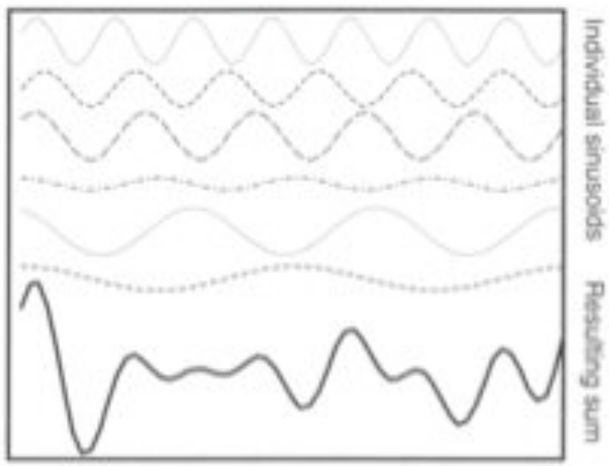
Ondes monochromatiques

- Les ondes progressives ne sont, en générale, pas périodiques, ni en temps ni en espace
- Idée importante en analyse d'onde:
  - Toute fonction périodique T peut se décomposer en une somme de fonction de période T/n (Série de Fourier)
  - En imaginant la période infinie, un signal non périodique peut donc se décomposer en une somme infini de signaux de toutes les périodes…



Notation complexe

- Solution particulière $v = A(x)\cos(\omega t)$
- Et la solution en sin ?
- Idée:
  - l'équation d'onde est linéaire
  - Prendre la partie réelle d'un nombre complexe est une opération linéaire
  - Deux opérations linéaires permutent
  - Si A complexe -> sin $v = A(x)\exp(j\omega t)$
  - Attention: ceci ne peut se faire que pour l'équation d'onde linéaire et pour les grandeurs linéaires…pas possible pour l'énergie….
  - Résolution de l'équation d'onde…

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

implique

$$-\omega^2 A = c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

d' où

$$A(x) = A_0 \exp(\pm jkx)$$

et

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2$$

On retrouve les ondes se propageant à droite et gauche
V= A e $^{j(\omega t\text{-}kx)}$ +B e $^{j(\omega t+kx)}$

Equation de dispersion:
Relie la fréquence spatiale à la fréquence temporelle
La première impose la seconde!

Rappel

T	Période (sec)
$\omega=2\pi/T$	Pulsation (s^{-1})
$f=1/T=\omega/(2\pi)$	Fréquence (Hz)
$k=\omega/c$	Vecteur d'onde (m^{-1})
$\lambda=cT=2\pi/k$	Longueur d'onde (m)
$1/\lambda$	Nombre d'onde (m^{-1})

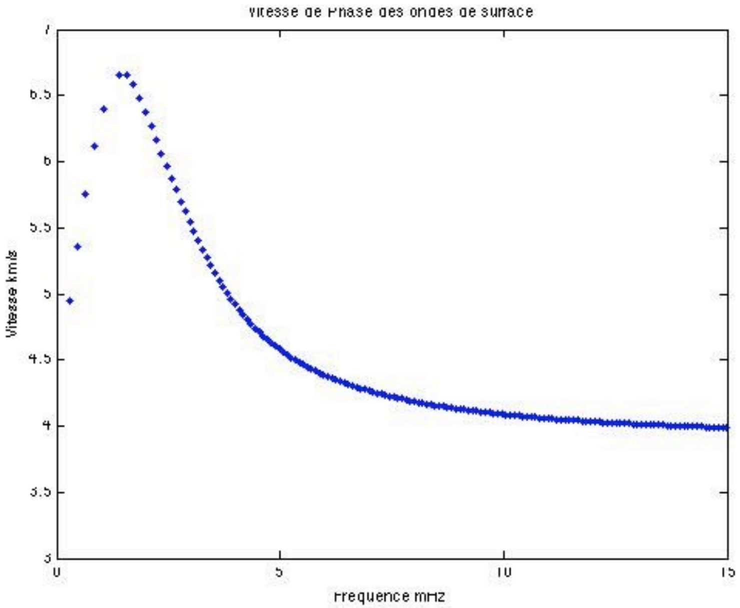
Vitesse de phase

- La vitesse c est donc la vitesse de phase de l'onde
- Vitesse de phase= vitesse de propagation d'un point ayant une phase constante

