MASTER STEP Institut de Physique du Globe de Paris

Géophysique de l'Environnement

TDGE1: Corrigé des exercices pour le 8 mars 2007

TDGE1E1:

La profondeur de pénétration pour une onde de période T est donnée par $\lambda = \sqrt{\kappa T / \pi}$ où κ est la diffusivité thermique. Pour l'onde annuelle (T=3.16×10^7 s) et κ=1.5×10^{-6} m^2·s^{-1}, on obtient λ= 3.9 m. L'atténuation à une profondeur p est $e^{-p/\lambda}$, ce qui donne 0.076, 5.8×10^{-3} et 4.4×10^{-4} à 10 m, 20 m et 30 m respectivement. Quant au décalage de phase, il est donné par $p/2\pi\lambda$ en unités de période, soit 0.41, 0.82 et 1.23, ou encore 5, 10 et 14 mois à 10 m, 20 m et 30 m respectivement.

TDGE1E2:

L'amplitude annuelle crête crête à Paris est environ 15 °C. Pour que l'amplitude à une profondeur p soit 0.1 °C, il faut donc que l'atténuation $e^{-p/\lambda}$ soit égale à 6.7×10^{-3}. La profondeur de pénétration λ pour une onde de période T est $\lambda = \sqrt{\kappa T / \pi}$, soit 3.2 m avec T=3.16×10^7 s et en prenant κ=10^{-6} m^2·s^{-1}. La profondeur p minimale est alors p=-λ×Log(6.7×10^{-3}) soit p= 16 m.

TDGE1E3:

Le débit Q à travers le filtre est donné par KAh/l, K étant la conductivité hydraulique, A l'aire totale du filtre (soit $A=\pi r_0^2$ ou r_0 est le rayon du filtre), h la charge hydraulique et l la longueur du filtre. Comptons la charge hydraulique à partir du bas du filtre, on ne tient donc pas compte d'une éventuelle rétention capillaire du filtre. Quand le filtre est plein ($h=h_1$=10+2=12 cm), on obtient Q=10^{-3}×π×4×10^{-4}×12/2=7.5×10^{-6} m^3/s soit Q=450 mL/min.

Le débit à travers le filtre est aussi égal à $A(t)dh/dt$, où $A(t)$ est l'aire de la surface libre. Si on suppose que la cafetière est cylindrique, alors $A(t)=\pi r(h)^2$ où $r(h)$ est le rayon de la surface libre. Ici, $r(h)=r_0+\tan\alpha\times(h(t)-l)$, où α est le demi-angle au sommet de la cafetière supposée conique. On a donc :

$$Q = K\pi r_0^2 \frac{h}{l} = -\pi \left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} + \frac{h}{\sqrt{3}} \right)^2 \frac{dh}{dt}, \qquad (1)$$

car α=30°, soit:

$$\frac{Kr_0^2}{l} dt = -\frac{\left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} h \left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} \right) + \frac{h^2}{3}}{h} dh . \qquad (2)$$

L'eau aura entièrement percolé au bout d'un temps T qui correspond à h variant de h_1 à l. En intégrant (2) de t=0 à T, on obtient donc:

$$\frac{Kr_0^2}{l} T = \left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} \right)^2 Log \frac{h_1}{l} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} \right) (h_1 - l) + \frac{1}{6} \left(h_1^{\,2} - l^2 \right), \qquad (3)$$

