

SISMOLOGIE

Du bon usage des données sismiques

Jean-Paul Montagner, Professeur Université Paris VII

Laboratoire de Sismologie, Institut de Physique du Globe, 4, Place Jussieu, 75252, PARIS, France.

Plan provisoire (26 septembre 2007).

Introduction

D'énormes progrès ont été réalisés en Sismologie au cours des 20 dernières années.

Une véritable révolution due à l'émergence de la Sismologie Large-bande s'est produite. Avant, il y avait deux disciplines disjointes, la sismologie courte période (périodes inférieures à 1seconde) et la sismologie longue-période (période supérieure à 20secondes). Cette dichotomie a disparu avec l'installation des réseaux large-bande, numérique à grande dynamique tels que les réseaux GEOSCOPE, puis IRIS, GeoFon,...

But de ce cours: Etudier et comprendre la structure profonde de la Terre. De la surface jusqu'à son coeur, la graine. Ce cours montre comment on arrive à obtenir des images des paramètres physiques de la Terre.

La sismologie est une discipline expérimentale: Outil expérimental: Sismogrammes large bande.

Cela nous amènera également à la modélisation des sources sismiques, structure et mode d'excitation étant étroitement liés dans les sismogrammes.

Premières remarques:

- observations dont on dispose, sont bidimensionnelles, instantanées à un temps t_0 ...

Problèmes à démêler:

- trouver la structure interne qui expliquent les observations de surface. Pour remonter dans le temps, il est nécessaire d'utiliser d'autres informations (paléosciences pour définir une chronologie) pour retrouver l'évolution de la planète Terre.

Différents champs accessibles:

\vec{g} champ de gravité, \vec{B} champ magnétique, champs d'ondes élastiques émis par les tremblements de Terre.

Les champs d'ondes élastiques sont enregistrés sur des sismomètres (exemple du réseau GEOSCOPE) et fournissent un éclairage très varié des différentes parties de la Terre. On se propose de montrer quels outils les simologues ont été amenés à développer pour expliquer les sismogrammes observés, sous quelles hypothèses (isotropie, anisotropie, anélasticité...), quelles informations ils fournissent sur:

- La géodynamique globale (tectonique des plaques, convection mantellique), surrection des montagnes, slabs, panaches mantelliques.
- Composition minéralogique de la Terre (manteau principalement).
- Tremblements de terre (processus de rupture): cette partie est traitée dans un autre cours.

On montrera comment des ponts peuvent être établis entre différents domaines de la Géophysique. On s'attachera donc à montrer l'apport de la sismologie à la connaissance géophysique en s'appuyant sur l'utilisation intensive des données qui permettent d'obtenir des images de l'intérieur de la Terre.

1 Théorie de l'élasticité.

On supposera que les notions générales de Sismologie sont connues, c'est-à-dire que le lecteur est familier des notions de contraintes, de déformations, des solutions de l'équation de l'élasto-dynamique.

1.1 Tenseur des déformations

Hypothèse: Déformations infinitésimales.

Considérons le cas d'un solide C devenant C' après déformation. $M(x_i) \rightarrow M'(x'_i)$

$N(x_i + dl_i) \rightarrow N'(x'_i + dl'_i)$

Le point M a subi un déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{M})$ tel que

$$\mathbf{MM}' = \mathbf{MN} + \mathbf{NN}' + \mathbf{N}'\mathbf{M}'$$

On peut exprimer $\mathbf{dl}' = \mathbf{M}'\mathbf{N}'$ en fonction de $\mathbf{dl} = \mathbf{MN}$

$$\mathbf{dl}' = \mathbf{dl} + \mathbf{u}(\mathbf{N}) - \mathbf{u}(\mathbf{M})$$

On peut faire le développement limité pour chaque composante:

$$u_i(N) - u_i(M) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

Il est usuel de séparer les parties symétriques et anti symétriques de $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ sous la forme:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Le premier terme correspond au tenseur des déformations $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ et le deuxième au tenseur de rotation \mathbf{A} tel que $A_{ij} = -A_{ji}$. On peut alors écrire:

$$dl'_i = dl_i + \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} dx_j + \sum_{j=1}^3 A_{ij} dx_j$$

Les différents termes de la matrice \mathbf{A} sont les composantes du vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \wedge \mathbf{u}$

$$\mathbf{dl}' = \mathbf{dl} + \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

les deux termes ont un sens physique: le premier correspond à la déformation et le deuxième aux rotations. Si on calcule la norme de \mathbf{dl}' qui va exprimer la deformation interne, on montre que:

$$\| \mathbf{dl}' \|^2 = \| \mathbf{dl} \|^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} dx_i dx_j + \text{termes du 2eme ordre}$$

Donc les composantes ϵ_{ij} sont suffisantes pour décrire la déformation au premier ordre. En effet, comme les rotations ne modifient pas les distances, elles n'impliquent pas de forces internes.

1.2 Tenseur des contraintes- Conditions de continuité

Considérons un petit élément de surface dS située sur une interface entre 2 milieux, soumis à une force de traction \mathbf{T} .

$$\delta\mathbf{F} = \mathbf{T}dS.$$

σ_{ij} , i indice exprimant la face caractérisée par Ox_i sur laquelle s'applique la contrainte; j indique la direction de la contrainte (selon Ox_j).

