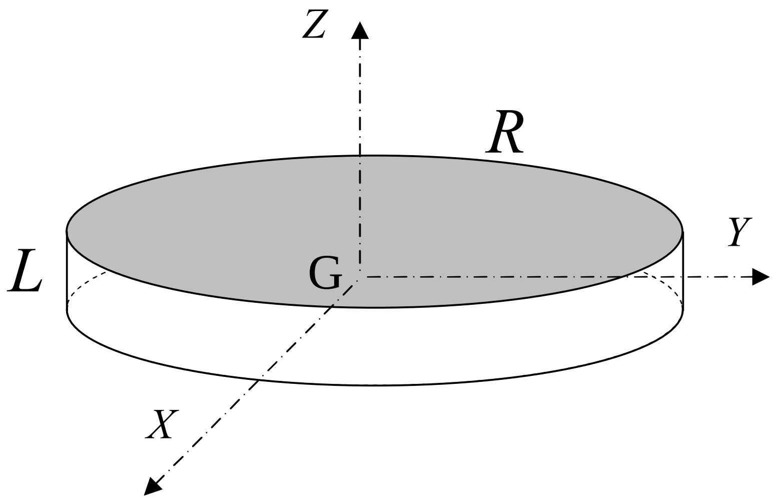
Licence STEP L2 Module Physique pour les géosciences S4

Mécanique des solides et des planètes

MS7: Exercices du 12 mars 2007

2007MS7E1 :

Considérons (voir figure ci-dessous) un disque homogène de masse M et de rayon R. Soit G le centre d'inertie. Certains éléments de la matrice d'inertie peuvent être donnés immédiatement. En effet, comme il y a au moins deux plans de symétrie perpendiculaires, tous les produits d'inertie sont nuls. On connaît aussi le moment d'inertie I_{ZZ} par rapport à l'axe GZ : c'est $1/2MR^2$. Ce moment d'inertie peut aussi s'écrire comme la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires, qui par symétrie sont égaux.



On a donc :

$$I_{ZZ} = \frac{1}{2}MR^2 = I_{\Pi XZ} + I_{\Pi YZ} = 2I_{\Pi XZ} = 2I_{\Pi YZ} \ . \tag{1}$$

On a donc :

$$I_{\Pi XZ} = I_{\Pi YZ} = \frac{1}{4}MR^2 \ . \tag{2}$$

Quant aux moments d'inertie par rapport aux autres axes, ils sont égaux par symétrie et s'écrivent aussi comme une somme de moment d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires :

$$I_{XX} = I_{YY} = I_{\Pi XY} + I_{\Pi XZ} \ . \tag{3}$$

On connaît $I_{\Pi XZ}$ d'après (15). Reste à trouver $I_{\Pi XY}$, mais il s'agit du moment d'inertie par rapport à son plan médian d'un objet cylindrique, qui, comme on a vu dans le chapitre 3, vaut :

$$I_{\Pi XY} = \frac{1}{12}ML^2 \ . \tag{4}$$

On a donc :

$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}MR^2 = \frac{1}{12}M\left(L^2 + 3R^2\right). \tag{5}$$

La matrice d'inertie du parallélépipède dans le repère GXYZ s'écrit donc :

$$\boxed{\bar{I}_G = \frac{M}{12}\begin{bmatrix} L^2+3R^2 & 0 & 0 \\ 0 & L^2+3R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{bmatrix}} . \tag{6}$$

2007MS7E2 :

La période des petites oscillations du pendule physique est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}} . \tag{7}$$

D'après la règle de Steiner-Huygens, on peut dire que :

$$I_\Delta = I_{\Delta G} + Md^2 \geq Md^2 . \tag{8}$$

On a donc :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}} \geq 2\pi\sqrt{\frac{Md^2}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}} . \tag{9}$$

2007MS7E3 :