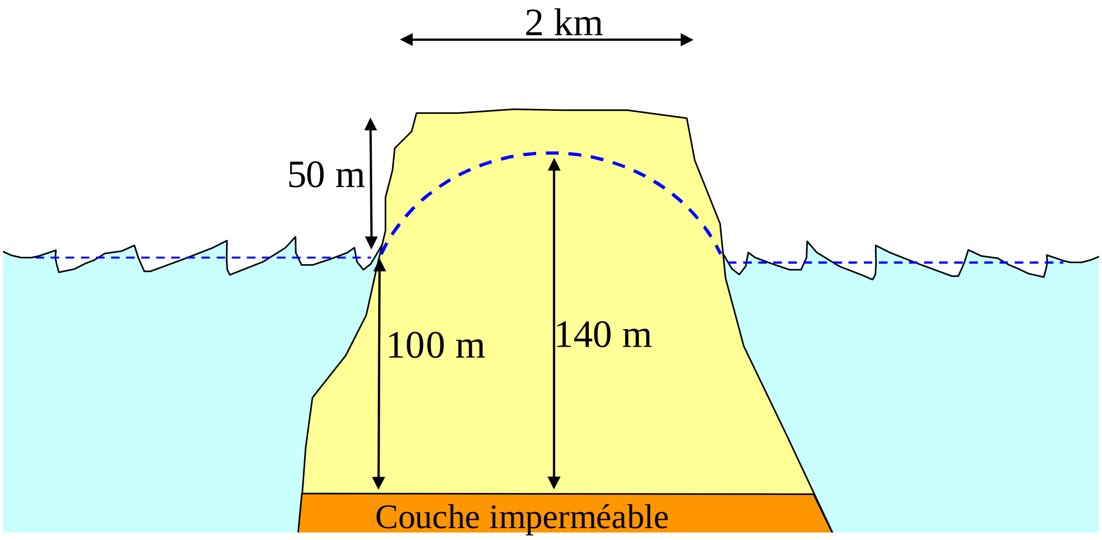
soit:

$$T = \frac{l}{Kr_0^2} \left[\left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} \right)^2 Log \frac{h_1}{l} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} \right) (h_1 - l) + \frac{1}{6} \left(h_1^{\,2} - l^2 \right) \right], \qquad (4)$$

soit:

$$T = 3.0 \text{ min} \quad (5)$$

TDGE1E4:



1) Considérons l'aquifère libre délimitée par la mer de par et d'autre. La hauteur piézométrique h est donc $h=h_0$=100 m pour x=0 (coordonnée horizontale perpendiculaire à la presqu'île et $x=L$ (largeur de la presqu'île). La ligne de partage des eaux x_{WD} est au centre de la presqu'île et $h(x_{WD})$=140 m. Soit a l'infiltration par tranche de presqu'île, que nous supposerons constante et égale à 1% de la pluviométrie. La conservation de la quantité totale d'eau contenue dans les pores permet d'écrire:

$$a = \frac{dq}{dx}, \quad (6)$$

où q est le débit spécifique. Dans le cadre de l'approximation de Dupuit, on a :

$$q = -Kh\frac{dh}{dx}, \quad (7)$$

où K est la conductivité hydraulique.

On a donc :

$$\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right) = -\frac{a}{K}. \quad (8)$$

Cette équation s'intègre aisément quand le milieu est homogène (K=Cte) et a est constant et la solution vérifiant les conditions aux limites est:

$$h^2 = h_0^{\,2} + \frac{a}{K}x(L-x). \quad (9)$$

La hauteur piézométrique au centre est alors:

$$h_{\max}^{\;2} = h_0^{\,2} + \frac{a}{K}\frac{L^2}{4}. \quad (10)$$

On peut déduire la valeur de la conductivité hydraulique en fonction des autres paramètres:

$$K = \frac{a}{4}\frac{L^2}{h_{\max}^{\;2} - h_0^{\,2}}, \quad (11)$$

ce qui donne K=1/4×30×10^{-3}/(3.16×10^{7})×4×10^{6}/(140^{2}-100^{2}) m/s=10^{-7} m/s. Cette valeur correspond à une perméabilité de 10 mD.

2) On est ici dans le cas d'un problème de diffusion à une dimension. La diffusivité κ est ici la diffusivité hydraulique donnée par $\kappa=Kh_0/\varepsilon$, où ε est la porosité. La profondeur de pénétration (ou longueur de diffusion) λ pour une onde de période T est alors donnée par $\lambda=\sqrt{\kappa T/\pi}$ et l'atténuation à une profondeur p est $e^{-p/\lambda}$. Or l'atténuation indiquée pour la marée M2 avec p=2 m est 1/5. On a donc λ=2/Log5=1.24 m. La conductivité hydraulique est alors : $K=\varepsilon\pi\lambda^2/h_0T$=0.05×$\pi$×1.24^{2}/100/(12.42×3600) m/s=0.54×10^{-7} m/s, soit 5.4 mD. Cette valeur ne coïncide pas exactement avec la valeur obtenue précédemment mais elle est du même ordre de grandeur.