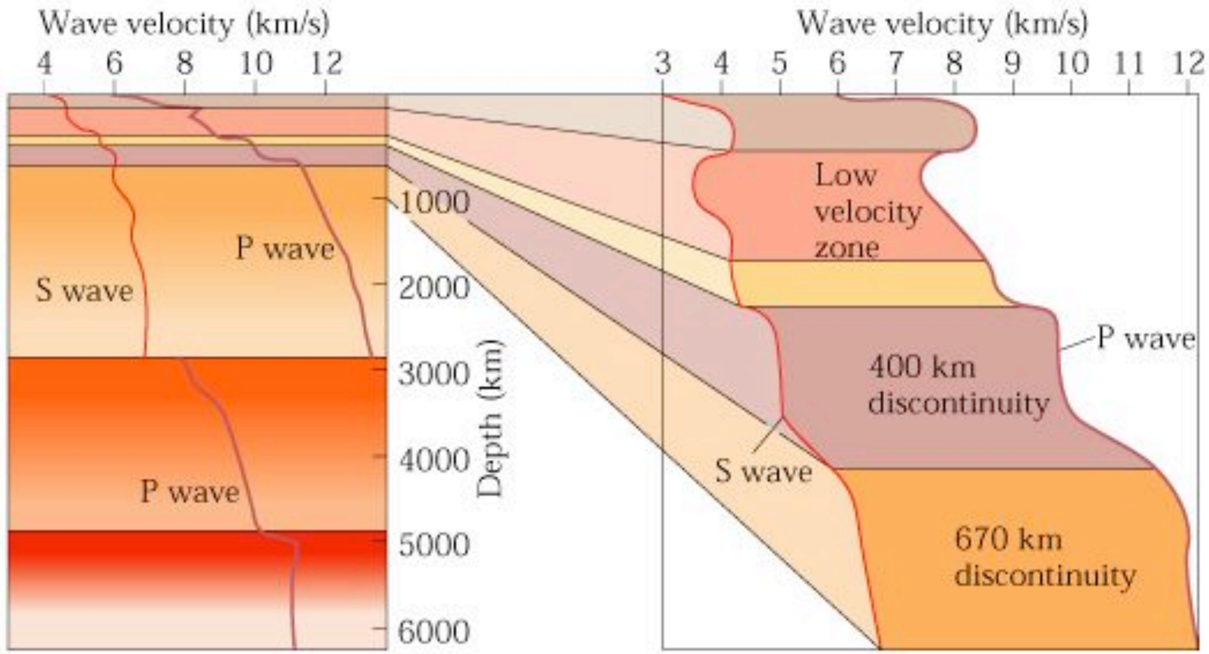
$$cte = \omega t - kx$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c$$

- La vitesse de phase n'est pas toujours une constante mais peut varier et dépendre de la fréquence
- La vitesse de phase peut être plus grande que la vitesse de propagation du milieu



Variation avec
la fréquence



Variation avec
la profondeur

Vitesse de groupe

- Un signal monochromatique n'a pas de début ou de fin
  - Ne permet pas d'envoyer de l'information
- Pour envoyer de l'information (ou de l'énergie), une superposition d'ondes monochromatiques est nécessaire comme par exemple
  - Paquet d'onde (signal de durée finie)
  - Signal A(t)<<1 en modulation d'amplitude

$$s(t) = (1 + A(t))\exp(j\omega t)$$

  - Signal en modulation de fréquence

$$A(t) = a\exp(j\delta\omega(t)t)$$

$$s(t) = A(t)\exp(j\omega t)$$

$$= a[1 + (1 - \exp(j\delta\omega(t)t))]\exp(j\omega t)$$

Propagation d’un paquet

- On considère un paquet d’onde autour d’une fréquence centrale ω_0

$$A(t) = \int_{\omega_-}^{\omega_+} d\omega \, a(\omega) \quad \exp(j\omega t)$$

- Sa propagation donne

$$s(x,t) = \int_{\omega_-}^{\omega_+} a(\omega) d\omega \exp(j(\omega \ t - k(\omega)x))$$

$$k(\omega \ ) = k(\omega_o) + (\omega - \omega_o) \left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_0$$

