Mathématiques – Algèbre et analyse – L2 STEP

Stéphane Jacquemoud (16-déc.-05)

I. Formules de trigonométrie

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

$\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

$\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$

$\sin a + \sin b = 2 \sin \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$ $\qquad$ $\sin a - \sin b = 2 \sin \dfrac{a-b}{2} \cos \dfrac{a+b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$ $\qquad$ $\cos a - \cos b = -2 \sin \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{a-b}{2}$

$t = \tan \dfrac{a}{2} \Rightarrow \sin a = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan a = \dfrac{2t}{1-t^2}$

II. Fonctions dérivables

II.1. Définitions

- Soit *f* une fonction définie sur un voisinage de x_0 : *f* est **dérivable** en x_0 si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers une limite finie quand *x* tend vers x_0. Cette limite finie, si elle existe, sera appelée **dérivée** de *f* au point x_0 et notée $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers une limite finie quand $x \to x_0^+$ on dit que *f* admet au point x_0 une **dérivée à droite** égale à cette limite finie. On la note $f'(x_0^+)$. On définit de même la **dérivée à gauche**. Si $f'(x_0^+)$ et $f'(x_0^-)$ existent et sont distinctes, *f* n'est pas dérivable en x_0 : on dit que la courbe présente un **point anguleux**. Si $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$, alors *f* est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

Pr. Stéphane Jacquemoud, Université Paris 7 – Denis Diderot / Institut de Physique du Globe de Paris, Equipe de Géodésie & gravimétrie, Case 89, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France ☎ +33 1 44 27 60 47 fax +33 1 44 27 73 40 jacquemoud@ipgp.jussieu.fr
http://www.ipgp.jussieu.fr/

- **théorème** : une fonction dérivable en un point est continue en ce point.
- Si la fonction *f* définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une dérivée en tout point de I, on définit l'**application dérivée** de la fonction *f* notée f'. Cette application est dite **de classe** C^n si elle est dérivable n fois sur I et si de plus la dérivée n$^{\text{ème}}$ est continue sur I. Si *f* est indéfiniment dérivable sur I, elle est de classe C^∞.

II.2. <u>Dérivées de quelques fonctions</u>

- produit scalaire : $h(x)=\lambda f(x)\Rightarrow h'(x)=\lambda f'(x)$
- une somme : $h(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow h'(x)=f'(x)+g'(x)$
- un produit : $h(x)=f(x)g(x)\Rightarrow h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- une fraction : $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$ et $h(x)=\dfrac{1}{g(x)}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{-g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$
- puissance n$^{\text{ème}}$: $h(x)=\left[f(x)\right]^n\Rightarrow h'(x)=n\,f'(x)\left[f(x)\right]^{n-1}$
- fonction composée : $h(x)=(g\circ f)(x)\Rightarrow h'(x)=(g'\circ f)(x)\times f'(x)$
- fonction réciproque : $h(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow h'(x)=\dfrac{1}{(f'\circ f^{-1})(x)}$

<u>Ex</u> : **calculer la dérivée de** $\arcsin x$

$$\left.\begin{array}{c} y=\arcsin x \\ x\in[-1,1] \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\sin y \\ y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

soit $f^{-1}(x)=\arcsin x$ et $f(y)=\sin y\Rightarrow f'(y)=\cos y$ donc $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$

or $\cos^2(\arcsin x)=1-\sin^2(\arcsin x)=1-x^2\Rightarrow\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$

donc $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$

<u>Ex</u> : **calculer la dérivée n$^{\text{ème}}$ de** $y=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}$

on montre que $y=\dfrac{2}{(x+1)^3}-\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x+1}$

soit $z=\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow z'=-\dfrac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow z''=\dfrac{2}{(x+1)^3}\Rightarrow z'''=-\dfrac{6}{(x+1)^4}$

on suppose que $z^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$ et on montre que cette expression est valable au rang n+1

$$y=z''+2z'+z\Rightarrow y^{(n)}=z^{(n+2)}+2z^{(n+1)}+z^{(n)}=(-1)^{n+2}\frac{(n+2)!}{(x+1)^{n+3}}+2(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}+(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow y^{(n)}=\frac{(-1)^n\,n!}{(x+1)^{n+3}}\left[(n+1)(n+2)-2(n+1)(x+1)+(x+1)^2\right]=\frac{(-1)^n\,n!}{(x+1)^{n+3}}\left(x^2-2nx+n^2+n+1\right)$$