TDGE1E5:

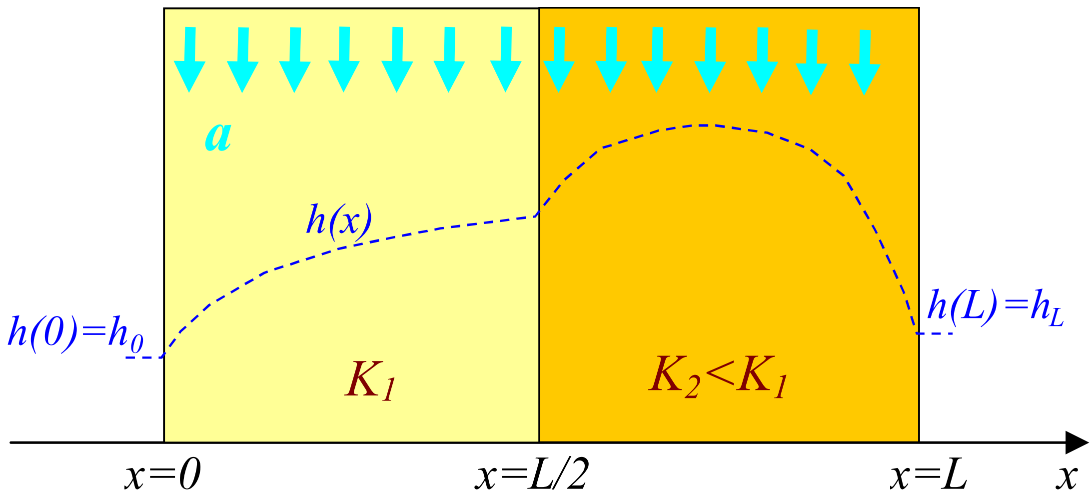
Dans l'approximation de Dupuit, le débit Q dans un forage de rayon r_0 où on observe un rabattement h_0 est lié au rabattement h_1 observé à une distance r_1 par :

$$Q=\pi K\frac{h_1^2-h_0^2}{Log\frac{r_1}{r_0}}, \qquad (12)$$

où K est la conductivité hydraulique.

On a donc ici K=10^{-3}/π×Log(15/0.1)/(12.7^{2}-12.3^{2})=16×10^{-5} m/s, soit une perméabilité de 16 D.

TDGE1E6:



Dans l'approximation de Dupuit (voir ci-dessus), la hauteur piézométrique $h(x)$ vérifie l'équation :

$$\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right)=-\frac{a}{K}, \qquad (13)$$

où K est la conductivité hydraulique et a l'infiltration. Dans le cas où a ne dépend pas de la position, cette équation s'intègre :

$$h_1^2=-\frac{a}{K_1}x^2+A_1x+B_1, \qquad (14)$$

dans le milieu 1 (*0<x<L/2*) et :

$$h_2^2 = -\frac{a}{K_2}x^2 + A_2 x + B_2 \,, \tag{15}$$

dans le milieu 2 (*L/2<x<L*), A_1, B_1, A_2 *et* B_2 étant des constantes. Les valeurs des constantes sont imposées par les conditions aux limites. On a d'abord une contrainte à chaque bord: $h_1(0)=h_0$ et $h_2(L)=h_L$. On a en outre une relation de continuité de $h(x)$ à la frontière entre les deux milieux : $h_1(L/2)=h_2(L/2)$. Ces trois conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} B_1 = h_0^2 \\ B_2 = h_L^2 - A_2 L + \dfrac{a}{K_2}L^2 \\ -\dfrac{a}{K_1}\dfrac{L^2}{4} + A_1\dfrac{L}{2} + B_1 = -\dfrac{a}{K_2}\dfrac{L^2}{4} + A_2\dfrac{L}{2} + B_2 \end{cases} . \tag{16}$$

