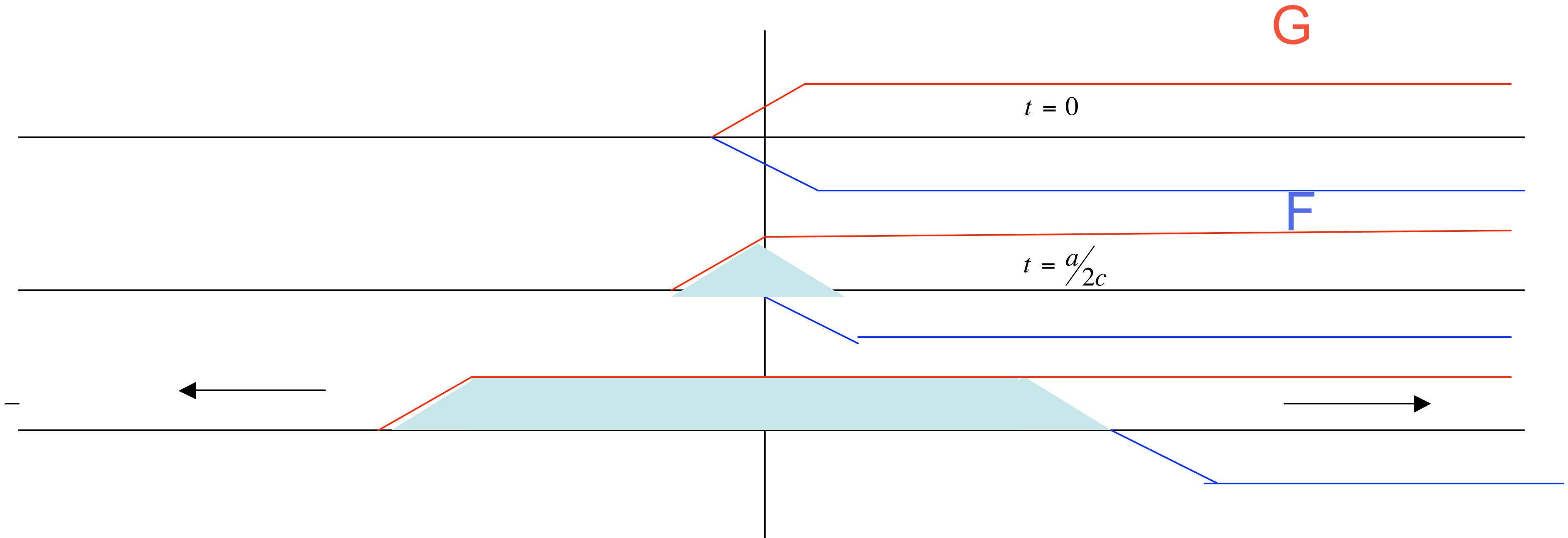
$$u(x,t) = \frac{P_a(x-ct)}{2} + \frac{P_a(x+ct)}{2}$$



Exemple 2

vitesse initiale $$v_0(x) = P_a(x)$$

$$G(x) = \frac{v_0}{2c}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} P_a(x)\right) = -F(x)$$