II.3. <u>Propriétés</u>

- **théorème de Rolle** : si *f* est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a)=f(b)=0$ alors $\exists c\in\,]a,b[$ tel que $f'(c)=0$. Géométriquement, cela signifie que si une courbe coupe l'axe des abscisses en $x=a$ et $x=b$ et possède une tangente en chaque point de l'intervalle, il existe au moins un point *c* entre *a* et *b* où la tangente est parallèle à l'axe des *x*.

- **théorème des accroissements finis** : si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors $\exists c\in\ ]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$. Géométriquement, ceci revient à dire qu'il existe au moins un point c entre a et b où tangente à la courbe est parallèle à la droite AB.
- **théorème** : si f est une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ admettant une dérivée n+1[ème] sur $]a,b[$, alors $\exists c\in\ ]a,b[$ tel que $f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

  C'est la **formule de Taylor-Lagrange** à l'ordre n appliquée à la fonction f sur $[a,b]$.
- **formule de Taylor-Young** : si f est une fonction de classe C^{n-1} sur un intervalle I contenant a et si $f^{(n)}(a)$ existe, alors il existe une fonction ε définie sur I telle que $\forall x\in I$

  $f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x)$ avec la condition $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$

  On parle de **développement de Taylor** de f à l'ordre n en a.

III. Intégrales et primitives

III.1. Intégrale simple

a) Sommes de Darboux

Soit f une fonction définie sur [a,b] avec a < b et f bornée sur [a,b]. On subdivise l'intervalle [a,b] en n−1 points intermédiaires $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$ tels que $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$. On pose $a = x_0$ et $b = x_n$. Il existe une infinité de subdivisions (d) car on peut choisir n et la position des points arbitrairement. A chaque subdivision on associe une somme de Darboux inférieure $s(d)$ et une somme de Darboux supérieure $S(d)$:

$$s(d)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})m_i \quad \text{et} \quad S(d)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})M_i$$

où m_i et M_i sont les bornes inférieures et supérieures de f sur $[x_{i-1},x_i]$. Ces bornes existent car f étant bornée sur [a,b] est aussi bornée sur chaque sous-segment. On définit (e) = ensemble des sommes de Darboux inférieures et (E) = ensemble des sommes de Darboux supérieures. On peut montrer que tout élément de (e) est inférieur ou égal aux éléments de (E). Donc (e) est majoré par un élément quelconque de (E) ⇒ (e) admet une borne supérieure I'. De même, (E) est minoré par un élément quelconque de (e) ⇒ (E) admet une borne inférieure I''. la fonction f définie et bornée sur [a,b] est dite intégrable sur [a,b] au sens de Riemann si les deux ensembles (e) et (E) formés par les sommes de Darboux s(d) et S(d) sont adjacents. La borne commune de ces deux ensembles I' = I'' est appelée intégrale de la fonction f sur [a,b] et on la note I :

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

b) Somme de Riemann

Soit f une fonction définie sur [a,b] avec a < b et f bornée sur [a,b]. On subdivise l'intervalle [a,b] en n−1 points intermédiaires $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$ tels que $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$. On pose $a = x_0$ et $b = x_n$. Il existe une infinité de subdivisions (d) car on peut choisir n et la position des points arbitrairement. A chaque subdivision on associe une somme de Riemann σ :

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(\lambda_i)$$

avec $\lambda_i\in[x_{i-1},x_i]$. Par définition f est intégrable sur [a,b] au sens de Riemann s'il existe un réel I tel que $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour toute subdivision (d) vérifiant $x_i - x_{i-1} < \alpha$ et quel que soit le choix de λ_i, on ait $|\sigma-I| < \varepsilon$. I est appelé intégrale de la fonction f sur [a,b] et on la note :