Enfin, on peut écrire la conservation du flux d'eau à la frontière entre les deux milieux, autrement dit :

$$-K_1 h_1 \left.\frac{dh_1}{dx}\right|_{x=L/2} = -K_2 h_2 \left.\frac{dh_2}{dx}\right|_{x=L/2} , \tag{17}$$

ce qui s'écrit :

$$K_1 \left.\frac{dh_1^{\,2}}{dx}\right|_{x=L/2} = K_2 \left.\frac{dh_2^{\,2}}{dx}\right|_{x=L/2} , \tag{18}$$

ou encore, en utilisant (14) et (15) :

$$K_1\left(-\frac{2a}{K_1}\frac{L}{2} + A_1\right) = K_2\left(-\frac{2a}{K_2}\frac{L}{2} + A_2\right), \tag{19}$$

soit : $K_1A_1=K_2A_2$. En injectant cette relation dans la troisième équation de (16), il vient :

$$-\frac{a}{K_1}\frac{L^2}{4} + \frac{K_2}{K_1}A_2\frac{L}{2} + h_0^2 = -\frac{a}{K_2}\frac{L^2}{4} + A_2\frac{L}{2} + \left(h_L^2 - A_2 L + \frac{a}{K_2}L^2\right) \tag{20}$$

$$A_2\frac{L}{2}\frac{K_2+K_1}{K_1} = h_L^2 - h_0^2 + a\frac{L^2}{4}\left(\frac{3}{K_2} + \frac{1}{K_1}\right) \tag{21}$$

$$A_2 = \frac{2}{L}\,\frac{K_1\left(h_L^2 - h_0^2\right) + a\dfrac{L^2}{4}\left(1 + 3\dfrac{K_1}{K_2}\right)}{K_1 + K_2} \tag{22}$$

On obtient alors :

$$A_1 = \frac{K_2}{K_1}\,\frac{2}{L}\,\frac{K_1\left(h_L^2 - h_0^2\right) + a\dfrac{L^2}{4}\left(1 + 3\dfrac{K_1}{K_2}\right)}{K_1 + K_2} \tag{23}$$

et :

$$B_2 = h_L^2 - 2\,\frac{K_1\left(h_L^2 - h_0^2\right) + a\dfrac{L^2}{4}\left(1 + 3\dfrac{K_1}{K_2}\right)}{K_1 + K_2} + \frac{a}{K_2}L^2 \,. \tag{24}$$

La ligne de partage des eaux se situe dans le milieu ayant la plus faible conductivité hydraulique, 2 ici. Dans ce milieu 2, la ligne de partage des eaux est définie par :

$$\left.\frac{dh_2^2}{dx}\right|_{x=x_{WD}} = 0\,, \tag{25}$$

soit :

$$-\frac{2a}{K_2}x_{WD} + A_2 = 0\,. \tag{26}$$

On a donc :

$$\boxed{x_{WD} = \frac{1}{L}\frac{K_1K_2\dfrac{h_L^2-h_0^2}{a}+\dfrac{L^2}{4}\left(K_2+3K_1\right)}{K_1+K_2}}\,. \tag{27}$$

Pour $h_0=h_L$, on a :

$$x_{WD} = \frac{L}{2}+\frac{L}{4}\frac{K_1-K_2}{K_1+K_2}\,. \tag{28}$$

La hauteur maximale de l'aquifère est :

$$h_{\max}^2 = -\frac{a}{K_2}x_{WD}{}^2 + A_2x_{WD} + h_L^2 - A_2L + \frac{a}{K_2}L^2\,, \tag{29}$$

