Physique pour Geosciences (1) : THERMODYNAMIQUE
Corrections des exercices ExPG1Th1

kaminski@ipgp.jussieu.fr

Quelques exemples de dérivées simples

Dériver *deux fois* les fonctions suivantes par rapport à x.

$$\begin{aligned} f &= 3x, \\ f' &= 3, \\ f'' &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= x^n, \\ f' &= nx^{n-1}, \\ f'' &= n(n-1)x^{n-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= 2x/(1+x) = 2x(1+x)^{-1}, \\ f' &= 2(1+x)^{-1}\left(1 - x(1+x)^{-1}\right), \\ f'' &= 4(1+x)^{-2}\left(x(1+x)^{-1} - 1\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= (\ln[x])^2, \\ f' &= 2\ln(x)/x, \\ f'' &= 2/x^2\,(1 - \ln(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \exp(x^2), \\ f' &= 2x\exp(x^2), \\ f'' &= 2\exp(x^2)\left(1+2x^2\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \sin(x), \\ f' &= \cos(x), \\ f'' &= -\sin(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \cos(2x+a), \\ f' &= -2\sin(2x+a), \\ f'' &= -4\cos(2x+a). \end{aligned}$$

Quelques exemples de dérivées partielles

Pour les fonctions $f(x,y)$ suivantes, donner l'expression des dérivées partielles f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{yy} et $f''_{xy} = f''_{yx}$.

$$\begin{array}{rcl} f & = & 3xy, \\ f'_x = 3y, & -- & f'_y = 3x, \\ f''_{xx} = 0, & -- & f''_{yy} = 0, \\ f''_{xy} & = & 3. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f & = & a + 3x^2 + \ln(y), \\ f'_x = 6x, & -- & f'_y = 1/y, \\ f''_{xx} = 6, & -- & f''_{yy} = -1/y^2, \\ f''_{xy} & = & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f & = & x/y, \\ f'_x = 1/y, & -- & f'_y = -x/y^2, \\ f''_{xx} = 0, & -- & f''_{yy} = 2x/y^3, \\ f''_{xy} & = & -1/y^2. \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
f & = & \ln{(x/y)} = \ln x - \ln y, \\
f'_x = 1/x, & -- & f'_y = -1/y, \\
f''_{xx} = -1/x^2, & -- & f''_{yy} = 1/y^2, \\
f''_{xy} & = & 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
f & = & x^y = \exp(y \ln x), \\
f'_x = yx^{y-1}, & -- & f'_y = (\ln x)x^y, \\
f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, & -- & f''_{yy} = (\ln x)^2 x^y, \\
f''_{xy} & = & x^{y-1}(1 + y \ln x).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
f & = & \sin(xy), \\
f'_x = y\cos(xy), & -- & f'_y = x\cos(xy), \\
f''_{xx} = -y^2 \sin(xy), & -- & f''_{yy} = -x^2 \sin(xy), \\
f''_{xy} & = & \cos(xy) - xy\sin(xy).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
f & = & \cos(x+y), \\
f'_x = -\sin(x+y), & -- & f'_y = -\sin(x+y), \\
f''_{xx} = -\cos(x+y), & -- & f''_{yy} = -\cos(x+y), \\
f''_{xy} & = & -\cos(x+y).
\end{array}
$$

Différentielles

1 Soit une fonction $U(x,y) = ax + c/(y-b)$ avec a, b et c des constantes. Donner la forme différentielle de U. Vérifier l'égalité de Maxwell.

Les dérivées partielles de U s'écrivent

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial U}{\partial x} & = & a, \\
\dfrac{\partial U}{\partial y} & = & -c/(y-b)^2.
\end{array}
$$

D'où la forme différentielle recherchée

$$\mathrm{d}U = a\mathrm{d}x - \frac{c}{(y-b)^2}\mathrm{d}y.$$

On vérifie facilement l'égalité de Maxwell :

$$\frac{\partial\,(a)}{\partial y} = \frac{\partial\,(-c/[y-b]^2)}{\partial x} = 0$$

2 On a mesuré en laboratoire une quantité δQ correspondant aux variations d'une propritété Q en fonction de deux paramètres x et y. On a obtenu $\delta Q = a\mathrm{d}x + cx/(y-b)\mathrm{d}y$. Est-ce une différentielle au sens mathématique ?

Pour savoir si δQ est une forme différentielle, on utilise la relation de Maxwell. Ici on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial\,(a)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial\,(cx/[y-b])}{\partial x} &= c/(y-b) \neq 0. \end{aligned}$$

L'expression δQ ne vérifie pas l'égalité de Maxwell et n'est donc pas une forme différentielle. Plus précisément en mathématiques on dira que δQ n'est pas une différentielle totale exacte.