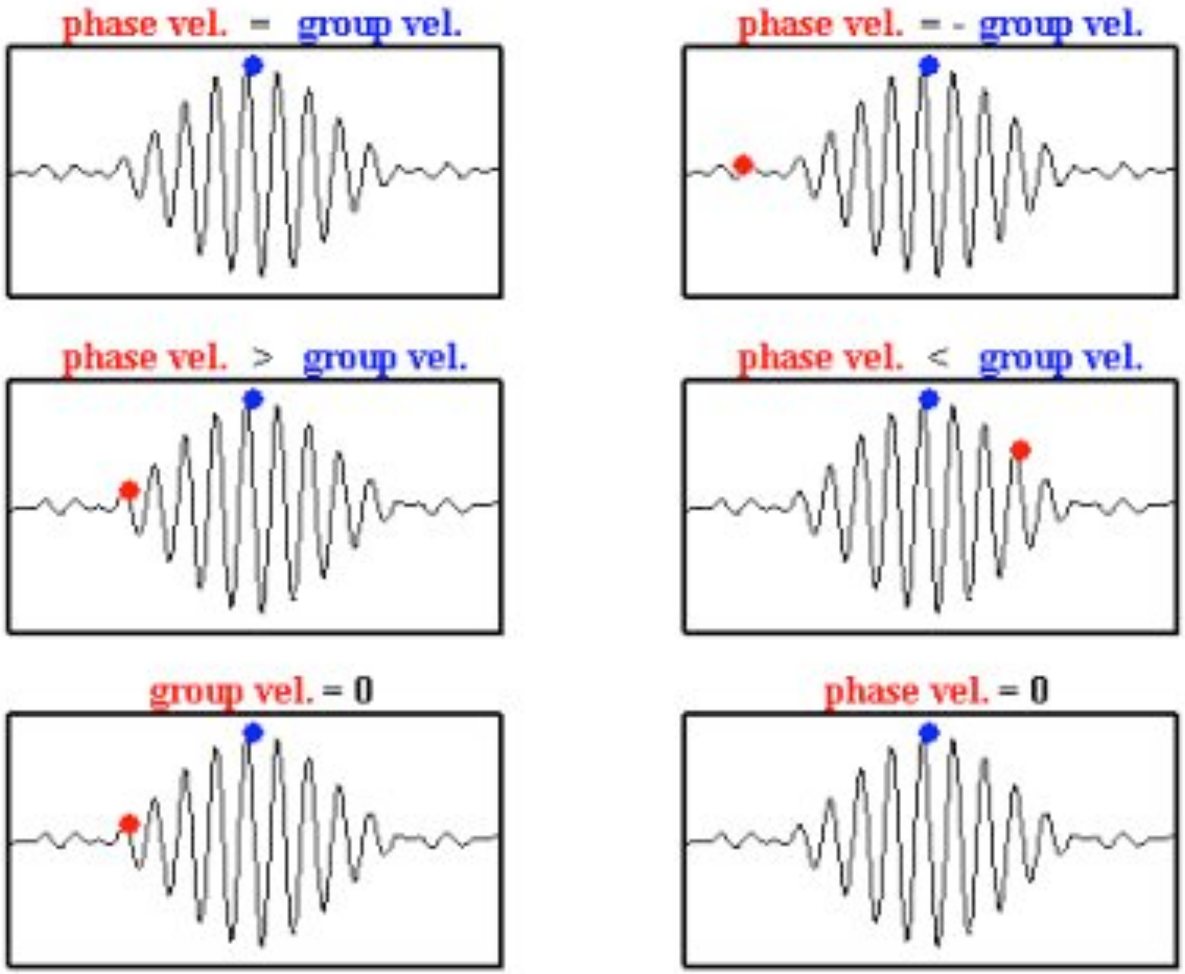
$$s(x,t) = \int_{\omega_-}^{\omega_+} a(\omega) d\omega \exp(j(\omega \ t - k(\omega)x)) = \exp(j(k(\omega_0) - \omega_o \left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_0)x) \int_{\omega_-}^{\omega_+} a(\omega) d\omega \exp(j\omega(t - \left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_0 x))$$