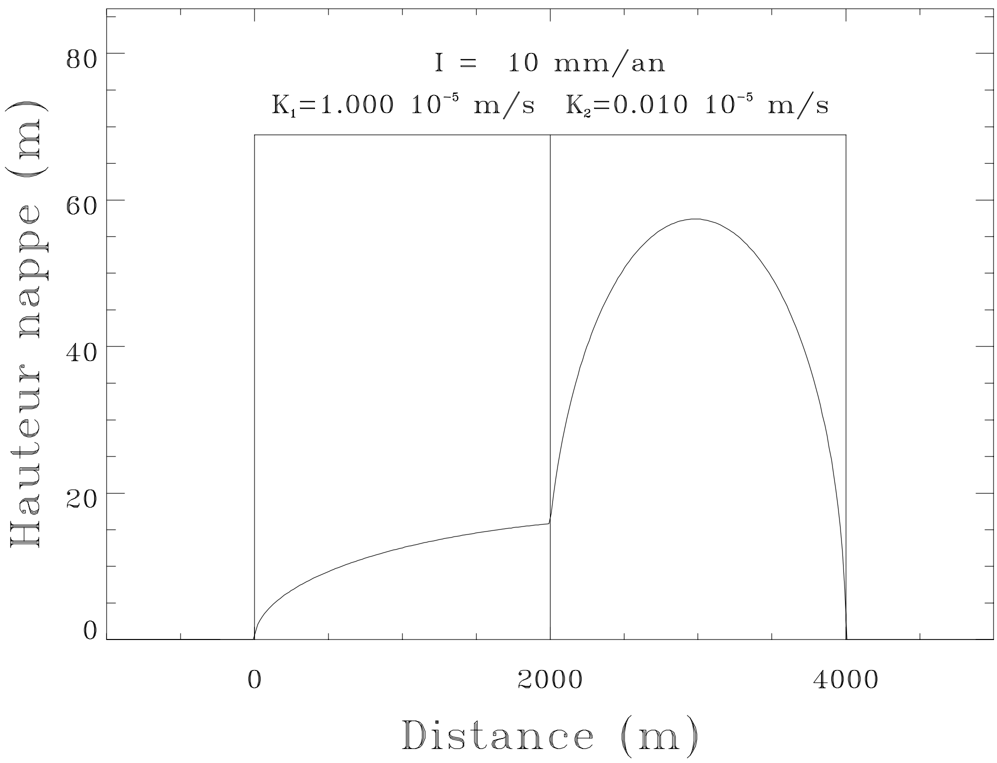
soit, en exprimant A_2 en fonction de x_{WD} (équation 26) :

$$h_{\max}^2 = -\frac{a}{K_2}x_{WD}{}^2 + 2\frac{a}{K_2}x_{WD}{}^2 + h_L^2 - 2\frac{a}{K_2}x_{WD}L + \frac{a}{K_2}L^2\,. \tag{30}$$

On a donc :

$$\boxed{h_{\max}^2 = h_L^2 + \frac{a}{K_2}\left(L-x_{WD}\right)^2}\,. \tag{31}$$

Cette relation est d'ailleurs tout à fait générale.
Un exemple de cas est représenté sur la figure ci-dessous:



TDGE1E7:

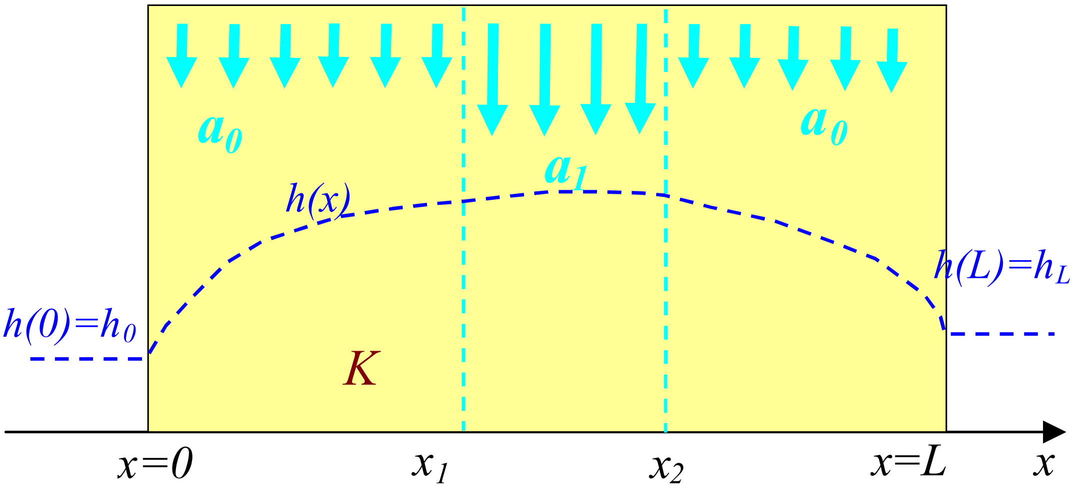
Commençons par le cas d'une segmentation du massif en trois zones 1, 2 et 3 d'infiltration constante $I_1=a_0$, $I_2= a_0$ et $I_3=a_0$. Dans l'approximation de Dupuit (voir ci-dessus), la hauteur piézométrique $h_i(x)$ vérifie l'équation :

$$\frac{d}{dx}\left(h_i\frac{dh_i}{dx}\right)=-\frac{I_i}{K}, \tag{32}$$

où K est la conductivité hydraulique. Dans le cas où I_i ne dépend pas de la position, cette équation s'intègre :

$$h_i^2=-\frac{I_i}{K}x^2+A_ix+B_i\ , \tag{33}$$

où A_i et B_i sont des constantes.