Pour trouver la période des petites oscillations du cône dans la configuration donnée, il nous faut (cf équation (7) ci-dessus) la distance d entre le centre d'inertie et le sommet, et le moment d'inertie I_Δ par rapport à un autre perpendiculaire à son axe de symétrie passant par ce sommet. Nous allons utiliser les résultats d'exercices précédents. On sait que le centre d'inertie du cône se trouve (exercice MS4E4) au quart de la hauteur à partir de la base. On a donc $d=3h/4$. On connaît par ailleurs (exercice MS6E3C) le moment d'inertie I_b du cône par rapport à un axe de la base passant par le centre de cette base. C'est $I_b = 1/10Mh^2+3/20MR^2$. Le moment d'inertie I_G par rapport à un axe perpendiculaire à l'axe de symétrie et passant par le centre d'inertie est relié à I_b par la règle de Steiner-Huygens:

$$I_G = I_b - M\left(\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{1}{10}Mh^2 + \frac{3}{20}MR^2 - \frac{1}{16}Mh^2 . \tag{10}$$

Le moment d'inertie I_Δ est aussi lié à I_G par la règle de Steiner-Huygens:

$$\begin{aligned} I_\Delta &= I_G + M\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{1}{10}Mh^2 + \frac{3}{20}MR^2 - \frac{1}{16}Mh^2 + \frac{9}{16}Mh^2 \\ &= \frac{1}{10}Mh^2 + \frac{3}{20}MR^2 + \frac{1}{2}Mh^2 = \frac{3}{5}Mh^2 + \frac{3}{20}MR^2 = \frac{3}{5}M\left(h^2 + \frac{1}{4}R^2\right) \end{aligned} \tag{11}$$

On a donc:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{5}M\left(h^2+\frac{1}{4}R^2\right)}{Mg\frac{3}{4}h}} = \boxed{4\pi\sqrt{\frac{h}{5g}\left(1+\frac{1}{4}\frac{R^2}{h^2}\right)}} . \tag{12}$$

2007MS7E4 :

Reprenons la formule (5.32) du chapitre 5 donnant la vitesse de précession approximative:

$$\dot{\varphi} \cong \frac{3}{2}\frac{6.67\times10^{-11}\times7.3\times10^{22}}{\left(190\,000\times10^{3}\right)^{3}}\frac{1}{306}\frac{0.92}{2\pi}86164 \cong 44\times10^{-12}s^{-1}. \qquad (13)$$

ce qui correspond environ à une précession de l'axe tous les 4500 ans.

2007MS7E5 :

L'accélération de la gravité g varie comme l'inverse de la distance au centre de la Terre au carré (cf chapitre 5). La variation relative $\Delta g/g$ entre la surface de la Terre de rayon R et une hauteur h (petite devant R) est donc:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\frac{1}{(R+h)^2} - \frac{1}{R^2}}{\frac{1}{R^2}} = \left(\frac{1}{1+\frac{h}{R}}\right)^2 - 1 \cong -2\frac{h}{R}. \qquad (14)$$

Quand on monte en haut de la Tour Eiffel, on aura:

$$\frac{\Delta g}{g} \cong -2\frac{320}{6400\times10^{3}} = -10^{-4}. \qquad (15)$$

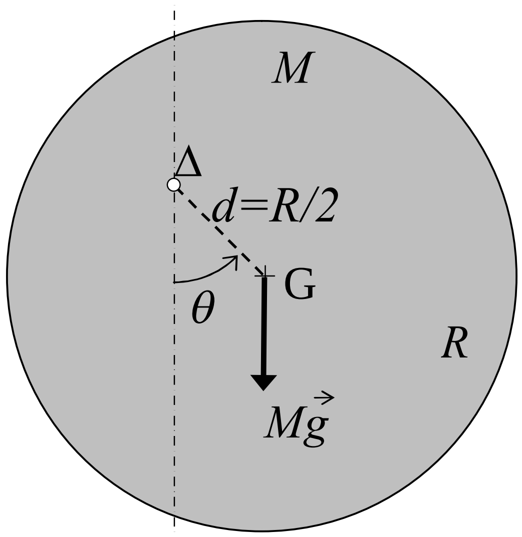
2007MS7E6 :