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}_1) = -\mathbf{T}(-\mathbf{n}_1)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

Conditions de continuité:

Elles sont de deux types: celles relatives au déplacement et celles relatives à la contrainte. D'autre part, elles dépendent de la nature de l'interface. On suppose que la normale à l'interface est dirigée selon Oz .

- a) Solide (+) - Solide (-) ou Solide (+) - Fluide Visqueux (-)

Les 3 composantes du déplacement sont continues: $u_i^+ = u_i^-$

Les 3 composantes de la contrainte σ_{zi} sont continues: $\sigma_{zi}^+ = \sigma_{zi}^-$

Pour un fluide élasto-visqueux, la notion de temps intervient. Si le fluide est très visqueux, la réponse élastique sera prédominante, et les conditions précédentes seront valables. Si le fluide est peu visqueux (\implies temps de relaxation court) alors le couplage au niveau de l'interface sera imparfait et on sera dans le cas suivant b).

- b) Solide (+)- Fluide parfait (-)

$u_z^+ = u_z^-$ (les composantes tangentielles peuvent être discontinues).

$\sigma_{zz}^+ = \sigma_{zz}^-$, $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$.

- c) Solide (+) - Vide (-): surface libre

u_i^+ non spécifié.

$\sigma_{zi}^+ = 0$

- d) Fluide (+) - Vide (-)

Identique au cas c)

1.3 Lois rhéologiques.

Milieu élastique:

Loi de Hooke généralisée:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

\mathbf{C} tenseur des modules élastiques. Ce tenseur de 81 éléments n'a en fait que 21 éléments indépendants du fait des symétries:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

Cette dernière condition de symétrie provenant des propriétés du terme d'énergie élastique.

2 Propagation des ondes dans un solide.

2.1 Equations de l'élasto-dynamique

Navier - Stokes.

$$\rho_0 \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \sum_j \sigma_{ij,j} + f_i \quad (1)$$

ρ est la densité, \mathbf{u} est le déplacement, σ_{ij} est la composante ij du tenseur des contraintes et f_i la composante selon Ox_i de l'ensemble des forces \mathbf{f} volumiques extérieures appliquées. C'est un équation très générale, qui peut être appliquée à toutes sortes de problèmes géophysiques. Pour résoudre cette équation, tout dépend des lois (appelées lois de comportement ou rhéologiques) que l'on utilise pour relier le déplacement \mathbf{u} et le tenseur des contraintes σ .

On fait maintenant l'hypothèse que le milieu est élastique. Il existe donc une relation linéaire entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations ϵ . La convention de sommation d'Einstein est implicite. D'après la loi de Hooke généralisée:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2)$$

avec: $\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$
Cas isotrope

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3)$$

On peut montrer que:

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (4)$$

avec $\Theta = \text{div} \mathbf{u} = \sum_k \epsilon_{kk}$ où Θ est la dilatation.

Démonstration:

$$C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \sum_{kl} \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} \epsilon_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk} \epsilon_{kl}) \quad (5)$$

Pour le premier terme, $k = l$ et pour le 2eme terme en μ , les seuls termes non nuls correspondent à k et l égaux soit à i soit à j . On a donc:

$$C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \lambda \delta_{ij} \sum_k \epsilon_{kk} + \mu (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}) \quad (6)$$

Soit:

$$C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \lambda \delta_{ij} \Theta + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (7)$$

C.Q.F.D.

2.2 Ondes P, ondes S

On se contente dans cette partie de rappeler rapidement comment on trouve 2 types de solutions dans le cas isotrope, en termes d'ondes P et d'ondes S.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \quad (8)$$

où $\mathbf{grad} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ est l'opérateur différentiel "nabla", et \mathbf{v} est la vitesse du point.

On néglige dans les milieux élastiques le terme d'advection $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$, ce qui n'est pas possible dans les milieux visqueux ou viscoélastiques.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \Theta \delta_{ij}) + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \epsilon_{ij}) \quad (9)$$

Si le milieu est homogène: $\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = 0$ et $\frac{\partial \mu}{\partial x_i} = 0$.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (10)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \Theta + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (11)$$

On prend la divergence de l'équation (11):

$$\rho \frac{\partial^2 \text{div} \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \Delta \Theta + \mu \text{div}(\Delta \mathbf{u}) \quad (12)$$

Or $\text{div} \Delta \vec{A} = \Delta \text{div} \vec{A}$ donc:

$$\rho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \Theta \quad (13)$$

La dilatation Θ obéit à une équation type équation d'ondes. On peut ensuite prendre le rotationnel de l'équation (2) pour faire apparaître $\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{u} = \nabla \wedge \mathbf{u}$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{rot} \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \mathbf{rot} \mathbf{grad} \Theta + \mu \mathbf{rot} \Delta \mathbf{u} \quad (14)$$

Comme le $\mathbf{rot} \mathbf{grad}$ d'une fonction scalaire est nul, il reste finalement:

$$\rho \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = \mu \Delta(\Omega) \quad (15)$$

Donc le rotationnel de \mathbf{u} est également solution de l'équation d'ondes. Cependant le problème est: connaissant Θ et Ω , est-il possible de retrouver simplement le déplacement? La réponse est non. On est donc amené à utiliser une manière détournée pour arriver à calculer le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

D'après le théorème d'Helmholtz, tout vecteur peut se décomposer sur un gradient et un rotationnel.