Pour trouver les six constantes, on écrit d'abord les conditions aux bornes:

$$\begin{cases} h_0^2=B_1 \\ h_L^2=-\dfrac{I_3}{K}L^2+A_3L+B_3 \end{cases}. \tag{34}$$

On écrit ensuite la continuité de la hauteur et du flux à chaque frontière de zone. Pour la limite entre la zone 1 et la zone 2 ($x=x_1$), on a:

$$\begin{cases} -\dfrac{I_1}{K}{x_1}^2+A_1x_1+B_1=-\dfrac{I_2}{K}{x_1}^2+A_2x_1+B_2 \\ -2\dfrac{I_1}{K}x_1+A_1=-2\dfrac{I_2}{K}x_1+A_2 \end{cases}. \tag{35}$$

et, pour la limite entre la zone 2 et la zone 3 ($x=x_2$), on a:

$$\begin{cases} -\dfrac{I_2}{K}{x_2}^2+A_2x_2+B_2=-\dfrac{I_3}{K}{x_2}^2+A_3x_2+B_3 \\ -2\dfrac{I_2}{K}x_2+A_2=-2\dfrac{I_3}{K}x_2+A_3 \end{cases}. \tag{36}$$

On remarque qu'en multipliant la deuxième équation de (35) par $-x_1$ et en ajoutant à la première, on obtient:

$$\frac{I_1}{K}{x_1}^2+B_1=\frac{I_2}{K}{x_1}^2+B_2, \tag{37}$$

soit:

$$B_2 = h_0^2 + \frac{I_1 - I_2}{K} {x_1}^2 \; . \qquad (38)$$

De même:

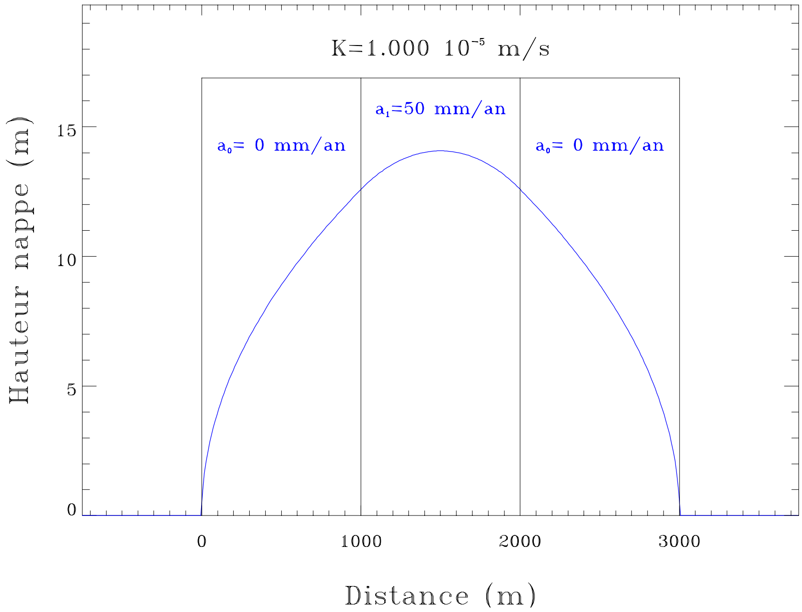
$$B_3 = B_2 + \frac{I_2 - I_3}{K} {x_2}^2 = h_0^2 + \frac{I_1 - I_2}{K} {x_1}^2 + \frac{I_2 - I_3}{K} {x_2}^2 \; . \qquad (39)$$