soit

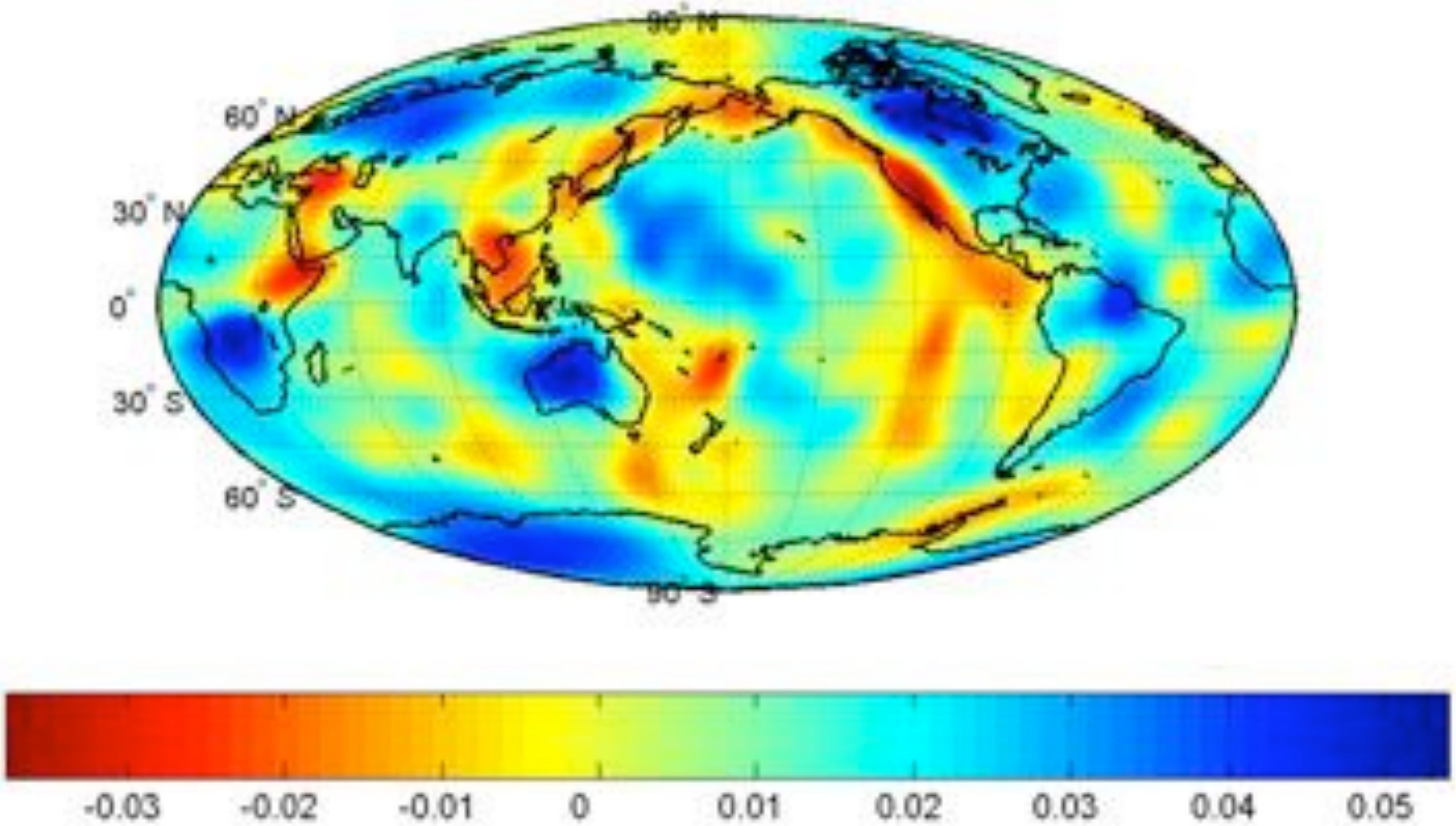
$$s(x,t) = A(t - \frac{x}{v_g}) \exp(j(k(\omega_0) - \omega_o \left.\frac{\partial k}{\partial x}\right|_0)x)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Vitesse de groupe


phase vel. = group vel.
phase vel. = - group vel.
phase vel. > group vel.
phase vel. < group vel.
group vel. = 0
phase vel. = 0

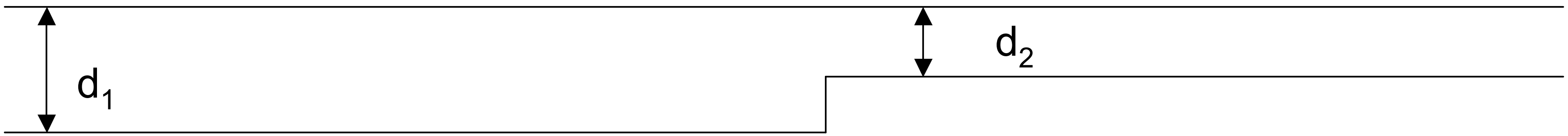
isvr



Variation de la vitesse de phase en pourcent à 80 secondes des ondes de surface

Réflexion et transmission

- On considère un tsunami arrivant près d'un plateau continental



$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

Équation
u déplacement horizontal
(primitive de v)
h hauteur

$$h = -d\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$d'\,où$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left[c^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$h, u \quad continus$$

Pour d'autres cas, nous aurons aussi une continuité:

-de F (corde) $F = T_0\,\frac{\partial u}{\partial x}$

-De p (tube) $p = -\kappa\,\frac{\partial u}{\partial x}$

- On considère une onde incidente , réfléchie et transmise

$$u_1 = A\exp(j(\omega t - k_1 x) + B\exp(j(\omega t + k_1 x)$$

$$u_2 = C\exp(j(\omega t - k_1 x)$$

$$h_1 = jk_1 d_1 (A\exp(j(\omega t - k_1 x) - B\exp(j(\omega t + k_1 x))$$

$$u_2 = jk_2 d_2 C\exp(j(\omega t - k_1 x)$$

- On applique la continuité du déplacement et de la seconde grandeur (h, F, p, suivant le cas)

$$A + B = C$$

$$jk_1 d_1 (A - B) = jk_2 d_2 C$$

D'où

$$\frac{C}{A} = \frac{2k_1 d_1}{k_1 d + k_2 d_2}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 d_1 - k_2 d_2}{k_1 d + k_2 d_2}$$

Quelques propriétés

$$t = \frac{C}{A} = \frac{2k_1d_1}{k_1d_1 + k_2d_2} = \frac{2\,{c_1}/{g}}{{c_1}/{g} + {c_2}/{g}}$$