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad} \phi + \mathbf{rot} \Psi \quad (16)$$

ϕ et Ψ sont deux potentiels, le premier scalaire et le second vectoriel. Comme ils introduisent quatre nouveaux paramètres, il est possible d'imposer une condition supplémentaire sur Ψ . Cette condition (dite condition de jauge) est $\text{div} \Psi = 0$. On a donc, $\text{div} \mathbf{u} = \Theta = \Delta \phi$ et $\mathbf{rot} \mathbf{u} = \mathbf{rot} \mathbf{rot} \Psi$ soit encore $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \Psi = \mathbf{grad} \text{div} \Psi - \Delta \Psi$. Cela justifie *a posteriori* le choix de la condition imposée précédemment sur la divergence de Ψ . D'après l'équation (11) on a:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta \phi) = (\lambda + 2\mu) \Delta (\Delta \phi) \quad (17)$$

ce qui se réécrit:

$$\Delta \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\phi) - (\lambda + 2\mu)(\Delta\phi) \right) = 0 \quad (18)$$

La solution la plus simple de cette équation consiste à écrire que:

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\Delta\phi = 0 \quad (19)$$

La solution générale de cette équation d'ondes se met sous la forme $\phi(\mathbf{r}, t) = f(\omega t - \frac{\omega}{V}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + g(\omega t - \frac{\omega}{V}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})$, où \mathbf{n} est le vecteur unitaire du vecteur d'onde. Dans ce cas, V est égal à $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$. Ce type d'onde purement longitudinal est habituellement appelé onde P.

De même, pour l'équation (15),

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{rot rot} \Psi) = \mu \Delta (\mathbf{grad div} \Psi - \Delta \Psi) \quad (20)$$

En appliquant la condition $div \Psi = 0$, il reste:

$$\Delta \left(\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \mu \Delta \Psi \right) = 0 \quad (21)$$

Là aussi, une solution simple est:

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \mu \Delta \Psi = 0 \quad (22)$$

La solution de cette équation est également une onde progressive se propageant à la vitesse $V = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Cette onde est appelée onde S. C'est une onde transversale comme les ondes électromagnétiques. On peut noter que sa vitesse est inférieure à celle des ondes P puisque les paramètres de Lamé sont positifs.

3 Réflexion et Transmission des ondes sismiques à une interface.

Cas d'une onde P incidente réfléchi sur une surface libre

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0 \text{ en } z = 0$$

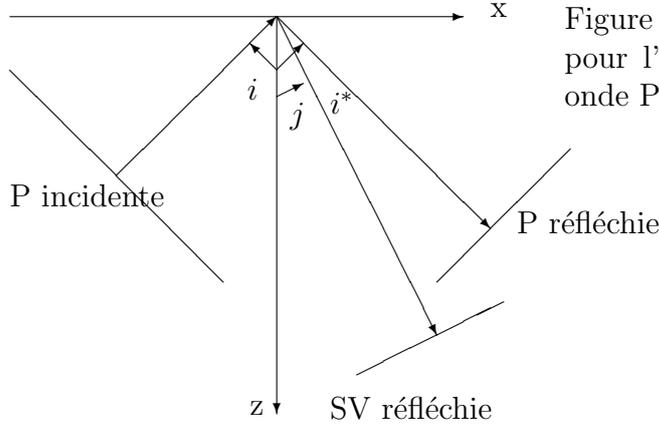


Figure 1: Système d'ondes et de coordonnées pour l'analyse des ondes réfléchies par une onde P incidente

Considérons une onde P incidente de type onde P (de vecteur d'onde \mathbf{k} et de pulsation ω) qui se réfléchit sur une interface plane (surface libre) avec un angle d'incidence i . Le déplacement $\mathbf{u}^P(x, z, t)$ et le potentiel scalaire correspondant $\Phi^P(x, z, t)$

$$\mathbf{u}^P(x, z, t) = i\mathbf{k}u_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = i\mathbf{k}u_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$$

$$\Phi^P(x, z, t) = i\Phi_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = i\mathbf{k}u_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$$

avec $k_x = k \sin i$ et $k_z = k \cos i$ L'équation d'onde s'écrit:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Phi) - C^2(\Delta\Phi) = 0 \quad (23)$$

$$-\omega^2\Phi = -C^2(k_x^2 + k_z^2)\Phi$$

et les composantes de $\mathbf{u}^P(x, z, t)$ sont :

$$\mathbf{u}^P(x, z, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Il existe des ondes réfléchies et on va montrer qu'il existe non seulement des ondes P mais aussi des ondes S. Pour mettre cela en évidence, on va exprimer les conditions aux limites à