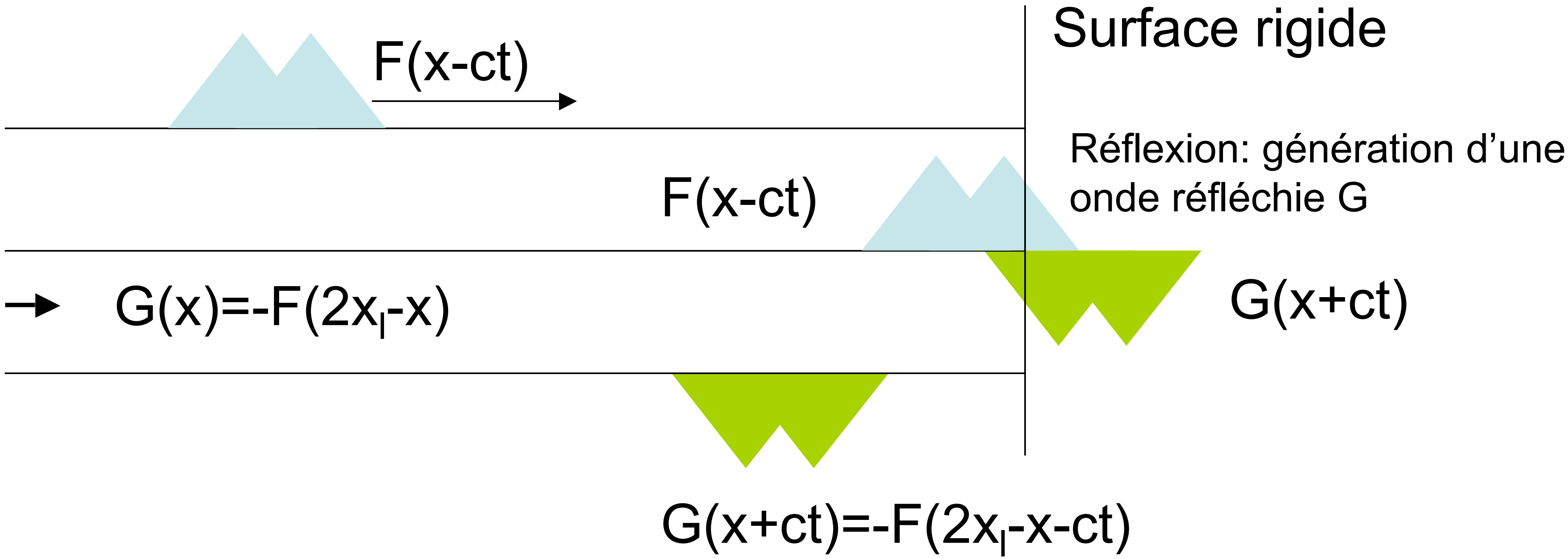
État final n'est pas l'état initial… déformation statique

Conditions aux limites

- Les conditions aux limites vont générer des réflexions de l'onde mais la solution va rester une solution générale sous la forme

$$u=F(x-ct)+G(x+ct)$$

$$\text{Avec } 0=F(x_l-ct)+G(x_l+ct)$$



Surface libre

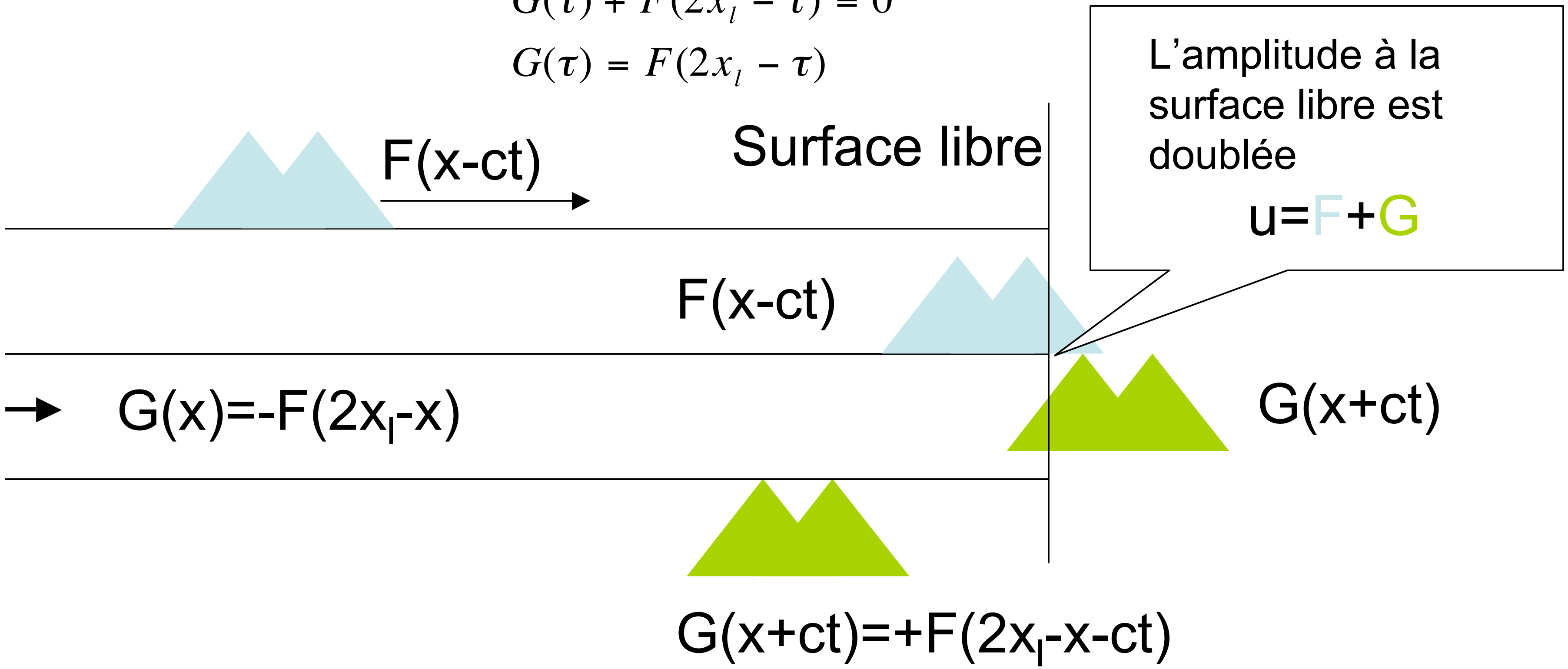
- Pour une surface libre, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x_l - ct) + \frac{\partial}{\partial x}G(x_l + ct) = 0$$