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k_1d_1 - k_2d_2}{k_1d_1 + k_2d_2} = \frac{{c_1}/{g} - {c_2}/{g}}{{c_1}/{g} + {c_2}/{g}}$$

- Surface libre ($c_2 << c_1$, => t=2, r=1)
- Surface rigide ($c_2 >> c_1$, => t=0, r=-1)
- Pas de dépendance en fréquence… Pourquoi?
- Cas d'une corde ou d'un tuyau ($\frac{1}{g} \Rightarrow \rho \quad ou \quad \mu$)
  – Z = impédance = $\frac{c}{g} \Rightarrow \rho c \quad ou \quad \mu c$

$$t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Bilan énérgie

- Pour faire un bilan d'énergie, necessité d'utiliser les flux

$$\phi = \rho c A^2 = Z A^2$$

  – Energie entrante = énergie sortante

$$T = \frac{Z_2 t^2}{Z_1} = \frac{Z_2}{Z_1}\left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

$$R = \frac{Z_1}{Z_1}\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

$$1 = R + T$$

Ondes stationnaires

- Ondes dans une cavité
- Les réflexions multiplent forment des ondes qui en générale, vont avoir des amplitudes n’ayant pas la même phase que les autres ondes
- Solution stationnaire n’est non nulle que si les interférence sont constructives

Corde de piano

- Deux conditions aux limites rigide
- Longueur L
- Une solution sous la forme d’une superposition d’ondes se propageant dans les deux directions

$$u(x,t) = A\exp(j(\omega t - kx)) + B\exp(j(\omega t + kx))$$

$$conditions \quad aux \quad \lim ites$$

$$u(0,t) = A + B$$

$$u(L,t) = A\exp(-jkL) + B\exp(jkL) = 0$$

$$d'où$$

$$\sin(kL) = 0$$

Et $k = \dfrac{\omega}{c}$

Solution

- Quantification des solutions
  - Modes ou oscillations propres
  - Solution identique pour tout objet fini
  - Analogie avec mécanique quantique

$$kL = n\pi$$

$$d'où$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

et

$$u_n(x,t) = A\exp(j\omega t)\sin(n\pi\frac{x}{L})$$

Si ω_n est solution,- ω_n est aussi solution

Autres propriétés

- Considérons deux solutions

$$-\omega_1^2 u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, -\omega_2^2 u_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

- L'énergie cinétique stockée est $\int_0^L \mu dx u^2$ et définit une norme (toujours positive)

- Soit le produit scalaire $< u_1 \mid u_2 >= \int_0^L \mu dx u_1 u_2$

  - on montre que deux solutions sont orthogonales en raison des conditions aux limites

  - les modes forment une base des solutions

Sommation de modes

- Toute solution peut s'écrire sous la forme d'une somme des modes

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x)(A_n \exp(j\omega_n t) + B_n \exp(-j\omega_n t))$$

- Les coefficients s'obtiennent en projetant les conditions initiales (ou la source) sur les fonctions de base

$$< u_0 \mid u_n >=< u_n \mid u_n > (A_n + B_n)$$

$$< v_0 \mid u_n >= j\omega_n < u_n \mid u_n > (A_n - B_n)$$

$$A_n = \frac{< u_0 \mid u_n > + {< v_0 \mid u_n >}/{j\omega_n}}{2 < u_n \mid u_n >}$$

$$B_n = \frac{< u_0 \mid u_n > - {< v_0 \mid u_n >}/{j\omega_n}}{2 < u_n \mid u_n >}$$

u_0 ~déplacement initial

v_0 ~vitesse initialle

Solution finale

- On normalise les modes propres

$$u_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin(n\pi\,\frac{x}{L})$$

D'où

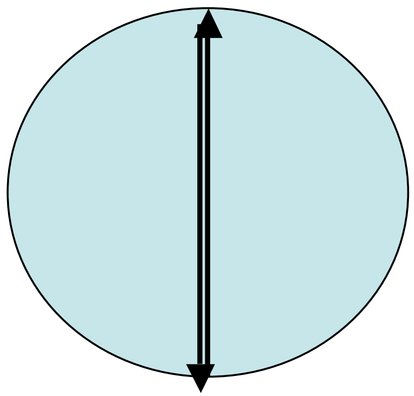
$$u(x,t) = \sum_n u_n(x)(< u_0 \mid u_n > \cos(\omega_n t) + \frac{< u_0 \mid u_n >}{\omega_n}\sin(\omega_n t))$$