la surface. Comme la surface est une surface libre, il n'y a pas de conditions aux limites sur le déplacement mais seulement les composantes σ_{zi} . Exprimons d'abord les composantes du tenseur des déformations non nulles $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \epsilon_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_{12} = 0 = \epsilon_{21} \\ \epsilon_{xz} &= \epsilon_{13} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_{22} = 0, \quad \epsilon_{yz} = \epsilon_{23} = 0 \\ \epsilon_{zz} &= \epsilon_{33} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Pour l'onde incidente, on notera Φ^{inc} et les seuls termes non nuls de la déformation sont $\epsilon_{11} = \frac{\partial^2 \Phi^{inc}}{\partial x^2}$, $\epsilon_{13} = \frac{\partial^2 \Phi^{inc}}{\partial x \partial z}$, $\epsilon_{33} = \frac{\partial^2 \Phi^{inc}}{\partial z^2}$. La dilatation totale Θ vaut: $\Theta^{inc} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \Delta \Phi^{inc} = \frac{\partial^2 \Phi^{inc}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{inc}}{\partial z^2}$. On en déduit les différentes composantes de la contrainte en utilisant la relation: $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \Theta + 2\mu \epsilon_{ij}$

$$\begin{aligned}\sigma_{13}^{inc} &= \sigma_{zx}^{inc} = 2\mu \epsilon_{13} = 2\mu \frac{\partial^2 \Phi^{inc}}{\partial x \partial z} \\ \sigma_{23}^{inc} &= \sigma_{zy}^{inc} = 0 \\ \sigma_{33}^{inc} &= \sigma_{zz}^{inc} = \sigma_{zz}^{inc} = \lambda \Delta \Phi^{inc} + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi^{inc}}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Calculons les expressions du déplacement pour les ondes S. On appellera onde SV l'onde S dont la vibration est dans le plan incident ($\Psi = \Psi_0 \mathbf{e}_y e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$), et l'onde SH dans la direction perpendiculaire au plan incident (Ψ serait selon \mathbf{e}_z).

Onde SV:

$$\mathbf{u}^{SV}(x, z, t) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

et les déformations correspondantes non nulles sont: $\epsilon_{11} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z}$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)$$

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z}$$

et les contraintes correspondantes

$$\sigma_{zx}^{ref} = \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi^{ref}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^{ref}}{\partial z^2} \right)$$

$$\sigma_{zy}^{ref} = 0$$

$$\sigma_{zz}^{ref} = 2\mu \epsilon_{13} = 2\mu \frac{\partial^2 \Psi^{ref}}{\partial x \partial z}$$

Onde SH:

$$\mathbf{u}^{SH}(x, z, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \\ w(x, z) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \end{pmatrix}$$

Seules ϵ_{12} et ϵ_{23} sont différents de zéro. Donc la seule contrainte excitée est $\sigma_{zy} = \mu \frac{\partial w}{\partial z}$ qui est nulle pour les ondes P donc non excitée. On en déduit qu'il n'y a pas d'ondes SH réfléchies. Donc les seules ondes en présence sont les ondes P incidentes de vecteur d'onde $\mathbf{k}^{inc}(sini/\alpha, 0, cosi/\alpha)$, les ondes P réfléchies de vecteur d'onde $\mathbf{k}^{ref}(sini^*/\alpha, 0, -cosi^*/\alpha)$ et les ondes S réfléchies (de type SV) de vecteur d'onde $\mathbf{k}_S^{ref}(sinj^*/\beta, 0, -cosj^*/\beta)$, en appelant α la vitesse des ondes P et β celle des ondes S. Le potentiel scalaire Φ total est la somme $\Phi^{inc} + \Phi^{ref}$. On doit considérer les 3 potentiels suivants:

$$\Phi^{inc}(x, z, t) = A e^{i\omega \left(\frac{sini}{\alpha} x + \frac{cosi}{\alpha} z - t \right)}$$

$$\Phi^{ref}(x, z, t) = B e^{i\omega(\frac{\sin i^*}{\alpha}x - \frac{\cos i^*}{\alpha}z - t)}$$

$$\Psi^{ref}(x, z, t) = C e^{i\omega(\frac{\sin j}{\beta}x - \frac{\cos j}{\beta}z - t)}$$

Pas de conditions aux limites sur \mathbf{u} mais continuité de la phase, quelque soit x et quelque soit t pour $z = 0$. La lenteur horizontale apparente est constante. On en déduit donc:

$$\frac{\sin i}{\alpha} = \frac{\sin i^*}{\alpha} = \frac{\sin j}{\beta} = p$$

donc $i = i^*$ et $\frac{\sin i}{\alpha} = \frac{\sin j}{\beta}$. On obtient donc une variante de loi de Snell-Descartes. p est appelé paramètre de rai et exprime la lenteur horizontale. Il reste maintenant à exprimer les conditions aux limites en calculant la traction totale en $z = 0$, c'est-à-dire les 3 composantes σ_{zi} en tenant compte des contraintes induites par les 3 ondes.