La période du pendule simple est inversement proportionnelle à la racine de l'accélération de la gravité. Celle-ci vaut environ 9.81 m·s^{-2} à Paris et 9.78 m·s^{-2} près de l'équateur (Figure 5.14 du chapitre 5). La période à Pondichéry sera donc:

$$1\text{s}\sqrt{\frac{9.81}{9.78}} = 1.0015\text{ s}. \qquad (16)$$

2007MS7E1C :

Considérons un disque homogène pouvant tourner librement autour d'un axe Δ perpendiculaire à son plan passant par le milieu d'un rayon. Soit R le rayon du disque, M sa masse, et I_Δ le moment d'inertie par rapport à Δ. La distance entre l'axe et le centre d'inertie du disque est $d=R/2$.



On sait que la période des petites oscillations du pendule physique est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}} \ . \tag{17}$$

D'après la règle de Steiner-Huygens, on a :

$$I_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 + Md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}MR^2 \ . \tag{18}$$

On a donc :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4}\frac{MR^2}{Mg\frac{R}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}} \ . \tag{19}$$

2007MS7E2C :

On sait que la période des petites oscillations du pendule physique est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}} \ . \tag{20}$$

On connaît la distance d du sommet du secteur à son centre d'inertie (voir exercice MS6E2C):

$$d = \frac{4\sin\frac{\alpha}{2}R}{3\alpha} \ . \tag{21}$$

Le moment d'inertie I_Δ du secteur homogène par rapport à son sommet est $1/2MR^2$, comme pour le disque homogène. On a donc:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}MR^2}{Mg\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}R}{3\alpha}}} = \pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{R}{g}} \ . \tag{22}$$

2007MS7E3C :

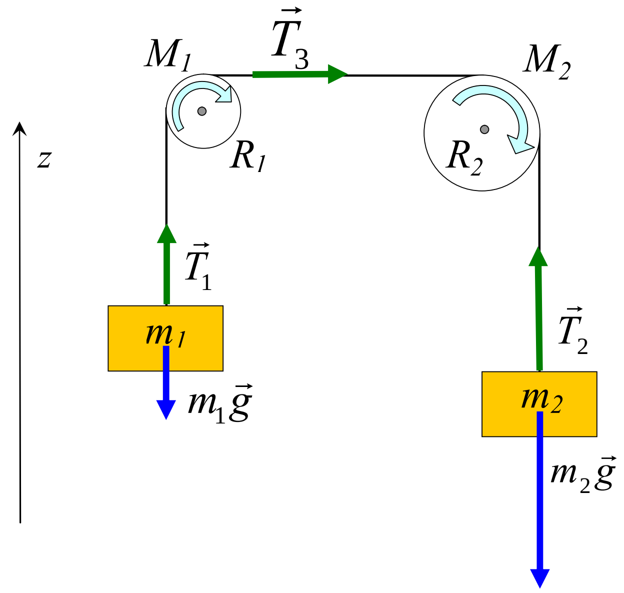
On procède comme pour l'exercice MS5E2C. Comme le fil est de longueur fixe et qu'il n'y a pas de glissement sur les poulies, l'accélération du mobile 2 est toujours égale et opposée à celle du mobile 1. Soit a le module de cette accélération (dirigée vers le haut pour 1 et vers le bas pour 2). Cependant, si on tient compte des poulies, chaque brin de fil maintenant a une tension différente. Soit T_1 le module de la tension du brin soutenant le mobile 1, T_2 le module de la tension du brin soutenant le mobile 2, et T_3 le module de la tension du brin entre les deux poulies. Projetons sur l'axe vertical, orienté vers le haut, la deuxième loi de Newton pour chaque mobile:

$$\begin{cases} m_1 a = -m_1 g + T_1 \\ -m_2 a = -m_2 g + T_2 \end{cases} \ . \tag{23}$$

où g désigne l'accélération de la pesanteur. On peut d'autre part écrire le théorème du moment cinétique pour chaque poulie:

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{d\omega_1}{dt} = -T_1 R_1 + T_3 R_1 \\ I_2 \dfrac{d\omega_2}{dt} = -T_3 R_2 + T_2 R_2 \end{cases}, \qquad (24)$$

où ω_1, ω_2 désignent les vitesses angulaires de rotation des deux poulies et I_1, I_2 leurs moments d'inertie par rapport à leur axe de rotation.