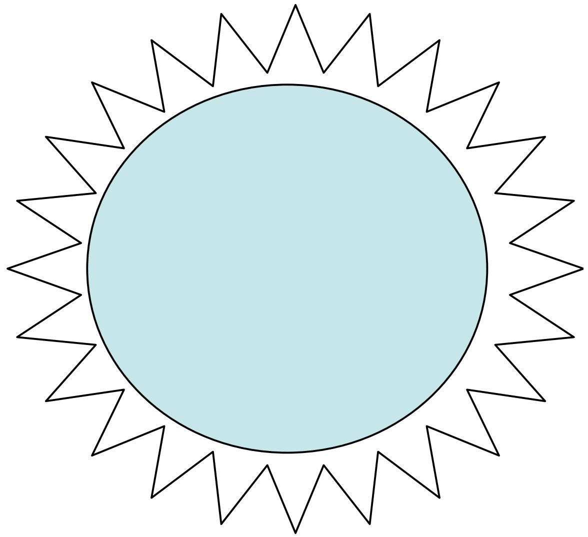
Autre Exemple à 1 dimension

- Les modes propres sont pour la plupart associés à des ondes de surface ou des ondes de volumes
- Pour être crées, une interférence constructive doit se faire après un tour de Terre

$$2\pi r = ncT$$

$$f = \frac{1}{T} = n\frac{c}{2\pi r}$$

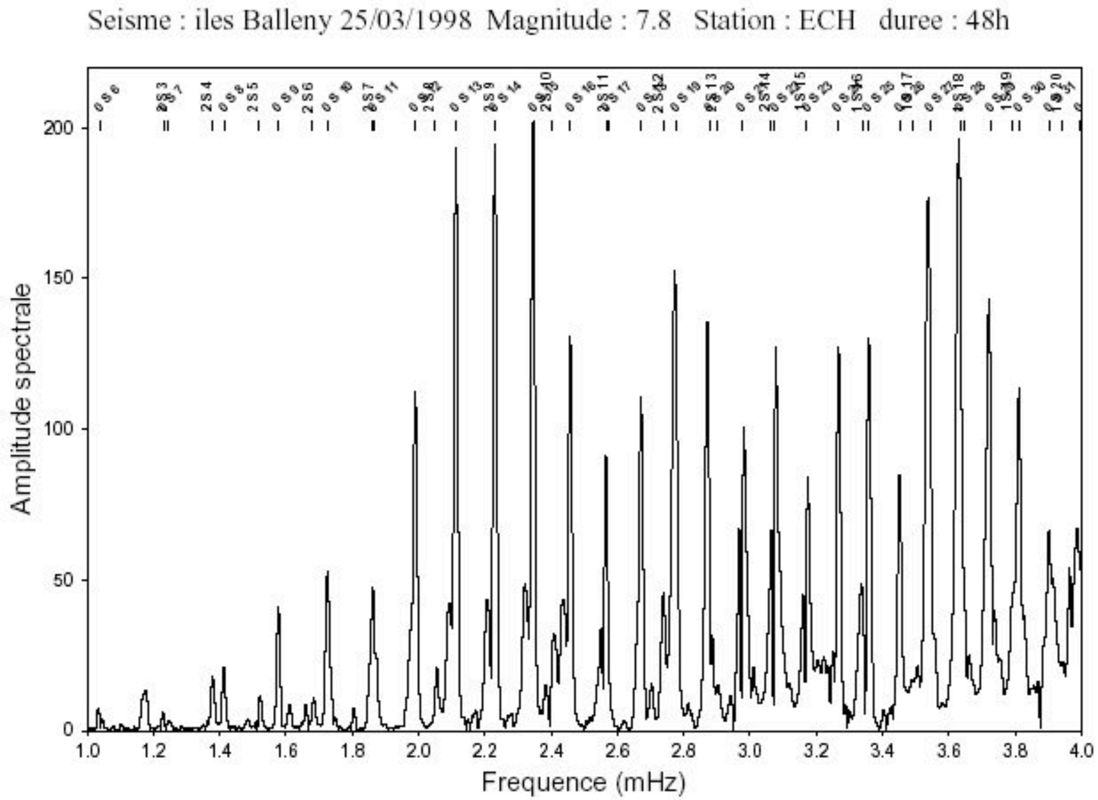




- Pour c= 4km/s, on trouve f = n*0.1 mHz

Sismologie de la Terre: modes propres

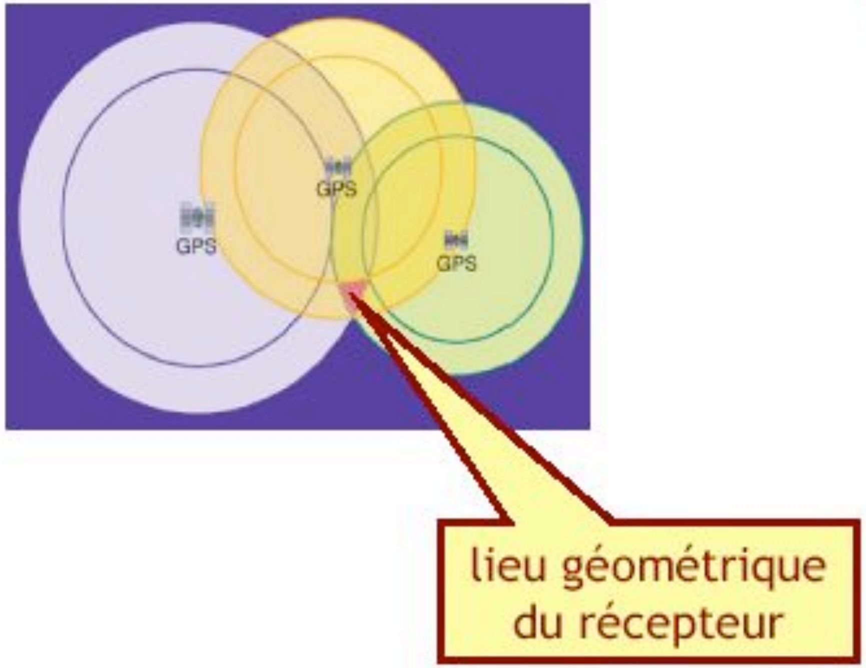
- Lors des grands séismes, la Terre résonne comme une cloche