$$\sigma_{zx}^{tot} = 2\mu\epsilon_{13} = 2\mu \frac{\partial^2(\Phi^{inc} + \Phi^{ref})}{\partial x \partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi^{ref}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^{ref}}{\partial z^2} \right)$$

$$\sigma_{zy}^{tot} = 0$$

$$\sigma_{zz}^{tot} = \lambda \Delta(\Phi^{inc} + \Phi^{ref}) + 2\mu \frac{\partial^2(\Phi^{inc} + \Phi^{ref})}{\partial z^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \Psi^{ref}}{\partial x \partial z}$$

Le calcul est un peu fastidieux mais sans difficultés et on on trouve pour $z = 0$

$$\sigma_{zx}^{tot} = \omega^2 \left(2\mu p \frac{\cos i}{\alpha} (A - B) + \mu \left(p^2 - \frac{\cos^2 j}{\beta^2} \right) C \right) = 0$$

$$\sigma_{zz}^{tot} = \omega^2 \left((\lambda p^2 + \frac{\lambda \cos^2 i}{\alpha^2}) (A + B) + 2\mu \frac{\cos^2 i}{\alpha^2} (A + B) + 2\mu p \frac{\cos j}{\beta} C \right) = 0$$

3 inconnues mais A est arbitraire. On pose $R_{PP} = \frac{B}{A}$ et $R_{PS} = \frac{C}{A}$ que l'on déduit facilement des équations précédentes.

$$\frac{B}{A} = \frac{4\beta^4 p^2 \frac{\cos i}{\alpha} \frac{\cos j}{\beta} - (1 - 2\beta^2 p^2)^2}{4\beta^4 p^2 \frac{\cos i}{\alpha} \frac{\cos j}{\beta} + (1 - 2\beta^2 p^2)^2}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{-4\beta^2 p \frac{\cos i}{\alpha} (1 - 2\beta^2 p^2)}{4\beta^4 p^2 \frac{\cos i}{\alpha} \frac{\cos j}{\beta} + (1 - 2\beta^2 p^2)^2}$$

Ces expressions sont compliquées et quelques simplifications sont possibles, par exemple en remplaçant $1 - 2\beta^2 p^2 = \cos 2j$. On a préféré utiliser $p, \frac{\cos i}{\alpha}, \frac{\cos j}{\beta}$ parce qu'ainsi les coefficients de réflexion $\frac{B}{A}$ et $\frac{C}{A}$ peuvent être généralisés à des milieux verticalement hétérogènes.

Le résultat important et non trivial de ce chapitre est donc qu'une onde P incidente donne naissance généralement à une onde P réfléchie et une onde S réfléchie de polarisation dans le plan d'incidence (onde SV). Il existe donc un couplage dans un milieu solide entre les ondes P et SV au niveau des interfaces.

4 Ondes de surface.

4.1 Approche plane

Nous avons vu au paragraphe précédent un premier type de solutions pour l'équation (11) en terme d'ondes P et S. Nous allons maintenant montrer qu'il existe aussi des solutions progressives dans les directions horizontales et stationnaires dans la direction verticale. Les sismologues ont été amenés à introduire ce type d'ondes suite à des observations de sismogrammes semblables à celles montrées sur les figures montrées lors du premier cours.

Que voit-on sur les sismogrammes?

Voir Figures

On constate que l'amplitude des ondes de volume décroît très rapidement avec la distance épacentrale et derrière le train d'ondes de volume apparaît un train d'ondes dont l'amplitude décroît lentement avec la distance comme une onde guidée par la surface, d'où son nom d'onde de surface.

Soient Z la composante verticale, T et L les composantes transversale et longitudinale.

- Mise en évidence de 2 types d'ondes, ondes de Love sur la composante transversale et ondes de Rayleigh sur les composantes verticale et longitudinale.
- Ce sont des ondes dispersées contrairement aux ondes de volume.

4.2 Ondes de Rayleigh

Cas plan. Une couche.

On considère un demi-espace infini dans lequel on définit un système de coordonnées cartésiennes Ox, y, z . Pour expliquer les trains d'ondes de surface, on cherche des solutions qui soient progressives dans une direction horizontale et stationnaire en profondeur. On va tester des solutions du type:

$$\phi = Ae^{rz}e^{i(kx-\omega t)} \quad (24)$$

$$\Psi = Be^{sz}e^{i(kx-\omega t)}\vec{y}_0 \quad (25)$$

où \vec{y}_0 est le vecteur unitaire selon l'axe Oy .

Donc, on cherche une solution se propageant selon Ox et décroissante selon Oz .

$$\Delta\phi = \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \implies r^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{\alpha^2}. \text{ De même,}$$

$\Delta\Psi = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \implies s^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{\beta^2}$, où α et β sont respectivement les vitesses des ondes P et des ondes S du milieu. Comme Ψ n'a qu'une seule composante, on peut le considérer comme un scalaire. D'autre part, comme k et ω sont réels, cela implique:

$$r = \pm\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2}} \text{ et } s = \pm\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2}}$$

En revanche, à ce stade, r et s peuvent être soit réels soit imaginaires. On peut calculer le déplacement associé aux potentiels ϕ et Ψ .