Comme le fil ne glisse pas, ces vitesses angulaires ω_1 et ω_2 sont liées à la vitesse V des mobiles: $\omega_1=V/R_1$ et $\omega_2=V/R_2$. Les équations (24) deviennent alors:

$$\begin{cases} \dfrac{I_1}{R_1^2} a = -T_1 + T_3 \\ \dfrac{I_2}{R_2^2} a = -T_3 + T_2 \end{cases}, \qquad (25)$$

On obtient l'accélération en éliminant les tensions entre les équations (25) et (23). On obtient:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{I_1}{R_1^2} + \dfrac{I_2}{R_2^2}} g \, . \qquad (26)$$

Comme les poulies sont des disques homogènes, on a:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{M_1 + M_2}{2}} g \, . \qquad (27)$$

<u>2007MS7E4C :</u>

Considérons le moment d'inertie d'un solide par rapport au plan Π=XY. C'est (cf chapitre 3 équation 3.42) la quantité :

$$I_\Pi = \sum_i m_i Z_i^2 \, . \qquad (28)$$

Dilatons ce solide dans une direction perpendiculaire au plan. La coordonnée Z_i de chaque point i devient $Z'_i=\alpha Z_i$. Le moment d'inertie par rapport au plan I_Π' de l'objet dilaté est :

$$I_\Pi' = \sum_i m_i Z'^2_i = \alpha^2 \sum_i m_i Z_i^2 = \alpha^2 I_\Pi . \tag{29}$$

Si la dilatation est effectuée dans une direction parallèle au plan, la coordonnée Z_i est inchangée et par conséquent le moment d'inertie I_Π est conservé.

Considérons un ellipsoïde de demi-grands axes *a*, *b*, *c* suivant les directions X, Y, Z. Cherchons le moment d'inertie $I_{\Pi XY}$ de l'ellipsoïde par rapport au plan XY. Effectuons d'abord une dilatation de rapport *a/b* selon l'axe Y. La section du nouvel objet dans le XY est désormais un cercle de rayon *a* et le moment d'inertie $I_{\Pi XY}$ est inchangé. Effectuons maintenant une dilatation selon Z de rapport *a/c*. Le nouvelle objet est une sphère de rayon a et son moment d'inertie I_Π' est $(a/c)^2 I_{\Pi XY}$ d'après les considérations générales précédentes. Mais on connaît le moment d'inertie d'une sphère par rapport à tout plan passant par son centre, c'est $I_\Pi'=1/5Ma^2$. On a donc $I_{\Pi XY}=1/5Mc^2$. Le moment d'inertie *A* de l'ellipsoïde par rapport à l'axe OX s'écrit donc:

$$A = I_{\Pi XY} + I_{\Pi XZ} = \frac{1}{5}Mc^2 + \frac{1}{5}Mb^2 = \frac{1}{5}M\left(b^2 + c^2\right) . \tag{30}$$

et par symétrie :

$$B = \frac{1}{5}M\left(a^2 + c^2\right) \text{ et } C = \frac{1}{5}M\left(a^2 + b^2\right) . \tag{31}$$

Pour la Terre, $a=b$ (rayon équatorial) et $c<a$, on écrira donc:

$$A = \frac{1}{5}M\left(a^2 + c^2\right) \text{ et } C = \frac{2}{5}Ma^2 . \tag{32}$$

et :

$$\frac{C-A}{C} = \frac{2a^2 - a^2 - c^2}{2a^2} = \frac{a^2 - c^2}{2a^2} = \frac{a-c}{a}\frac{a+c}{2a} \cong \varepsilon , \tag{33}$$

où ε est l'aplatissement $(a-c)/a>0$.