Corrigé du DM 2007. Pesanteur ...

Exercice 1

$$\vec{F} = -\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = +\Omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla} V^{rot} \Rightarrow \quad \frac{\partial V^{rot}}{\partial x} = \Omega^2 x \Rightarrow V = \Omega^2 \frac{x^2}{2} + cte|_x$$

$$\frac{\partial V^{rot}}{\partial y} = \Omega^2 y \Rightarrow V = \Omega^2 \frac{y^2}{2} + cte|_y$$

$$\frac{\partial V^{rot}}{\partial z} = 0 \rightarrow V = cte|_z$$

$$\Rightarrow \boxed{V^{rot} = \frac{\Omega^2}{2}(x^2+y^2)}$$

$$P = -4\pi G\rho c \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta}}$$

on pose $\mu\cos\theta = \sin\varphi \Rightarrow +\mu\sin\theta\, d\theta = -\cos\varphi\, d\varphi$

on remplace $c^2 = a^2(1-\mu^2)$

$$\Rightarrow P = -4\pi G\rho \sqrt{1-\mu^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{1-\mu^2\cos^2\theta}}$$

on fait le changement de variable $\mu\cos\theta = \sin\varphi$

$$\Rightarrow P = -4\pi G\rho \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu^3} \int_0^{\arcsin\mu} \sin^2\varphi \, d\varphi$$

avec $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$

$$\rightarrow P = -2\pi G\rho \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu^3}\left[\arcsin\mu - \frac{1}{2}\sin 2\arcsin\mu\right]$$

Rem. $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

- $\arcsin\mu = \mathrm{Arctg}\,\lambda$ avec $\mu^2 = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$

  (car $\arcsin x = \mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$)

$$\rightarrow P = -2\pi G\rho \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left[\mathrm{Arctg}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right]$$

Calcul de Q.

$$Q = -4\pi G\rho a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}{c^2 \sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}$$

Changement de variable : $\lambda \cos\theta = tg\varphi$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{1+tg^2\varphi}{-\sqrt{\lambda^2 - tg^2\varphi}} \, d\varphi$$

On remplace $c^2 = a^2/(1+\lambda^2)$ et $\sin\theta \, d\theta = -\frac{1+tg^2\varphi}{\lambda}$

$\Rightarrow$

$$Q = -4\pi G\rho \int_0^{\mathrm{arctg}\,\lambda} \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\right) tg^2\varphi \, d\varphi$$

$$= -4\pi G\rho \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} \Big[tg\varphi - \varphi \Big]_0^{\mathrm{arctg}\,\lambda}$$

$$Q = +4\pi G\rho \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} \Big[\mathrm{arctg}\,\lambda - \lambda \Big]$$

- Potentiel à la surface de l'ellipsoïde.

→ Le potentiel gravitationnel à l'intérieur de l'ellipsoïde homogène est tel que $\vec{\nabla} V^g = \vec{A}$

$$\Rightarrow \quad V^g = \frac{P}{2}(x^2+y^2) + \frac{Q}{2} z^2 + \underbrace{V^g(0)}_{\text{constante d'intégration}}$$

→ Le potentiel total $V = V^{rot} + V^g$ s'écrit

$$V = \frac{P+\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{Q}{2} z^2 + V^g(0).$$

→ A la surface de l'ellipsoïde $x^2+y^2 = a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2$

et $V^{el} = \frac{P+\omega^2}{2} a^2 + V^g(0) + \frac{z^2}{2}\left(Q - \frac{a^2}{c^2}(P+\omega^2)\right).$

Pour que la surface de l'ellipsoïde homogène soit une équipotentielle, il faut V^{el} = constante.

⇒ le terme devant z^2 doit être nul.