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad}\phi + \mathbf{rot}\Psi \quad (26)$$

$$u_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial z} \quad (27)$$

$$u_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} + 0 \quad (28)$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (29)$$

On en tire les différentes composantes de \mathbf{u} :

$$u_x = (ikAe^{rz} - Bse^{sz})e^{i(kx-\omega t)} \quad (30)$$

$$u_y = 0 \quad (31)$$

$$u_z = (Ae^{rz} + ikBe^{sz})e^{i(kx-\omega t)} \quad (32)$$

On doit maintenant appliquer les conditions aux limites:

• Conditions sur les déplacements: Quand $z \rightarrow \infty$, on a $u_x \rightarrow 0$, $u_y \rightarrow 0$ et $u_z = 0$. Cela implique que r et s sont réels et négatifs.

• Conditions sur les contraintes: $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$ en $z = 0$.

$$\sigma_{zx} = 2\mu\epsilon_{zx} \quad (33)$$

$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \quad (34)$$

$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{2}(2ikAe^{rz} - B(k^2 + s^2)e^{sz})e^{i(kx-\omega t)} \quad (35)$$

Donc:

$$\sigma_{zx} = \mu(2ikAe^{rz} - (k^2 + s^2)Be^{sz})e^{i(kx-\omega t)} \quad (36)$$

$$\sigma_{zy} = 2\mu\epsilon_{zy} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = 0 \quad (37)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + 2\mu\epsilon_{zz} \quad (38)$$

Or $\sum_k \epsilon_{kk} = \Delta\phi = (r^2 - k^2)\phi$, donc:

$$\sigma_{zz} = ([\lambda(r^2 - k^2) + 2\mu r^2]Ae^{rz} + 2i\mu ksBe^{sz})e^{i(kx-\omega t)} \quad (39)$$

Donc si on applique les conditions aux limites, on obtient un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues:

$$2ikr A - (k^2 + s^2) B = 0 \quad (40)$$

$$(\lambda(r^2 - k^2) + 2\mu r^2) A + 2i\mu ks B = 0 \quad (41)$$

En dehors de la solution triviale $A = B = 0$, on trouve une solution en écrivant que son déterminant est nul:

$$4k^2rs = (k^2 + s^2)\left[\frac{\lambda}{\mu}(r^2 - k^2) + 2r^2\right] \quad (42)$$

Or $r^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{\alpha^2}$ et $s^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{\beta^2}$. Donc en éliminant r et s et en introduisant la vitesse de phase $c = \frac{\omega}{k}$, on trouve finalement:

$$\sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha^2}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta^2}} = \left(1 - \frac{c^2}{2\beta^2}\right)^2 \quad (43)$$

Pas de solution analytique simple en général sauf si $\lambda = \mu$ ce qui est relativement correct dans la croûte. On trouve alors $c = \beta\sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 0,919\beta$.

Dans ce cas très exceptionnel de demi-espace plan, la vitesse de phase est indépendante de ω . Une fois c connu, on peut calculer r et s . Dans le cas $\lambda = \mu$, $r = \frac{-5,4}{\lambda}$ et $s = \frac{-2,5}{\lambda}$. On peut également en déduire les potentiels ϕ et Ψ .

On retrouve les caractéristiques principales observées sur les figures 1 et 2 pour les ondes de Rayleigh sauf l'aspect dispersif, ce qui n'est pas vraiment surprenant puisque le modèle ne comporte qu'une couche.

Analogie avec effet de peau.

Caractéristiques importantes:

- Il existe une solution dans le cas du demi-espace infini.
- Elle résulte du couplage P-SV.
- Onde de Rayleigh sur composantes verticale et longitudinale.

Polarisation elliptique

Notion de dispersion: voir après ondes de Love.

4.3 Ondes de Love.

Comment expliquer les signaux observés sur la composante transversale?

Nous allons montrer qu'il est nécessaire d'avoir au moins deux couches pour avoir des ondes de Love.

Dans un premier temps, considérons une couche homogène dans un demi-espace. On cherche une solution transversale du type:

$$\mathbf{u} = (0, w(x, z, t), 0) \quad (44)$$

On peut en déduire le tenseur des déformations et des contraintes:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} \implies \Theta = 0 \quad (45)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad \epsilon_{xz} = 0 \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (46)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} \quad (47)$$

Donc les seules composantes non nulles sont:

$$\sigma_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \sigma_{yz} = 2\mu\epsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (48)$$

D'après l'équation des ondes et compte tenu de $\Theta = 0$, on a:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} \implies \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (49)$$

On cherche une solution de la forme: $w = a(z)e^{i(kx - \omega t)}$ soit:

$$\mu \frac{d^2 a}{dz^2} = (-\rho\omega^2 + \mu k^2)a(z) \quad (50)$$

Cette équation du second ordre a pour solution: $a(z) = Ae^{-\nu z} + Be^{\nu z}$

Pour aller plus loin, il faut maintenant considérer les conditions aux limites. Elles concernent à la fois le déplacement et la contrainte.

Déplacement: quand $z \rightarrow \infty$, $a(z) \rightarrow 0 \implies B = 0$ et ν est réel.

Contrainte: pour $z = 0$, $\sigma_{iz} = 0 \implies \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mu \frac{da}{dz} \Big|_{z=0} = 0$ puisque seule la contrainte σ_{yz} est non nulle.