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

c) Propriétés

- **théorème** : une fonction *f* définie et bornée sur le segment [a,b] est intégrable sur [a,b] si et seulement si elle l'est sur [b,a] et alors $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
- **théorème** : toute fonction monotone sur [a,b] est intégrable sur [a,b].
- **théorème** : toute fonction continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b].
- **théorème** : si *f* est bornée et intégrable sur [a,b], les bornes étant m et M, alors $\exists \mu \in [m, M]\ \int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$.
  μ est la valeur moyenne de la fonction *f* sur [a,b].
- **formule de Chasles** : si la fonction *f* est bornée ou intégrable sur chacun des deux intervalles [a,c] et [c,b], alors *f* est intégrable sur [a,b] et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- **théorème** : si *f* et *g* sont bornées et intégrables sur [a,b], *f* + *g* est intégrable sur [a,b] et
$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
- **théorème** : si *f* est bornée et intégrable sur [a,b] et si $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est intégrable sur [a,b] et
$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$
- **inégalité de Schwarz** : $\left(\int_a^b (fg)(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2\,dx \times \int_a^b (g(x))^2\,dx$

d) Intégrale fonction d'une extrémité de l'intervalle d'intégration

- **théorème** : si *f* est intégrable sur [a,b] et si x_0 est un point de [a,b], la fonction *F* définie sur [a,b] par $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ est continue. Dans le cas particulier où *f* est continue, alors *F* est dérivable en tout point de [a,b] et $F'(x) = f(x)$.
- **primitive d'une fonction continue** : si *f* est une fonction définie sur [a,b], *F* est une primitive de *f* sur [a,b] si et seulement si $\forall x \in [a,b],\ F'(x) = f(x)$.
- **théorème** : si *f* admet une primitive *F* sur [a,b], elle admet une infinité de primitives qui sont toutes les fonctions *G* définies par $G(x) = F(x) + cte$.
- Soit *f* une fonction continue sur [a,b] et $I = \int_a^b f(t)\,dt$. Soit *F* une primitive de *f* sur [a,b], alors :
$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt = F(x) - F(x_0) = \left[F(t)\right]_{x_0}^x$$

III.2. Recherche de fonctions primitives

a) Primitives usuelles

domaine de définition	fonction f	primitive F
$\mathbb{R}$	x^n avec $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\mathbb{R}_+^*$	x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$ax+b>0$	$(ax+b)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$	$\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)}$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	e^{ax} avec $a \neq 0$	$\dfrac{e^{ax}}{a}$
$\mathbb{R}$	a^x avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x$

$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\left]k\pi,(k+1)\pi\right[$	$1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$x^2+h>0$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+h}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2+h}\right\|$

b) Changement de variable

Soit f une fonction continue sur un intervalle et F une primitive de f sur cet intervalle :

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x)-F(x_0)$$

Soit une application g de $[\alpha,\beta]$ dans cet intervalle. On supposera que g est continue, dérivable et à dérivée continue. On désigne par Φ la fonction $\Phi(y)=(F\circ g)(y)\Rightarrow \Phi'(y)=(F'\circ g)(y)\times g'(y)=(f\circ g)(y)\times g'(y)$. Alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))\times g'(t)\,dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\,du$$

Ex : **calculer une primitive de** $f(x)=x\sin x^2$

$F(x)=\int_{x_0}^{x} t\sin t^2 dt$

on pose $t^2=u\Rightarrow 2t\,dt=du$

$F(x)=\frac{1}{2}\int_{x_0^2}^{x^2}\sin u\,du=\frac{1}{2}\left[-\cos u\right]_{x_0^2}^{x^2}=-\frac{1}{2}\cos x^2+cte$

c) Intégration par partie

Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions continues, dérivables, à dérivées continues sur [a,b]. $\left[u(x)v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ $\Rightarrow$ la fonction $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ a pour primitive le produit $u(x)v(x)$ donc $\int_a^b\left[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\right]dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b\Rightarrow\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

Ex : **calculer une primitive de** $f(x)=\arctan x$

$F(x)=\int_{x_0}^{x}\arctan t\,dt$

on pose $\begin{cases} u=\arctan t\Rightarrow du=\dfrac{dt}{1+t^2}\\ dv=dt\Rightarrow v=t\end{cases}$

