Mécanique des solides et des planètes

MS1: Exercices du 29 janvier 2007

2007MS1E1C :

La durée t_0 de la chute sans vitesse initiale depuis une hauteur d=20 m est :

$$t_0 = \sqrt{\frac{2d}{g}} = 2\text{s} \,. \tag{1}$$

et la vitesse V_0 au point d'impact est :

$$V_0 = \sqrt{2gd} = 20\,\text{ms}^{-1} \,. \tag{2}$$

Le premier rebond s'effectue avec une énergie cinétique qui est 81 % de l'énergie cinétique au premier impact, soit avec une vitesse V_1 donnée par :

$$V_1 = \sqrt{0.81}V_0 = 0.9V_0 \,. \tag{3}$$

Soit t_1 la durée totale de ce premier rebond. Au temps $t_1/2$, la balle est au maximum du rebond et sa vitesse est nulle. On a donc :

$$0 = V_1 - g\frac{t_1}{2} \,, \tag{4}$$

d'où :

$$t_1 = \frac{2V_1}{g} = \frac{2\times 0.9\times 20}{10} = 3.6\text{s} \,. \tag{5}$$

Le deuxième rebond s'effectue avec une vitesse initiale $V_2=\alpha V_1$, avec α=0.9, et sa durée est $t_2=2V_2/g=\alpha t_1$, et ainsi de suite. La durée totale T du mouvement est donc :

$$T = t_0 + t_1 + \alpha t_1 + \alpha^2 t_1 + \ldots = t_0 + t_1\left(1+\alpha+\alpha^2+\ldots\right), \tag{6}$$

soit :

$$T = t_0 + \frac{t_1}{1-\alpha} \,, \tag{7}$$

soit T=2+36=38 s.

2007MS1E2C :

Soient $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ les vitesses des jetons avant le choc, $\vec{V}_1'$ et $\vec{V}_2'$ après le choc. Comme les masses des deux jetons sont égales, la conservation de la quantité de mouvement totale s'écrit :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_1' + \vec{V}_2' \,. \tag{8}$$

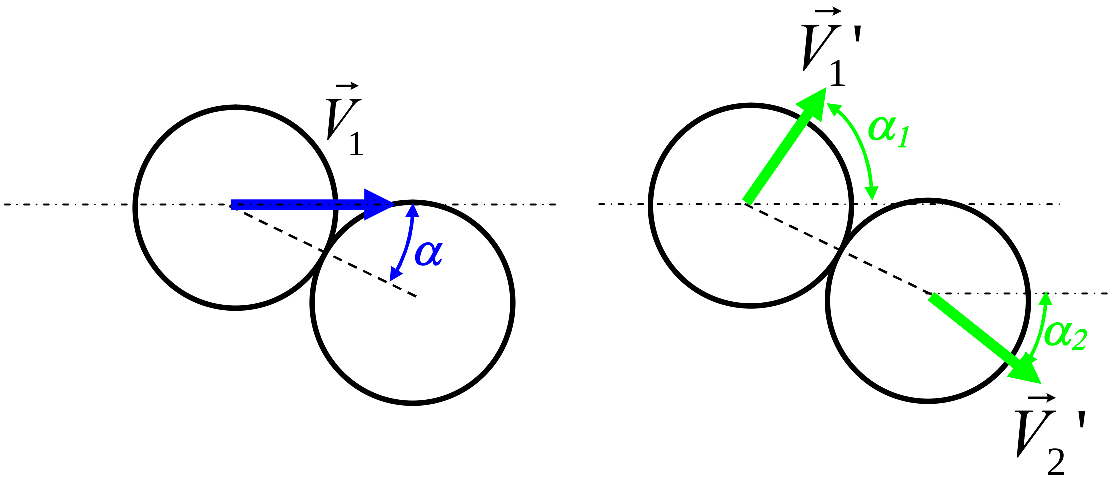
En projetant sur un axe parallèle à la vitesse initiale et un axe perpendiculaire (voir schéma), on obtient :

$$\begin{cases} V_1 = V_1'\cos\alpha_1 + V_2'\cos\alpha_2 \\ 0 = V_1'\sin\alpha_1 + V_2'\sin\alpha_2 \end{cases}, \tag{9}$$

où α_1 et α_2 sont les angles indiqués sur la figure.

Comme le choc est élastique, l'énergie cinétique est conservée :

$$V_1^2 = V_1'^2 + V_2'^2 \,. \tag{10}$$



Comme le choc est élastique et sans frottement au point de contact, la composante normale de la vitesse relative entre les deux jetons s'inverse au cours du choc, ce qui s'écrit :

$$-V_1\cos\alpha = V_1'\cos(\alpha+\alpha_1) - V_2'\cos(\alpha+\alpha_2)\,, \tag{11}$$

où α est l'angle entre la droite joignant les centres de deux jetons et la vitesse initale $\vec{V}_1$. Dans les conditions particulières du choc considéré, on a :

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\,, \tag{12}$$

soit α=30°.