Si le milieu n'est composé que d'une seule couche, cette condition implique que $\nu A = 0$ donc $A = 0$ ou $\nu = 0$. Dans les deux cas, on trouve une solution inintéressante. Cela signifie que l'on ne peut pas d'avoir d'ondes de Love dans un demi-espace plan. Il faut donc compliquer le modèle et introduire deux couches (figure 3).

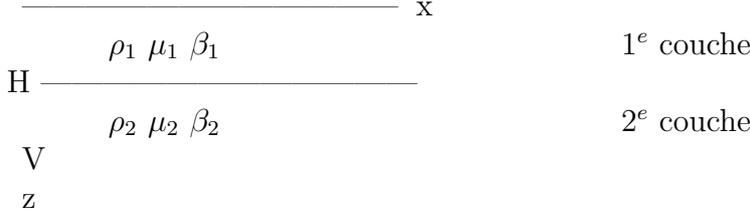


Figure: Milieu le plus simple dans lequel peuvent se propager des ondes de Love.

On cherche de nouveau des solutions de la forme: $w(z) = Ae^{-\nu z} + Be^{\nu z}$. On a la même condition que précédemment, c'est-à-dire: $\nu^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2}$. En revanche, on doit maintenant séparer la solution selon la couche:

- 1ere couche: $0 \leq z \leq H$, $a(z) = A_1 e^{-\nu_1 z} + B_1 e^{\nu_1 z} \implies \nu_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{\beta_1^2}$
- 2eme couche: $z \geq H$, $a(z) = A_2 e^{-\nu_2 z} + B_2 e^{\nu_2 z} \implies \nu_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{\beta_2^2}$

Nouvelles conditions aux limites:

- Déplacement à l'infini: quand $z \rightarrow \infty$, $a(z) \rightarrow 0 \implies B_2 = 0$ et $\nu_2 > 0$ et appartient à \mathbb{R} .

- *Contrainte*: pour $z = 0$, $\sigma_{iz} = 0 \implies \frac{\partial w}{\partial z} = \mu_1 \frac{da}{dz} \Big|_z = 0 = 0 \implies A_1 = B_1$
- Continuité des déplacements et des contraintes en $z = H$.

$$a(H) = A_1 (e^{-\nu_1 H} + e^{\nu_1 H}) = A_2 e^{-\nu_2 H} \quad (51)$$

$$\mu_1 \frac{da}{dz} \Big|_z = 0 = \mu_1 A_1 \nu_1 (e^{\nu_1 H} - e^{-\nu_1 H}) = \mu_2 A_2 \nu_2 e^{-\nu_2 H} \quad (52)$$

On a vu que ν_2 est réel, mais aucune condition n'est imposée sur ν_1 . On peut montrer que si $\beta_1 < \beta_2$, alors la solution est imaginaire dans la première couche et l'on peut réécrire les conditions aux limites précédentes sous la forme:

$$2A_1 \cos(i\nu_1 H) = A_2 e^{-\nu_2 H} \quad (53)$$

$$2i\nu_1 \mu_1 A_1 \sin(i\nu_1 H) = \mu_2 A_2 \nu_2 e^{-\nu_2 H} \quad (54)$$

Soit encore: $tg(i\nu_1 H) = -\frac{i\mu_2 \nu_2}{\mu_1 \nu_1}$. Or on a les conditions supplémentaires: $\nu_1^2 = \omega^2 (\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\beta_1^2}) \implies i\nu_1 = \sqrt{\omega^2 (\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2})}$. Finalement:

$$tg \left(\omega H \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2}} \right) = \frac{\mu_2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\beta_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\mu_1 \left(\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (55)$$

Pas de solution analytique, mais solution géométrique. On définit: $x = H \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2}}$ et on trace $tg \omega x = g(x)$

Discussion selon ω

Le second membre de l'équation (54) $f(x)$, ne dépend pas de la fréquence. Il est infini pour $c = \beta_1$ et égal à zéro pour $c = \beta_2$.

En revanche $tg\omega x$ va varier avec ω . Les solutions de l'équation (54) correspondent à $g(x) = f(x)$. Pour ω voisin de 0, une seule solution possible. Si on augmente progressivement ω , la première asymptote de $tg\omega x$ va arriver en $x = \frac{\pi}{2}$. Ensuite elle rentre dans le domaine accessible $\beta_1 \leq c \leq \beta_2$. Mais, à ce stade il n'y a toujours qu'une solution. Ensuite, arrive une valeur de $\omega x = \pi$ pour laquelle $tg\omega x = 0$. On a alors une deuxième solution correspondant à $x = \frac{\pi}{\omega}$. La fréquence correspondante est appelée 1^{ère} fréquence de coupure du mode $n = 1$ et sa valeur est: $\omega_1 = \frac{\pi}{H(\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2})^{\frac{1}{2}}}$. Plus on augmente ω plus le nombre de solutions augmente et on appelle fréquence de coupure du mode n la valeur: $\omega_n = \frac{n\pi}{H(\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2})^{\frac{1}{2}}}$.

Le mode correspondant à $n = 0$ s'appelle le mode fondamental, et les modes correspondant à $n \neq 0$ sont appelés modes harmoniques (ou modes supérieurs).

