COURS 4

Introduction rapide sur les Harmoniques Sphériques

1 Résolution de l' équation de Laplace en coordonnées sphériques
2 Remarques sur les polynômes de Legendre
  2.1 Fonctions et normes
  2.2 Quelques relations de récurrence
3 Representation de quelques harmoniques sphériques
4 Vecteurs sphériques

1 Introduction rapide sur les Harmoniques Sphériques

Pour l'étude des champs gravitationnel et magnétique on est amené à résoudre l'équation de Laplace $\Delta V = 0$. Les solutions de cette équation sont des fonctions sphériques appelées harmoniques sphériques globales. On introduit sur la surface de la sphère, une base de fonctions sphériques sur laquelle on peurra décomposer judicieusement tout champ scalaire.

1.1 Résolution de l' équation de Laplace en coordonnées sphériques

Soit à résoudre, l'équation $\Delta V = 0$ qui s'écrit en coordonnées sphériques:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{1}$$

On cherche une solution de cette équation par séparation de variable: $V(r,\theta,\varphi) = f(r)F(\theta,\varphi)$ où $F(\theta,\varphi)$ est une fonction dépendant de θ et φ.
En substituant dans (1) on obtient:

$$\frac{F}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right) + \frac{f}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{f}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} = 0$$

D'où

$$\frac{1}{f}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right) = -\frac{1}{F\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{F\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}$$

Le membre de droite ne dépend que de (θ,φ) et le membre de gauche de r : chaque membre doit être constant. D'où le système:

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right) = cste\ \ f \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} = -cste\ \ F \end{cases} \tag{2}$$

La première équation de ce système s'écrit:

$$r^2\frac{d^2 f}{dr^2} + 2r\frac{df}{dr} = cste\ \ f$$

Posons $cste = \alpha(\alpha+1)$.
La solution est de la forme:

$$f = Cr^\alpha + \frac{D}{r^{\alpha+1}} \tag{3}$$

La deuxième équation du sytème (2) s'écrit:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}=-\alpha(\alpha+1)F \tag{4}$$

On introduit parfois un opérateur noté $\mathscr{L}^2=-\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big]$ qui est un opérateur hermitien dans l' espace des fonctions sphériques. ($\mathscr{L}^2$ *est l'opérateur moment cinétique de la mécanique quantique*).
(4) est une équation aux valeurs propres: $\mathscr{L}^2(F)=\alpha(\alpha+1)F$ où F est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha(\alpha+1)$.
Cherchons des solutions de $\mathscr{L}^2$ par séparation des variables: $F(\theta,\varphi)=A(\theta)B(\varphi)$.

$$B(\varphi)\Big[\frac{d^2A}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dA}{d\theta}\Big]+\frac{A(\theta)}{\sin^2(\theta)}\frac{d^2B}{d\varphi^2}=-\alpha(\alpha+1)A(\theta)B(\varphi)$$

ou encore:

$$\frac{\sin^2\theta}{A}\Big[\frac{d^2A}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dA}{d\theta}\Big]+\alpha(\alpha+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{B}\frac{d^2B}{d\varphi^2}=m^2$$

D'où le système

$$\begin{cases}\frac{\sin^2\theta}{A}\left[\frac{d^2A}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dA}{d\theta}\right]+\alpha(\alpha+1)\sin^2\theta-m^2=0\\ \frac{d^2B}{d\varphi^2}+m^2B=0\end{cases} \tag{5}$$

La solution de la deuxième équation de (5) est:

$$B(\varphi)=B_1\cos m\varphi+B_2\sin m\varphi \tag{6}$$

La première équation de (5) peut s' écrire:

$$\sin^2\theta\frac{d^2A}{d\theta^2}+\cos\theta\sin\theta\frac{dA}{d\theta}+[\alpha(\alpha+1)\sin^2\theta-m^2]A=0 \tag{7}$$

Posons $u=\cos\theta$; $\quad \frac{dA}{d\theta}=-\frac{dA}{du}\sin\theta$; $\quad \frac{d^2A}{d\theta^2}=-\cos\theta\frac{dA}{du}+\sin^2\theta\frac{d^2A}{du^2}$.
L' équation de (7) devient:

$$\frac{d}{du}\Big[(1-u^2)\frac{dA}{du}\Big]+\Big[\alpha(\alpha+1)-\frac{m^2}{1-u^2}\Big]A=0 \tag{8}$$