- Typiquement, il faut des séismes de magnitude supérieure à 7



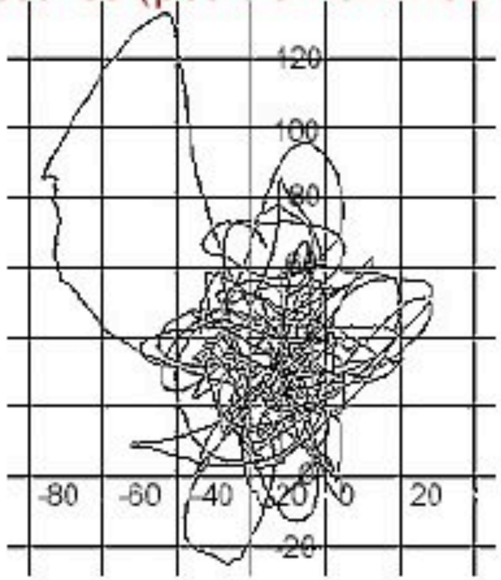
Dispersion et positionnement GPS

Quelle précision ?

- De nombreux facteurs peuvent affecter la précision de la position. Cette dernière fluctue au cours du temps.
- Pour un récepteur à usage civil, et dans de bonnes conditions, l’erreur est de l’ordre de 5 m en position horizontale, et 10 m en vertical



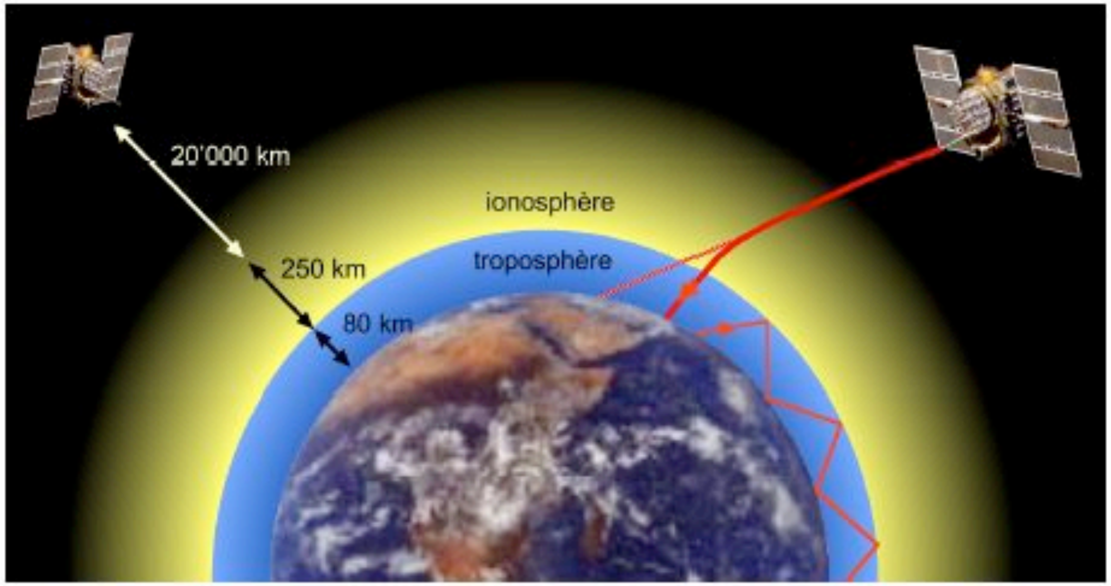
Dérive de la position au cours de 5h de mesures (position en mètres)



Sources d'erreur

Les sources d'erreur sont multiples.

