

Correction Examen de Statistiques L2

Clément Narteau

29 janvier 2008

Correction Exercice 1

1.

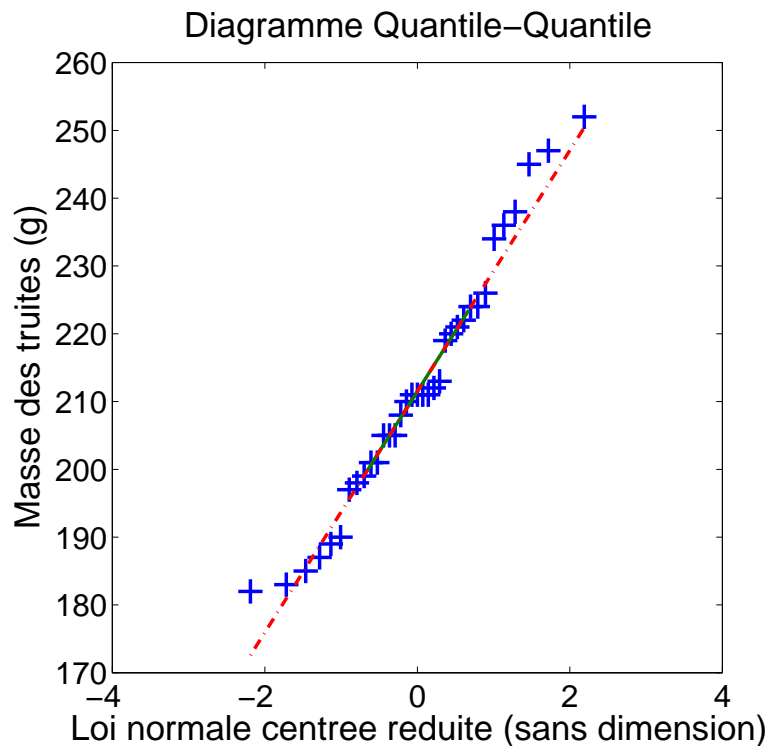
$$\bar{X} = 212.06 \text{ g}, \quad s^2 = 339.41 \text{ g}^2, \quad s = 18.42 \text{ g}.$$

La médiane est égale à 211 g

2.

$$Q_{20} = 197 \text{ g}, \quad Q_{40} = 205 \text{ g}, \quad Q_{60} = 212 \text{ g}, \quad Q_{80} = 224 \text{ g}.$$

3. Il suffit de classer dans l'ordre les données de masse et de les tracer en fonction des valeurs de $F(X)$ que l'on peut lire dans le tableau. Cela donne la figure ci-dessous, à partir de laquelle on peut conclure positivement sur la normalité des données (i.e. la distribution des masses des truites suit une loi normale).



4. On calcule l'intervalle de confiance de μ

$$\bar{X} - z_c \frac{s}{\sqrt{N}} < \mu < \bar{X} + z_c \frac{s}{\sqrt{N}}$$

avec $z_c = 1.96$ au risque de 5% et $z_c = 2.33$ au risque de 1%. On obtient

$$205.95 < \mu_{95} < 218.16 \quad \text{et} \quad 204.04 < \mu_{99} < 220.08$$

Correction Exercice 2

(a) Lorsque les nombres 1 et 2 sortent, le nouveau-né obtient le bac avec la mention passable. Donc

$$p_1 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

(b) Lorsque les nombres 5 et 10 sortent, le nouveau-né n'obtient pas le bac. Donc la probabilité d'être recalé est

$$p = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Les lois de probabilité de X et Y sont donc des lois binômiales de probabilité p avec des nombres de tirages qui sont respectivement $n_X = 3$ et $n_Y = 4$.

$$f(X) = \mathcal{B}(n_X, p) = \mathcal{B}\left(3, \frac{4}{5}\right), \quad f(Y) = \mathcal{B}(n_Y, p) = \mathcal{B}\left(4, \frac{4}{5}\right).$$

(c) C'est la probabilité d'avoir 0 garçon et $\{1, 2, 3\}$ filles, plus la probabilité d'avoir 1 garçon et $\{2, 3\}$ filles, plus la probabilité d'avoir 2 garçons et $\{3\}$ filles.