Pour α non entier, on obtient des solutions qui tendent vers l'infini quand $u\to-1$. Les seules solutions physiquement admissibles sont donc celles pour lesquelles $\alpha = n \in \mathbb{N}$. Cette équation différentielle a pour solutions les polynômes de Legendre associés définis par, avec $|m| \leq n$:

$$P_n^m(u) = \frac{1}{2^n n!}(1-u^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{du^{n+m}}\Big(u^2-1\Big)^n \tag{9}$$

P_n^m et P_n^{-m} sont 2 fonctions propres correspondant à la même valeur propre $n(n+1)$, mais en réalité, ils sont proportionnels. On a en effet la relation:

$$P_n^{-m}(u) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(u)$$

Posons

$$Y_n^{mc}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi; \quad \text{et} \quad Y_n^{ms}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

Les Y_n^{mc} et Y_n^{ms} sont les fonctions propres de $\mathscr{L}^2$ associés à la valeur propre $n(n+1)$. Pour n fixé, il y a $(2n+1)$ fonctions Y_n^{mc} $[Y_n^{ms}]$.

En combinant (3), (6) et (9), on obtient une solution générale de l' équation de Laplace en coordonnées sphériques:

$$V(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(Cr^n + \frac{D}{r^{n+1}}\Big)\sum_{m=0}^{n}\Big(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin\varphi\Big)\ \ P_n^m(\cos\theta) \tag{10}$$

1.2 Remarques sur les polynômes de Legendre

1.2.1 Fonctions et normes

n, m	$P_n^m(x)$	$P_n^m(\cos\theta)$	$\|P_n^m(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$
$0,0$	1	1	2
$1,0$	x	$\cos\theta$	$\frac{2}{3}$
$1,1$	$-\sqrt{1-x^2}$	$-\sin\theta$	$\frac{4}{3}$
$2,0$	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$	$\frac{2}{5}$
$2,1$	$-3\sqrt{1-x^2}x$	$-3\sin\theta\cos\theta$	$\frac{12}{5}$
$2,2$	$3(1-x^2)$	$3\sin^2\theta$	$\frac{48}{5}$
$3,0$	$\frac{x}{2}(5x^2-3)$	$\frac{\cos\theta}{2}(5\cos^2\theta-3)$	$\frac{2}{7}$
$3,1$	$-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}(5x^2-1)$	$-\frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta-1)$	$\frac{24}{7}$
$3,2$	$15(1-x^2)x$	$15\sin^2\theta\cos\theta$	$\frac{240}{7}$
$3,3$	$-15(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$	$-15\sin^3\theta$	$\frac{1440}{7}$
$4,0$	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$	$\frac{1}{8}(35\cos^4\theta-30\cos^2\theta+3)$	$\frac{2}{9}$
$4,1$	$-\frac{5}{2}\sqrt{1-x^2}x(7x^2-3)$	$-\frac{5}{2}\sin\theta\cos\theta(7\cos^2\theta-3)$	$\frac{40}{9}$
$4,2$	$\frac{15}{2}(1-x^2)(7x^2-1)$	$\frac{15}{2}\sin^2\theta(7\cos^2\theta-1)$	80
$4,3$	$-105(1-x^2)^{\frac{3}{2}}x$	$-105\sin^3\theta\cos\theta$	1120
$4,4$	$105(1-x^2)^2$	$\sin^4\theta$	8960

L'espace des fonctions sphériques est muni du produit hermitique :

$$< F, G >= \int\int F\overline{G}\sin\theta d\theta d\varphi$$

On a la relation suivante:

$$\int_0^\pi (P_n^m)^2 \sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Posons

$$Y_n^{mc}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi; \quad \text{et} \quad Y_n^{ms}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

Les Y_n^{mc} $[Y_n^{ms}]$ sont orthogonaux mais non normés. On a:
$< Y_n^{mc}, Y_k^{lc} >= 0$ pour $n \neq k$ and $m \neq l$.

$$\|Y_n^{mc}\|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi [P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi]^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Sur le tableau précédent, on peut noter que la norme des polynômes de Legendre augmente avec le degré n. C'est pour cela qu'en géophysique on travaille souvent avec des harmoniques sphériques dites "normalisées", afin d'éviter d'avoir des coefficients d'amplitude très petite multipliés par un polynôme d'amplitude très grande.
On peut définir, par exemple:

$$\tilde{Y}_n^{mc} = \sqrt{(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\ Y_n^{mc} \qquad \text{avec} \quad \|\tilde{Y}_n^{mc}\|^2 = 4\pi$$

1.2.2 Quelques relations

Il existe des relations de récurrence sur les polynômes de Legendre. Ces relations sont très utiles lorsque l'on fait des calculs avec des polynômes de Legendre car elles nous permettent d'ordonner les séries suivant un degré n ou un ordre m.