$F(x)=\left[t\arctan t\right]_{x_0}^{x}-\int_{x_0}^{x}\frac{t}{1+t^2}dt=\left[t\arctan t\right]_{x_0}^{x}-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+t^2\right)\right]_{x_0}^{x}=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+cte$

d) Primitive d'un polynôme en sin *x* et cos *x*

Soit $F(x)=\int_{x_0}^{x}\sin^p t\cos^q t\,dt$ avec $(p,q)\in\mathbb{N}^2$

- supposons qu'un des exposants soit impair : par exemple $p=2p'+1$ et $q=2q'$

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}\sin^{2p'+1}t\cos^{2q'}t\,dt=\int_{x_0}^{x}\left(1-\cos^2 t\right)^{p'}\cos^{2q'}t\sin t\,dt$$

On pose $u=\cos t\Rightarrow du=-\sin t\,dt$

$$F(x)=-\int_{\cos x_0}^{\cos x}\left(1-u^2\right)^{p'}u^{2q'}du$$

De même si $p=2p'$ et $q=2q'+1$, on pose $u=\sin t$

- supposons que les deux exposants soient impairs : $p=2p'+1$ et $q=2q'+1$. On peut utiliser la méthode précédente ou faire un autre changement de variable.

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}\left(\sin^2 t\right)^{p'}\left(\cos^2 t\right)^{q'}\sin t\cos t\,dt=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^{p'}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^{q'}\sin 2t\,dt$$

On pose $u=\cos 2t\Rightarrow du=-2\sin 2t\,dt$

$$F(x)=-\frac{1}{4}\int_{\cos 2x_0}^{\cos 2x}\left(\frac{1-u}{2}\right)^{p'}\left(\frac{1+u}{2}\right)^{q'}du$$

- supposons que les deux exposants soient pairs : on est obligé de linéariser.

Ex : calculer une primitive de $f(x)=\cos^4 x\sin^2 x$

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}\cos^4 t\sin^2 t\,dt$$

$$\cos^4 t\sin^2 t=\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2$$

$$\cos^4 t\sin^2 t=-\frac{1}{2^6}\left(e^{4it}+4e^{2it}+6+4e^{-2it}+e^{-4it}\right)\times\left(e^{2it}-2+e^{-2it}\right)$$

$$=-\frac{1}{2^6}\left[\left(e^{6it}+e^{-6it}\right)+2\left(e^{4it}+e^{-4it}\right)-\left(e^{2it}+e^{-2it}\right)-4\right]$$

$$=-\frac{1}{2^5}\left(\cos 6t+2\cos 4t-\cos 2t-2\right)$$

$$F(x)=-\frac{1}{2^5}\left(\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 4x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}-2x\right)+cte$$

e) Primitive d'un polynôme en sin x, cos x et $e^{\alpha x}$

On transforme les produits de lignes trigonométriques en sommes et on se ramène au calcul d'intégrales de la forme :

$$A(x)=\int_{x_0}^{x}e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt\quad\text{ou}\quad B(x)=\int_{x_0}^{x}e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt$$

$$A(x)+iB(x)=\int_{x_0}^{x}e^{\alpha t}\left(\cos\beta t+i\sin\beta t\right)dt=\int_{x_0}^{x}e^{(\alpha+i\beta)t}dt=\left[\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{\alpha+i\beta}\right]_{x_0}^{x}=\frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta}+cte=\frac{e^{\alpha x}\left(\cos\beta x+i\sin\beta x\right)\left(\alpha-i\beta\right)}{\alpha^2+\beta^2}+cte$$

Donc $A(x)=\dfrac{e^{\alpha x}\left(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x\right)}{\alpha^2+\beta^2}+cte$ et $B(x)=\dfrac{e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x-\beta\cos n\beta x\right)}{\alpha^2+\beta^2}+cte$.

$A(x)$ et $B(x)$ sont de la forme $e^{\alpha x}\left(\lambda\cos\beta x+\mu\sin\beta x\right)+cte$. Donc pour calculer $A(x)$ et $B(x)$, deux méthodes :

- on associe les deux intégrales en calculant $A(x)+iB(x)$.
- on connaît la forme générale de l'intégrale et on détermine λ et μ. Pour cela on opère par identification en écrivant que la dérivée de $e^{\alpha x}\left(\lambda\cos\beta x+\mu\sin\beta x\right)$ est égale à $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Ex : calculer une primitive de $f(x)=e^{-x}\sin^3 x$

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}e^{-t}\sin^3 t\,dt$$

$$\sin^3 t=\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}\left(e^{3it}-e^{-3it}-3\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right)=-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x$$

$$F(x) = -\frac{1}{4}\int_{x0}^{x} e^{-t}\sin 3t\,dt + \frac{3}{4}\int_{x0}^{x} e^{-t}\sin t\,dt = -\frac{1}{4}G(x) + \frac{3}{4}H(x)$$

* $G(x)$ est de la forme $e^{-x}(\lambda\cos 3x + \mu\sin 3x) + cte$.