$$P = (C_4^0(1-p)^4) \times (1 - C_3^0(1-p)^3) + (C_4^1p(1-p)^3) \times (C_3^2p^2(1-p) + C_3^3p^3) + (C_4^2p^2(1-p)^2) \times (C_3^3p^3)$$

$$P \approx 0.106$$

(d) Pour dépasser l'objectif, il faut plus de 0.8×7 bacheliers, c'est à dire au moins six bacheliers. Donc,

$$P = C_7^6p^6(1-p) + p^7 \approx 0.58$$

Correction Exercice 3

On sait que le pourcentage de la population votant pour le candidat A peut être estimé à partir du pourcentage de l'échantillon grâce à la formule

$$\mu_p \in \left[p - z_c \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}; p + z_c \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \right]$$

Pour être élu, il faut que $\mu_p > 0.5$. On peut donc en déduire une valeur de N à partir de laquelle un candidat est sûr d'être élu dans 95% ($z_c = 1.64$) ou 99% ($z_c = 2.33$) des cas :

$$N > \frac{z_c^2 p(1-p)}{(p - \mu_p)^2}$$

(a) Pour $p = 0.533$, il faut au minimum 619 personnes (879 si on prend $z_c = 1.96$).

(b) Pour $p = 0.533$, il faut au minimum 1237 personnes (1517 si on prend $z_c = 2.57$).

(c) Il faut tout simplement trouver les racines de

$$f(p) = (p - \mu_p) - z_c \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

avec $\mu_p = 0.5$, $N = 1350$ et $z_c = 2.33$. On a donc

$$\begin{aligned} f(p) &= 0 \\ (p - \mu_p)^2 &= z_c^2 \frac{p(1-p)}{N} \\ p^2 \left(1 + \frac{z_c^2}{N}\right) - p \left(2\mu_p + \frac{z_c^2}{N}\right) + \mu_p^2 &= 0 \end{aligned}$$

On calcule le déterminant

$$\Delta = \left(1 + \frac{z_c^2}{N}\right)^2 - 4\mu_p^2 \left(1 + \frac{z_c^2}{N}\right) \approx 0.004$$

et la racine

$$p_1 = \frac{(2\mu_p + \frac{z_c^2}{N}) + \sqrt{\Delta}}{2(1 + \frac{z_c^2}{N})} \approx 0.53159$$

Il faut donc au minimum

$$N_1 = p_1 \times N = 718 \text{ personnes}$$

exprimant une opinion favorable au candidat A.

Cela donne une proportion finale de

$$p = \frac{N_1}{N} = 0.53185$$

Correction Exercice 4

1. Les hypothèses sont

H_0 : La femelle coucou adapte la taille de ses oeufs à la taille des oeufs présents dans les nids dans lesquels elle pond.

H_1 : La femelle coucou n'adapte pas la taille de ses oeufs à la taille des oeufs présents dans les nids dans lesquels elle pond.

Il faut utiliser le test de Student sur la différence de moyenne car les échantillons sont petits ($N < 30$). On calcule pour cela

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}} \quad \text{avec} \quad \sigma = \sqrt{\frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$$

Si $t > t_c$ alors on refuse H_0 .

2. On a $N_1 = 12 \text{ mm}$, $N_2 = 10 \text{ mm}$ oeufs, $s_1^2 = 2.94 \text{ mm}$, $s_2^2 = 0.93 \text{ mm}$, $\bar{X}_1 = 28.49 \text{ mm}$, $\bar{X}_2 = 29.99 \text{ mm}$.
Donc

$$\sigma = 1.49 \text{ mm},$$

et

$$t = 2.35.$$

Les valeurs seuils aux risques de 5% et de 1% sont de 2.09 et de 2.85. On rejette H_0 au risque de 5%. On accepte H_0 au risque de 1%. On peut donc conclure à un seuil de confiance significatif (i.e. 95%) que la femelle coucou adapte la taille de ses oeufs à la taille des oeufs présents dans les nids dans lesquels elle pond.