- $\dfrac{dP_n^m}{d\theta} = \dfrac{1}{2}\Big[(n-m+1)(n+m)\ P_n^{m-1} - P_n^{m+1}\Big]$; $\qquad$ et $\quad \dfrac{dP_n^0}{d\theta} = -P_n^1$
- $\cos\theta\ P_n^m = \dfrac{1}{2n+1}\Big[(n-m+1)\ P_{n+1}^m + (n+m)\ P_{n-1}^m\Big]$
- $\sin\theta\ P_n^m = \dfrac{1}{2n+1}\Big[P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m+1}\Big]$

- $\sin\theta \;\; P_n^m = \dfrac{1}{2n+1}\Big[(n+m-1)(n+m) \;\; P_{n-1}^{m-1} - (n-m+1)(n-m+$
$2) \;\; P_{n+1}^{m-1}\Big]$

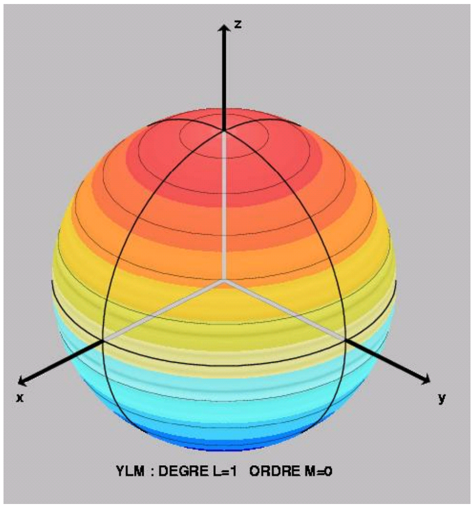
- $$\begin{aligned} \sin\theta \;\; P_n^{m+1} &= \Big[(n+m+1)\cos\theta \;\; P_n^m - (n-m+1) \;\; P_{n+1}^m\Big] \\ &= \Big[(n+m) \;\; P_{n-1}^m - (n-m)\cos\theta \;\; P_n^m\Big] \end{aligned}$$

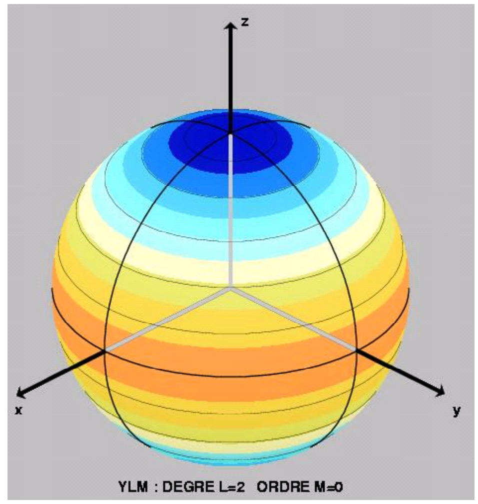
- $P_n^{m+2} - 2(m+1)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \;\; P_n^{m+1} + (n-m)(n+m+1) \;\; P_n^m = 0$

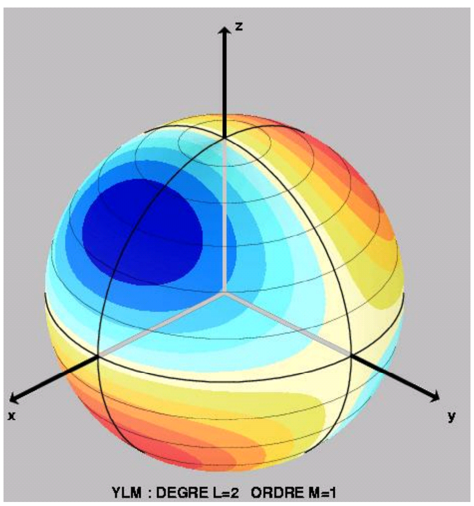
- $$\begin{aligned} (1-x^2) \;\; \frac{dP_n^m}{dx} &= (n+1)x \;\; P_n^m - (n-m+1) \;\; P_{n+1}^m \\ &= (n+m) \;\; P_{n-1}^m - nx \;\; P_n^m \\ &= \frac{1}{2n+1}\Big[(n+1)(n+m) \;\; P_{n-1}^m - n(n-m+1) \;\; P_{n+1}^m\Big] \end{aligned}$$