Posons $x_1=V_1'/V_1$ et $x_2=V_2'/V_1$. La relation (11) devient :

$$-\cos\alpha = (x_1\cos\alpha_1 - x_2\cos\alpha_2)\cos\alpha - (x_1\sin\alpha_1 - x_2\sin\alpha_2)\,, \tag{13}$$

soit :

$$-1 = x_1\cos\alpha_1 - x_2\cos\alpha_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1\sin\alpha_1 - x_2\sin\alpha_2)\,, \tag{14}$$

tandis que la relation (10) devient :

$$1 = x_1^2 + x_2^2\,. \tag{15}$$

Mais on a aussi d'après la relation (9) :

$$\begin{cases} 1 = x_1\cos\alpha_1 + x_2\cos\alpha_2 \\ 0 = x_1\sin\alpha_1 + x_2\sin\alpha_2 \end{cases}\,, \tag{16}$$

soit :

$$\begin{cases} x_2\cos\alpha_2 = 1 - x_1\cos\alpha_1 \\ x_2\sin\alpha_2 = -x_1\sin\alpha_1 \end{cases}\,, \tag{17}$$

ce qu'on peut remplacer dans (14). On obtient :

$$-1 = 2x_1\cos\alpha_1 - 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}x_1\sin\alpha_1\,, \tag{18}$$

soit :

$$\tan\alpha_1 = \sqrt{3}\,, \tag{19}$$

soit α_1=60°.

Par ailleurs, élevons au carré les deux membres des deux relations (16) et sommons les. on obtient :

$$\begin{aligned}1 &= (x_1\cos\alpha_1 + x_2\cos\alpha_2)^2 + (x_1\sin\alpha_1 + x_2\sin\alpha_2)^2 \\ &= x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + 2x_1x_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2) \\ &= 1 + 2x_1x_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\end{aligned} \tag{20}$$

soit :

$$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0\ . \tag{21}$$

ou α_2=-30°.

Les relations (16) s'écrivent maintenant :

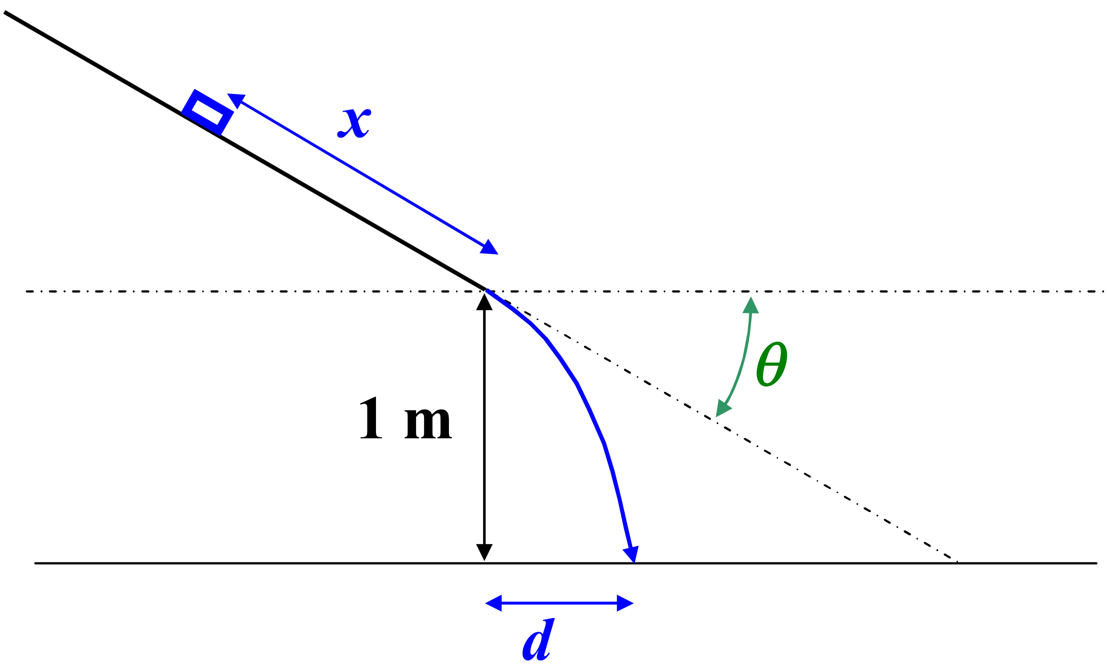
$$\begin{cases}1 = x_1\dfrac{1}{2} + x_2\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 = x_1\dfrac{\sqrt{3}}{2} - x_2\dfrac{1}{2}\end{cases}, \tag{22}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{cases}x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}. \tag{23}$$

La vitesse du premier jeton passe donc de 10 m/s à 5 m/s, et celle du second de 0 à 8.7 m/s. Une grande partie de l'énergie cinétique (75%!) est transmise au second jeton pendant le choc.

2007MS1E3C :



Soit V_0 la vitesse du mobile quand il arrive au bout du plan incliné. La distance horizontale d entre le bout du plan incliné et le point d'impact avec le sol vérifie (voir chapitre 1) :

$$0 = 1 + \tan\theta\, d - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{V_0^2 \cos^2\theta}, \tag{24}$$

soit, avec θ=-30°:

$$0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} d - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{V_0^2 3/4} \ . \qquad (24)$$

La vitesse au bout du plan incliné est liée à la distance parcourue sur le plan inclinée par :

$$V_0^2 = 2 \sin\theta g x = g x \ . \qquad (25)$$

On a donc :

$$0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} d - \frac{2}{3} \frac{d^2}{x} \ . \qquad (26)$$

soit :

$$\boxed{x = \frac{2}{3} \frac{d^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} d}} \ . \qquad (27)$$

Si on représente la quantité $\frac{2}{3} \frac{d^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} d}$ en fonction de *x*, on attend que les points expérimentaux soient alignés sur une droite de pente 1. En présence de friction sur le plan incliné, l'accélération sur le plan incliné sera diminuée, et ainsi la vitesse V_0. La pente observée sera alors inférieure à 1.