Application numérique:

Croûte continentale:

$H=35\text{km}$, $\beta_1 = 3,5\text{km/s}$, $\beta_2 = 4,5\text{km/s}$

Première fréquence de coupure: $\omega_{c1} = 0.08\text{Hz} \Rightarrow T = 13\text{s}$.

4.4 Cas général.

On considère maintenant un milieu élastique et isotrope où des variations verticales des paramètres physiques sont possibles, soit $\lambda(z)$, $\mu(z)$ et $\rho(z)$. Considérons d'abord le cas plus simple des ondes de Love. On cherche une solution du déplacement \mathbf{u} sous la forme:

$$\mathbf{u} = (0, w(x, z, t, k, \omega) = l_1(k, z, \omega)e^{i(kx - \omega t)}, 0).$$

On en déduit le tenseur des déformations: $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{xz} = 0$, $\epsilon_{yx} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{ik}{2} w$,
 $\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial l_1}{\partial z} \frac{w}{l_1}$.

Pour les contraintes, $\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij}$ et donc les seules composantes non nulles sont les suivantes:

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} = i\mu k w \quad (56)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\mu w}{l_1} \frac{\partial l_1}{\partial z} \quad (57)$$

Les équations du mouvement s'écrivent:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} \iff \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \quad (58)$$

$$-\rho \omega^2 w = -\mu k^2 w + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial l_1}{\partial z} \right) e^{i(kx - \omega t)} \quad (59)$$

Conditions aux limites:

Les tractions doivent être nulles en surface. Soit pour les ondes de Love, $\sigma_{yz}(0) = 0$. Le déplacement quand $z \rightarrow \infty$ doit tendre vers 0, donc $w(z \rightarrow \infty) = 0$. Le problème dans l'équation du mouvement est qu'elle fait intervenir des dérivées par rapport à z de μ , mal connues et très incommodes numériquement. On préfère transformer cette équation du second ordre en un système d'équations du premier ordre. On introduit pour cela une nouvelle fonction $\sigma_{yz} = l_2(k, z, \omega)e^{i(kx - \omega t)}$. On arrive ainsi au système d'équations suivant:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ k^2 \mu - \rho \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad (60)$$

Ce système est bien adapté à une résolution numérique soit par une méthode type Thomson-Haskell (empilement de couches homogènes, méthode du propagateur) soit par une méthode de Runge-Kutta (modèles continus plus lisses).

Notion de dispersion.

Dès que l'on introduit plusieurs couches dans le calcul (ce qui est toujours le cas pour les ondes de Love, mais n'était pas le cas pour les ondes de Rayleigh), on peut facilement voir que la vitesse de propagation des ondes va dépendre de la fréquence (ou de manière équivalente de la période). Il faut alors distinguer la vitesse de phase $C(T)$ de la vitesse de groupe $U(T)$.

vitesse de phase: $C(T) = \frac{\omega}{k}$
 vitesse de groupe: $U(T) = \frac{d\omega}{dk}$

Les courbes de dispersion de vitesses de phase (ou de groupe) vont alors dépendre de la structure traversée. La première mise en évidence des hétérogénéités latérales de la Terre à

grande échelle a été résumée par Knopoff et al. (1972) où en comparant les courbes de dispersion correspondants à des trajets "purs", ces auteurs ont montré de grandes différences selon la nature géologique du milieu (océanique jeune, ancien, continental tectonique ou craton). Cependant l'amplitude de ces hétérogénéités reste inférieure à 10%. Cela signifie qu'il sera possible d'utiliser des théories de perturbation au premier ordre pour cartographier les hétérogénéités latérales de la terre (voir chapitre Tomographie).

Le calcul de la vitesse de phase ou de groupe se fait maintenant en routine.

Cas des ondes de Rayleigh.

On peut utiliser la même approche que pour les ondes de Love, mais c'est plus compliqué puisqu'il faut maintenant considérer les deux composantes du déplacement.

$$\mathbf{u} = (u(x, z, t, k, \omega) = r_1(k, z, \omega)e^{i(kx-\omega t)},$$

$$w = 0,$$

$v(x, z, t, k, \omega) = ir_2(k, z, \omega)e^{i(kx-\omega t)}$). Les composantes de σ_{zx} et σ_{zz} sont continues sur les interfaces perpendiculaires à Oz. On introduit deux nouvelles fonctions:

$$\sigma_{zx} = r_3(k, z, \omega)e^{i(kx-\omega t)} \text{ et}$$

$$\sigma_{zz} = ir_4(k, z, \omega)e^{i(kx-\omega t)}.$$

On obtient le système de 4 équations du premier ordre suivant:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & \mu^{-1} & 0 \\ -k\lambda(\lambda + \mu)^{-1} & 0 & 0 & (\lambda + 2\mu)^{-1} \\ 4k^2\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} & 0 & 0 & k\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \\ 0 & -2\rho\omega^2 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \quad (61)$$

Mêmes méthodes de résolution que les pour les ondes de Love: Thomson-Haskell, Runge-Kutta (voir par exemple *Aki and Richards* (2003)).