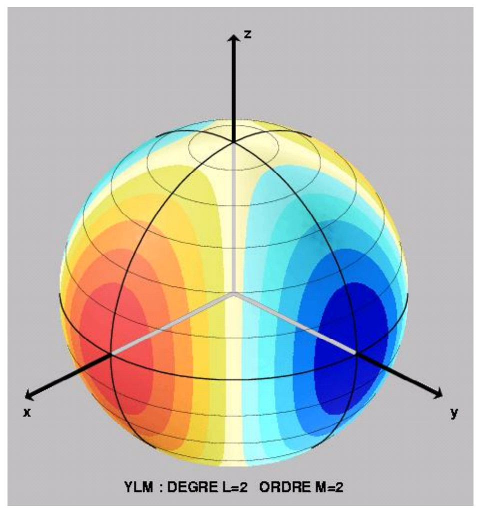
- $\dfrac{P_n^m}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{2m}\Big[P_{n-1}^{m+1} + (n+m)(n+m-1) \;\; P_{n-1}^{m-1}\Big]$

1.3 Representation de quelques harmoniques sphériques

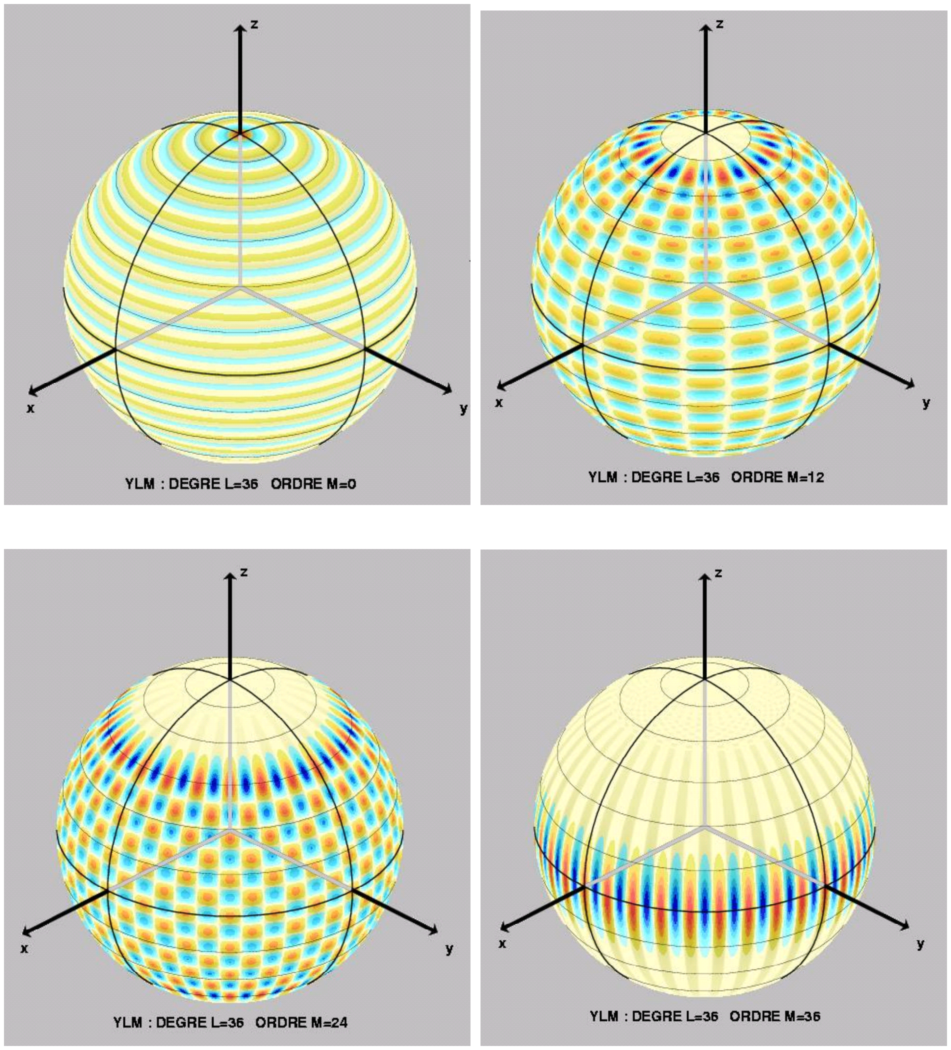








from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*



from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*

1.4 Vecteurs sphériques

De même qu' à la surface de la sphère, il est utile de décomposer un champ scalaire sur la base des harmoniques sphériques Y_n^{mc}, Y_n^{ms}, un champ de vecteur peut être décomposé sur une base de vecteurs liés à ces harmoniques sphériques:

$$\vec{u}(r,\theta,\varphi) = \sum_n \sum_m f_n^m Y_n^m(\theta,\varphi)\frac{\vec{r}}{r} + s_n^m \overrightarrow{S_n^m} + \tau_n^m \overrightarrow{T_n^m}$$

avec

$$\overrightarrow{S_n^m} = r\vec{\nabla} Y_n^m(\theta,\varphi); \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{T_n^m} = \vec{\nabla} \wedge \vec{r} Y_n^m(\theta,\varphi) \tag{11}$$

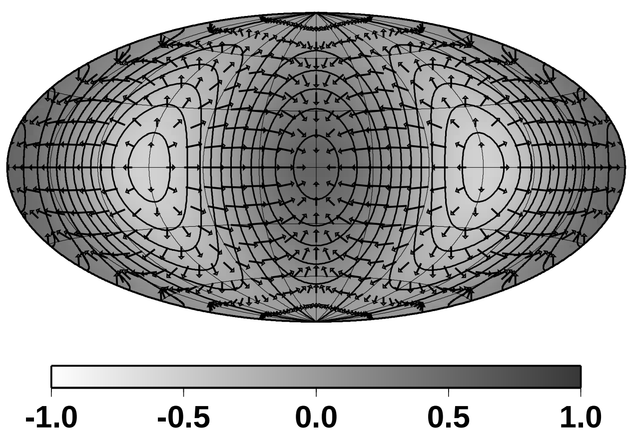
$\overrightarrow{S_n^m}$ et $\overrightarrow{T_n^m}$ sont tangents à la sphère.
$\overrightarrow{S_n^m}$ est un vecteur irrotationnel dit poloïdal. $\overrightarrow{T_n^m}$ est un vecteur indivergentiel dit toroïdal.

Le vecteur poloidal est perpendiculaire au courbes de niveau de l'harmonique alors que le vecteur toroidal est tangent aux lignes de champ (cf cyclone-anticyclone).

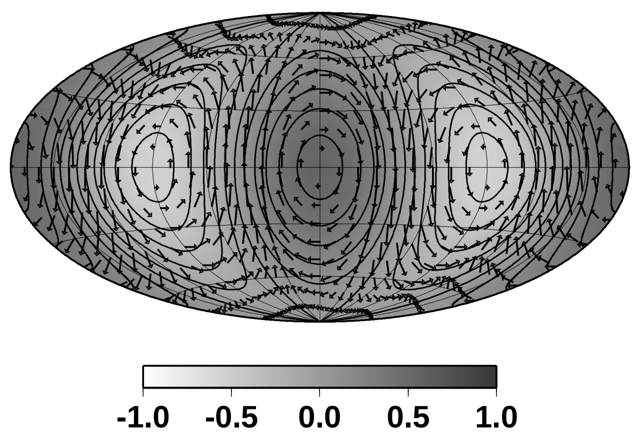
Exemple: soit $Y_2^{2c} = 3\sin^2\theta\cos 2\varphi$.
On a alors

$$\overrightarrow{S_2^{2c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sin 2\theta\cos 2\varphi \\ -6\sin\theta\sin 2\varphi \end{pmatrix} ; \qquad \overrightarrow{T_2^{2c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\sin\theta\sin 2\varphi \\ 3\sin 2\theta\cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

On note $N_2^2 = \|Y_2^{2c}\| = \sqrt{\frac{48\pi}{5}}$.
On a tracé sur la figure de gauche $\frac{1}{N_2^2}Y_2^{2c}$ et $\frac{1}{N_2^2}\overrightarrow{S_2^{2c}}$ et sur la figure de droite $\frac{1}{N_2^2}Y_2^{2c}$ et $\frac{1}{N_2^2}\overrightarrow{T_2^{2c}}$.



Vecteur poloidal de degre 2 et ordre 2



Vecteur toroidal de degre 2 et ordre 2