$$\boxed{Qc^2 = a^2(P+\omega^2)}$$

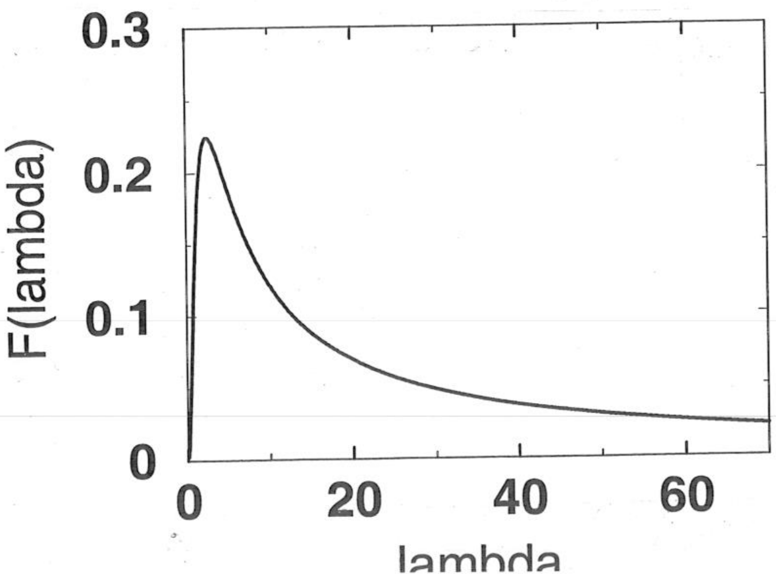
Etude de la fonction $\frac{\omega^2}{2\pi G\rho}$

$F(\lambda) = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho}$ et $\omega^2 = \frac{Qc^2 - Pa^2}{a^2}$ si l'ellipsoïde est une figure d'équilibre.

$\Rightarrow F(\lambda) = \frac{1}{2\pi G\rho}\left(\frac{c^2}{a^2}Q - P\right)$

$\Rightarrow F(\lambda) = \frac{1}{\lambda^3}\left[-3\lambda + (\lambda^2+3)\,\mathrm{Artg}\,\lambda\right]$

Si l'ellipsoïde n'est pas allongé, on a $c > a$ et donc $\lambda^2 < 0$ ce qui impliquerait $\omega^2 < 0$ or ceci est impossible.



Pour la Terre, ω est petit ($\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ /s)

$\Rightarrow$ on est en équilibre pour un ellipsoïde peu aplati ($\lambda \ll 1$, ou pour un ellipsoïde « plat » ($\lambda \to \infty$).

$\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ /s $\Rightarrow$ $\lambda = 0{,}0828$

$\lambda \simeq 700$

Exercice 2 Formule de Somigliana.

2.1 • La normale à une surface $f(x,y,z) = 0$ est $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{\nabla} f\|} \cdot \vec{\nabla} f$.

soit, pour l'ellipsoïde de révolution.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/a^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{n_0} \quad \text{avec } n_0 = \sqrt{\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{a^4} + \frac{4z^2}{c^4}}$$

• Force d'attraction + force centrifuge $= \vec{F}$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} (P+\omega^2)x \\ (P+\omega^2)y \\ Qz \end{pmatrix}$$ d'après exercice 1.

A la surface de l'ellipsoïde en équilibre, on a $\frac{Qc^2}{a^2} = P + \omega^2$

$$\Rightarrow \vec{F} = (P+\omega^2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{a^2}{c^2}z \end{pmatrix}$$

on note $A_1 = P+\omega^2$ une constante.

- La pesanteur est la projection de la force sur la normale:

$$\gamma_1 = \vec{F}.\vec{n}$$

$$\gamma_1 = \frac{(P+\omega^2)}{n_0}\left[\frac{2}{a^2}(x^2+y^2) + \frac{2}{c^2}\frac{a^2}{c^2}z^2\right]$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = \frac{2}{a^2}\frac{(P+\omega^2)}{n_0}\left[x^2+y^2+\frac{a^4}{c^4}z^2\right]$$

On a $n_0 = \frac{2}{a^2}\sqrt{x^2+y^2+\frac{a^4}{c^4}z^2}$

$$\rightarrow \gamma_1 = (P+\omega^2)\left[x^2+y^2+\frac{a^4}{c^4}z^2\right]^{1/2}$$

$$\rightarrow \boxed{\gamma_1 = A_1\sqrt{x^2+y^2+\frac{a^4}{c^4}z^2}}$$ et $A_1 = P+\omega^2$

avec $x^2+y^2+\frac{a^2}{c^2}z^2 = a^2$

- coordonnées sphériques: $\begin{cases} x = r_E \sin\theta\cos\varphi \\ y = r_E \sin\theta\sin\varphi \\ z = r_E\cos\theta \end{cases}$

avec r_E rayon externe de l'ellipsoïde
θ la colatitude géocentrique.