$G'(x) = e^{-x}\sin 3x \Rightarrow e^{-x}(-\lambda\cos 3x - \mu\sin 3x - 3\lambda\sin 3x + 3\mu\cos 3x) = e^{-x}\sin 3x \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{10}$ et $\mu = -\frac{1}{10}$

donc $G(x) = e^{-x}\left(-\frac{3}{10}\cos 3x - \frac{1}{10}\sin 3x\right) + cte$

* pour calculer $H(x)$ on lui associe $K(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-t}\cos t\,dt$

$$K(x) + iH(x) = \int_{x0}^{x} e^{-t}(\cos t + i\sin t)\,dt = \int_{x0}^{x} e^{(-1+i)t}dt = \left[\frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i}\right]_{x0}^{x} = \frac{-1-i}{2}e^{-x}(\cos x + i\sin x) + cte$$

donc $H(x) = \frac{e^{-x}}{2}(-\sin x - \cos x) + cte$

* alors $F(x) = \frac{1}{40}e^{-x}(3\cos 3x + \sin 3x) - \frac{3}{8}e^{-x}(\cos x + \sin x) + cte$

f) <u>Primitive d'un polynôme en x et $e^{\alpha x}$</u>

Soit $F(x) = \int_{x_0}^{x} t^n e^{\alpha t}dt$. On va chercher la forme de ces intégrales en établissant une formule de récurrence. On pose $u = t^n \Rightarrow du = nt^{n-1}dt$ et $dv = e^{\alpha t}dt \Rightarrow v = e^{\alpha t}/\alpha$

$$F_n(x) = \left[\frac{t^n e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_{x_0}^{x} - \frac{n}{\alpha}F_{n-1}(x)$$

$$F_{n-1}(x) = \left[\frac{t^{n-1} e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_{x_0}^{x} - \frac{n-1}{\alpha}F_{n-2}(x) \qquad \times\left(\frac{-n}{\alpha}\right)$$

$$F_{n-2}(x) = \left[\frac{t^{n-2} e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_{x_0}^{x} - \frac{n-2}{\alpha}F_{n-3}(x) \qquad \times\left(\frac{-n}{\alpha}\right)\left(\frac{-n+1}{\alpha}\right)$$

…………………………… ………………………..

$$F_2(x) = \left[\frac{t^2 e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_{x_0}^{x} - \frac{2}{\alpha}F_1(x) \qquad \times\left(\frac{-n}{\alpha}\right)\left(\frac{-n+1}{\alpha}\right)\cdots\left(\frac{-3}{\alpha}\right)$$

$$F_1(x) = \left[\frac{t e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_{x_0}^{x} - \frac{1}{\alpha}F_0(x) \qquad \times\left(\frac{-n}{\alpha}\right)\left(\frac{-n+1}{\alpha}\right)\cdots\left(\frac{-3}{\alpha}\right)\left(\frac{-2}{\alpha}\right)$$

$$F_0(x) = \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_{x_0}^{x} \qquad \times\left(\frac{-n}{\alpha}\right)\left(\frac{-n+1}{\alpha}\right)\cdots\left(\frac{-3}{\alpha}\right)\left(\frac{-2}{\alpha}\right)\left(\frac{-1}{\alpha}\right)$$

$$F_n(x) = \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\times\left(t^n + \left(\frac{-n}{\alpha}\right)t^{n-1} + \ldots + \left(\frac{-n}{\alpha}\right)\left(\frac{-n+1}{\alpha}\right)\cdots\left(\frac{-3}{\alpha}\right)\left(\frac{-2}{\alpha}\right)t + \left(\frac{-n}{\alpha}\right)\left(\frac{-n+1}{\alpha}\right)\cdots\left(\frac{-3}{\alpha}\right)\left(\frac{-2}{\alpha}\right)\left(\frac{-1}{\alpha}\right)\right)\right]_{x_0}^{x}$$

Donc $F_n(x) = e^{\alpha x}P_n(x) + cte$ avec $P_n(x)$ un polynôme de degré n. La méthode de résolution consiste à retenir la forme des primitives et à opérer par identification.