Correction Exercice 5

Pour un échantillons de 64 exploitations, la distribution d'échantillonnage des moyennes suit une loi normale de moyenne $\bar{X} = \mu = 1050 \text{ m}^3$ et d'écart type

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{180}{\sqrt{64}} = 22.5 \text{ m}^3.$$

Afin de trouver les proportions d'exploitations dépassant certains seuils X_c , il faut réduire les écarts

$$z(X_c) = \frac{\bar{X} - X_c}{s},$$

et lire dans la table à quelles proportions de la loi normale centrée réduite cela correspond.

1.

$$z(X_c = 1100) = 2.22, \quad P(\bar{X} > 1100) = 0.0131.$$

2.

$$z(X_c = 990) = -2.67, \quad P(\bar{X} < 990) = 0.0038.$$

3. Pour définir les classes de consommation, il faut déterminer les valeurs seuils pour les quantiles [0.2; 0.4; 0.6; 0.8] de la loi normale centrée réduite. On trouve des valeurs $z = [-0.842; -0.253; 0.253; 0.842]$. En utilisant la formule

$$X = z\sigma + \mu$$

on trouve les limites de consommation

$$[898.5; 1004.4; 1095.66; 1201.5]$$

4a. La taxe sera de $\frac{53 \times 1000}{100} = 530$ euros

4b. Les 53 exploitants les plus économes en eau représentent $p_1 = \frac{53}{677} = 7.9\%$ des exploitants. Les 100 exploitants les moins économes en eau représentent $p_2 = \frac{100}{677} = 8.53\%$ des exploitants. On trouve dans les tables de la loi normale centrée réduite à quelles limites correspondent ces pourcentages. On trouve $z_1 = -1.41$ et $z_2 = 1.05$. On trouve les limites de consommation grâce à la formule

$$X = z\sigma + \mu$$

et on trouve des consommations de 795.9 m^3 et 1238.9 m^3 .

Correction Exercice 6

1. La moyenne théorique d'un dé à huit face est

$$\mu_8 = \sum_{i=1}^8 i \times p_i$$

avec $p_i = \frac{1}{8}$. On obtient $\mu_8 = 4.5$.

2. La moyenne observée est

$$\mu = \sum_{i=1}^8 i \times \frac{N_i}{N}$$

avec $N = 96$. On obtient $\mu = 4.74$.

3. Les hypothèses sont

H_0 : Le dé n'est pas pipé.

H_1 : Le dé est pipé.

On va faire un test du χ^2 sur la variabilité des résultats.

On calcule

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^8 \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j}$$

avec $e_j = 96/8 = 12$. On trouve

$$\chi^2 = 5.5.$$

Pour une loi du χ^2 avec 7 degrés de liberté, les valeurs seuil aux risques de 5% et 1% sont respectivement de 14.1 et 18.5. On peut donc conclure de manière très significative que le dé n'est pas pipé.

Correction Exercice 7

Pour les population A et B individuellement, on applique directement la formule sur l'estimation de la moyenne d'une population à partir de celle de l'échantillon :

$$P\left(\bar{X} - z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = \Phi(z_c) - \Phi(-z_c),$$

avec $z_c = 1.96$ et $z_c = 2.57$ aux risques de 5% et 1%.

1.

$$P(163.3 \leq \mu_A \leq 172.7) = 0.05.$$

$$P(161.8 \leq \mu_A \leq 174.2) = 0.01.$$

2.

$$P(176.5 \leq \mu_B \leq 181.5) = 0.05.$$

$$P(175.7 \leq \mu_B \leq 182.3) = 0.01.$$

3. Pour les différences entre les population A et B, on applique la formule sur les intervalles de confiance des différences :

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_c \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}} < \mu_{A-B} < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_c \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}),$$

avec $z_c = 1.96$ et $z_c = 2.57$ aux risques de 5% et 1%.

On trouve

$$P(-16.3 \leq \mu_{A-B} \leq 5.7) = 0.05.$$

$$P(-18 \leq \mu_{A-B} \leq -4) = 0.01.$$

On conclut que les éléments de B sont très significativement plus grands que les éléments de A.