source d'erreur	*erreur typique*
ionosphère perturbée	4 m
troposphère	0.7 m
réflexions parasites	1.4 m
horloge et précision des satellites	3.0 m
bruit du récepteur	0.5 m
erreur globale	*~ 5.5 m*



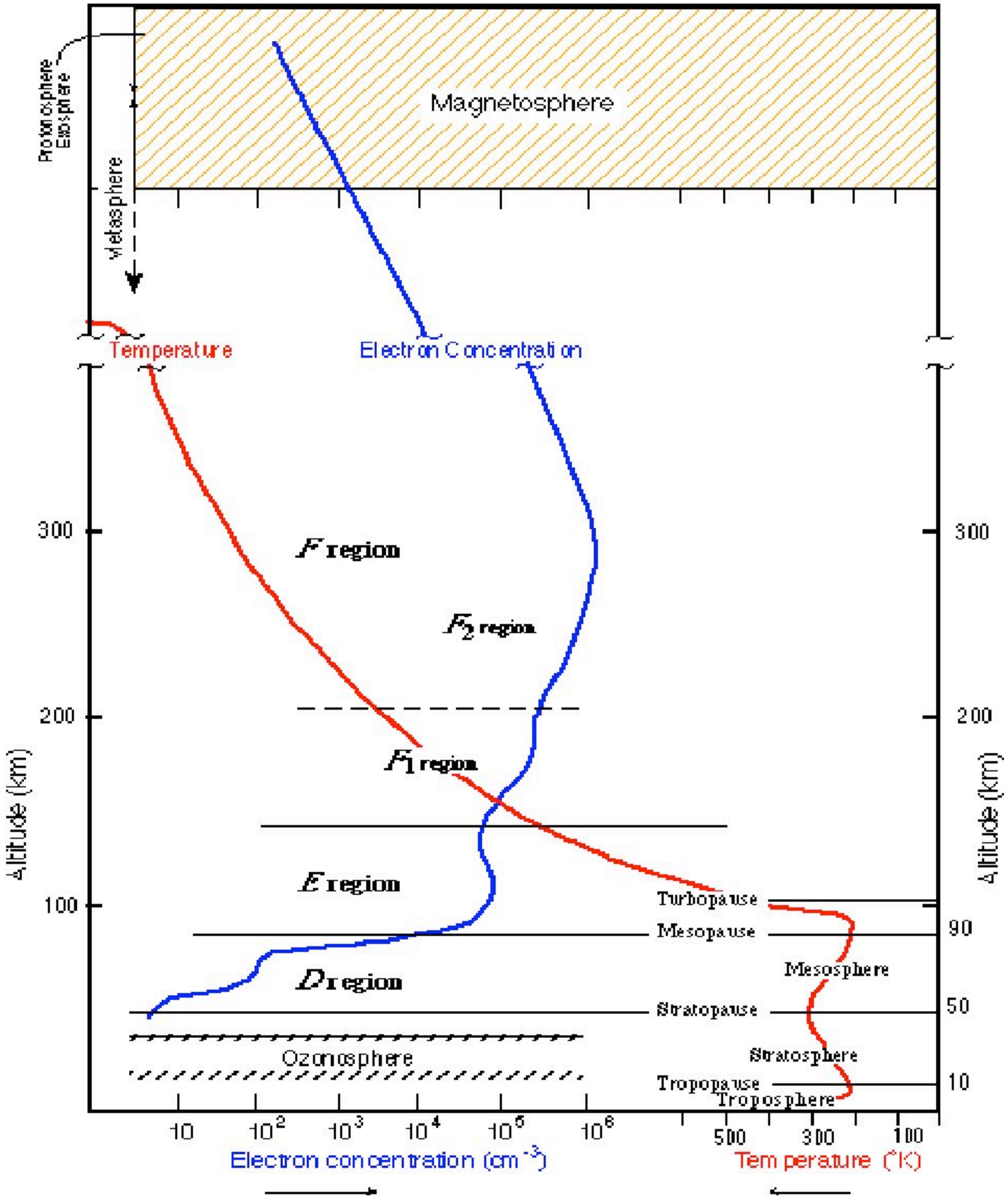
Propagation dans le plasma

- Propagation dans un plasma
- Masse des électrons << Masse des ions

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0.$$

ω_p est la fréquence plasma, définie par :

$$\omega_p = \left(\frac{N_e e^2}{m_e \epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}},$$



Magnetosphere
Protonosphere
Exosphere
Metasphere
Temperature
Electron Concentration
F region
F_2 region
F_1 region
E region
D region
Ozonosphere
Turbopause
Mesopause
Mesosphere
Stratopause
Stratosphere
Tropopause
Troposphere
Altitude (km)
300
200
100
90
50
10
10
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
500
300
100
Electron concentration (cm^{-3})
Temperature (°K)