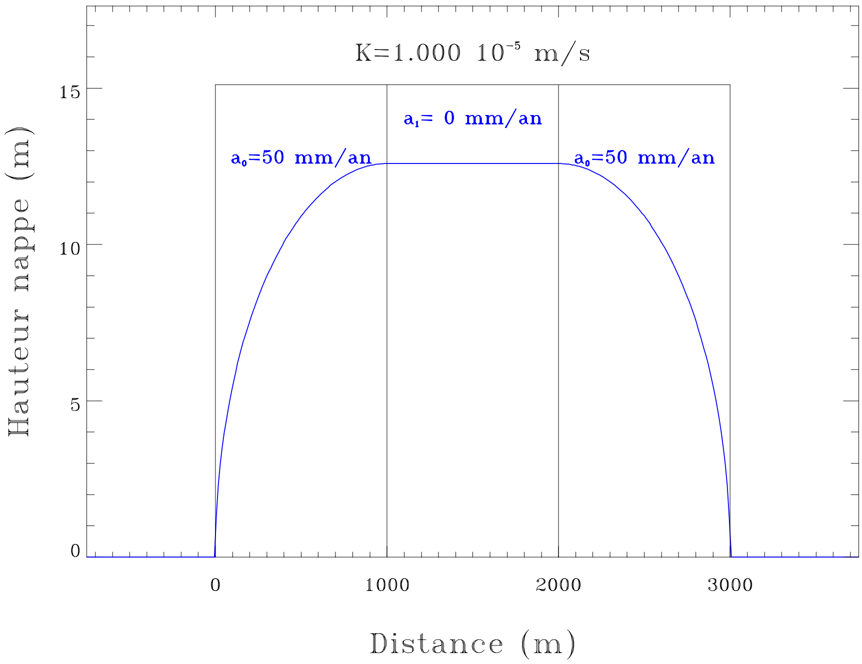
On obtient alors A_3 à partir de la deuxième équation de (34) :

$$A_3 = \frac{1}{L}\left(h_L^2 + \frac{I_3}{K} L^2 - B_3 \right) ; \qquad (40)$$

puis A_2 et A_1 s'obtiennent successivement des deuxièmes équations de (36) et (35).

Deux exemples sont représentés dans les figures suivantes.





Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un milieu homogène de conductivité hydraulique K avec une infiltration $a(x)$ variant avec la position comme $a_0\sin^2(x\pi/L)$. On a:

$$\frac{dh^2}{dx} = -\frac{2a}{K} = -\frac{2a_0}{K}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) = -\frac{2a_0}{K}\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2} = -\frac{a_0}{K} + \frac{a_0}{K}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \quad (41)$$

L'intégration est alors immédiate:

$$h^2 = -\frac{a_0}{2K}x^2 + Ax + B - \frac{a_0}{K}\frac{L^2}{4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \quad (42)$$

où A et B sont deux constantes:

Les conditions aux bornes imposent:

$$\begin{cases} h_0{}^2 = B - \dfrac{a_0}{K}\dfrac{L^2}{4\pi^2} \\ h_L{}^2 = -\dfrac{a_0}{2K}L^2 + AL + B - \dfrac{a_0}{K}\dfrac{L^2}{4\pi^2} \end{cases}. \quad (43)$$

d'où on tire:

$$\begin{cases} A = \dfrac{a_0}{2K}L + \dfrac{h_L{}^2 - h_0{}^2}{L} \\ B = h_0{}^2 + \dfrac{a_0}{K}\dfrac{L^2}{4\pi^2} \end{cases}. \quad (44)$$

La forme de la nappe est alors :

$$h^2 = -\frac{a_0}{2K}x^2 + \left(\frac{a_0}{2K}L + \frac{h_L{}^2 - h_0{}^2}{L}\right)x + h_0{}^2 + \frac{a_0}{K}\frac{L^2}{4\pi^2} - \frac{a_0}{K}\frac{L^2}{4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \quad (45)$$

ou :

$$h^2 = h_0{}^2 + \frac{a_0}{2K}x(L-x) + \frac{h_L{}^2 - h_0{}^2}{L}x + \frac{a_0}{K}\frac{L^2}{2\pi^2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (46)$$

Dans le cas où $h_0=h_L=0$, on a :

$$h^2 = \frac{a_0}{2K}\left[x(L-x) + \frac{L^2}{\pi^2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]. \quad (47)$$

La hauteur maximale de la nappe sera alors ($x=L/2$) :

$$h_{\max} = \sqrt{\frac{a_0}{K}}\frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi^2+4}{2}}. \quad (48)$$