$$soit \quad si \quad \tau = x_l + ct$$

$$\dot{G}(\tau) + \dot{F}(2x_l - \tau) = 0$$

$$G(\tau) = F(2x_l - \tau)$$



Energie

- Les ondes ont deux réservoirs d’énergie et cette énergie se propage donc
- Exemple: corde
  - Energie cinétique par unité de longueur

$$W_c = \frac{1}{2}\mu dx\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2$$

  - Variation de l’énergie potentielle de tension par unité de longueur

$$W_p = T_0\delta\ell$$

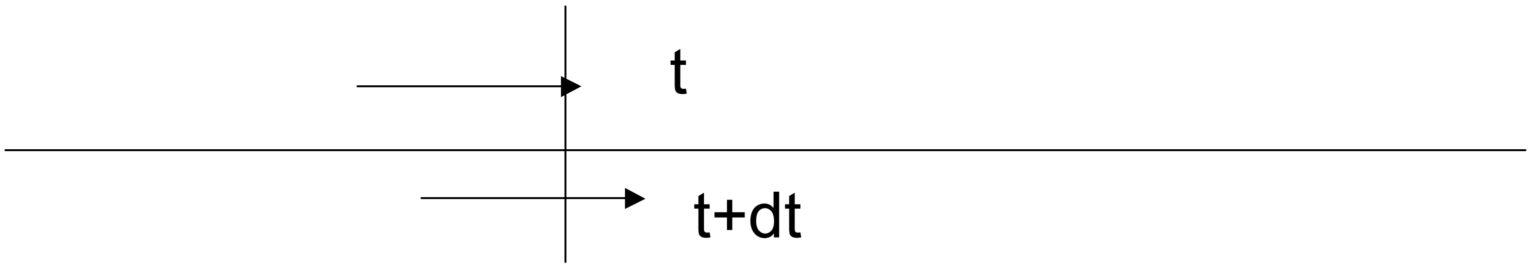
$$avec \quad \ell = dx$$

$$\left(\ell'\right)^2 = \left(dx\right)^2 + \left(dx\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 ; \delta\ell = \ell' - \ell = \frac{1}{2}\,dx\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$W_p = T_0\delta\ell = \frac{1}{2}\,T_0 dx\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

Energie et Flux d’énergie

- Pour une onde progressive $W_c=W_p$
- Le flux d’énergie est différent et c’est avec le flux que doivent se faire des raisonnements de conservation de l’énergie



$\Delta x = cdt$

$$\Phi_c = cW_c$$

$$\Phi_p = cW_p$$