On a $r_E^2 = \frac{a^2c^2}{a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta}$

On remplace dans γ_1

$$\Rightarrow \gamma_1 = A_1\frac{a}{c}\sqrt{\frac{a^4\cos^2\theta + c^4\sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta}}$$

- Soit φ la latitude géodésique:

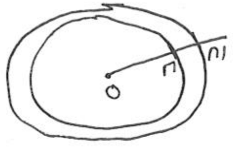
on a $\cot\theta = \frac{c^2}{a^2}\tan\varphi$

$$\rightarrow \gamma_1 = A_1\frac{a}{c}\sqrt{\frac{a^4\cot^2\theta + c^4}{a^2\cot^2\theta + c^2}}$$

$$\gamma_1 = A_1 a^2 \Big/ \sqrt{a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi}$$

$\gamma_1 = A/P$ avec $\begin{cases} A = A_1 a^2 \\ P = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi} \end{cases}$

3 Pesanteur à la surface de l'homoïde.



$d\rho$: épaisseur infiniment petite au point M suivant la normale.

En vertu de l'homothétie on montre (voir Cours).

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{da}{a}$$

Pesanteur de l'homoïde :

$$\gamma_2(M) = 4\pi G \underbrace{\rho\, d\rho}_{}$$

σ : densité superficielle de masse

$$\Rightarrow \gamma_2(M) = 4\pi G\rho \frac{da}{a} \cdot \rho$$

On note $B = 4\pi G \rho \frac{da}{a}$ une constante.

$\Rightarrow$ on peut mettre la pesanteur sur l'homoïde sous la forme $\underline{\gamma_2 = B \cdot \rho}$

2.3 Calcul de la pesanteur à la surface de l'ellipsoïde de référence.

La pesanteur est de la forme $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{A}{\rho} + B\rho = (A + B\rho^2)/\rho$$

avec $\rho^2 = a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi$ où φ est la latitude géodésique.

- au pôle : $\rho = c \Rightarrow \gamma_P = \frac{A}{c} + Bc$
- à l'équateur : $\rho = a \rightarrow \gamma_E = \frac{A}{a} + Ba$.

On en déduit :

$$\begin{cases} A = \dfrac{ac}{a^2 - c^2}(a\gamma_P - c\gamma_E) \\[2ex] B = \dfrac{ac}{a^2-c^2}\left(-\dfrac{\gamma_P}{a} + \dfrac{\gamma_E}{c}\right) \end{cases}$$

on remplace dans γ avec $A + B\rho^2 = a\gamma_E\cos^2\varphi + c\gamma_P\sin^2\varphi$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{a\gamma_E\cos^2\varphi + b\gamma_P\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

formule de Somigliana.

On pose $k = \frac{c\gamma_P - a\gamma_E}{a\gamma_E}$ et $e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$

$\rightarrow$ $p = a\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}$ et $c\gamma_P = a\gamma_E(1+k)$

$$\rightarrow A + Bp^2 = a\gamma_E\left(\cos^2\varphi + (1+k)\sin^2\varphi\right)$$
$$= a\gamma_E\left(1 + k\sin^2\varphi\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\gamma = \gamma_E \frac{1 + k\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}}$$

Développement limité en k et $e^2 << 1$.

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma_E} = \left(1 + k\sin^2\varphi\right)\left(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi + \frac{3}{8}e^4\sin^4\varphi + \dots\right)$$
$$= 1 + \left(k + \frac{e^2}{2}\right)\sin^2\varphi + \left(\frac{3}{8}e^4 + \frac{ke^2}{2}\right)\sin^4\varphi + \dots$$

On pose $a_2 = k + e^2/2$ et $a_4 = \frac{3}{8}e^4 + \frac{k}{2}e^2$

$$\rightarrow \gamma = \gamma_E\left(1 + a_2\sin^2\varphi + a_4\sin^4\varphi + \dots\right).$$

Exercice 3. La planète Mars

Si la planète est en équilibre hydrostatique, sa forme est une équipotentielle et en conséquence la 1ère formule de Clairaut est vérifiée :

$$\alpha_H = \frac{3}{2}J_2 + \frac{m}{2}$$

Pour Mars, on a $\begin{cases} \alpha = 6{,}4763 \cdot 10^{-3} \\ \frac{3}{2}J_2 + \frac{m}{2} = 5{,}23 \times 10^{-3} \end{cases}$

$\rightarrow$ $\alpha > \alpha_H$ la planète n'est pas en équilibre hydrostatique.

Le champ de gravité de Mars a une composante non-hydrostatique créée par Tharsis, large structure soutenue par la dynamique du manteau, donc non-hydrostatique.