<u>**Ex**</u> : **primitive de** $f(x) = e^x(x^2 + x - 1)$

$F(x) = \int_{x_0}^{x} e^t(t^2 + t - 1)\,dt$

on sait que $F(x)$ est de la forme $e^x(ax^2 + bx + c) + cte$

$$\left.\begin{aligned} F'(x) &= e^x(ax^2 + bx + c + 2ax + b) = e^x(ax^2 + (2a+b)x + (b+c)) \\ \text{or } F'(x) &= e^x(x^2 + x - 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 1,\ b = -1,\ c = 0$$

donc $F(x) = e^x\left(x^2 - x\right) + cte$

g) <u>Primitive d'un polynôme en *x* sin *x* et cos *x*</u>

On transforme les produits de lignes trigonométriques en sommes et on se ramène au calcul d'intégrales de la forme :

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} t^n \cos\beta t\, dt \qquad \text{ou} \qquad B(x) = \int_{x_0}^{x} t^n \sin\beta t\, dt$$

- si n n'est pas trop grand, on effectue des intégrations par parties successives.
- on cherche la forme des primitives pour identifier. Soit $A(x) + iB(x) = \int_{x0}^{x} t^n e^{i\beta t} dt$: d'après le paragraphe précédent, cette intégrale est le produit de $e^{i\beta x}$ par un polynôme de degré n à coefficients complexes.
  $A(x) + iB(x) = (\cos\beta x + i\sin\beta x)\left(P_n(x) + iQ_n(x)\right) + cte$
  P_n et Q_n sont des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients constants.
  $A(x) = P_n(x)\cos\beta x - Q_n(x)\sin\beta x + cte$ et $B(x) = P_n(x)\sin\beta x + Q_n(x)\cos\beta x + cte$

<u>**Ex**</u> : **primitive de** $f(x) = x^2\cos^3 x$

$F(x) = \int_{x_0}^{x} t^2\cos^3 t\, dt$

$\cos^3 t = \left(\dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}\left(e^{3it} + e^{-3it} + 3\left(e^{it} + e^{-it}\right)\right) = \dfrac{1}{4}\cos 3t + \dfrac{3}{4}\cos t$

donc $F(x) = \dfrac{1}{4}\int_{x_0}^{x} t^2\cos 3t\, dt + \dfrac{3}{4}\int_{x_0}^{x} t^2\cos t\, dt = \dfrac{1}{4}G(x) + \dfrac{3}{4}H(x)$

* on calcule $G(x)$ par identification : $G(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\cos 3x + \left(dx^2 + ex + f\right)\sin 3x + cte$

la fonction $t^2\cos 3t$ est paire donc on cherche une primitive impaire ⇒ a = c = e = 0

$G(x) = bx\cos 3x + \left(dx^2 + f\right)\sin 3x + cte$

$G'(x) = b\cos 3x - 3bx\sin 3x + 2dx\sin 3x + 3\left(dx^2 + f\right)\cos 3x = \left(b + 3dx^2 + 3f\right)\cos 3x + (2dx - 3bx)\sin 3x$

or $G'(x) = x^2\cos 3x \Rightarrow b = \dfrac{2}{9}$ et $d = \dfrac{1}{3}$ et $f = -\dfrac{2}{27}$

donc $G(x) = \dfrac{2}{9}x\cos 3x + \left(\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{27}\right)\sin 3x + cte$

* on calcule $H(x)$ en intégrant successivement par partie : $H(x) = \int_{x_0}^{x} t^2\cos t\, dt$

on pose $\begin{cases} u = t^2 \Rightarrow du = 2t\, dt \\ dv = \cos t\, dt \Rightarrow v = \sin t \end{cases}$

$H(x) = \left[t^2\sin t\right]_{x_0}^{x} - 2\int_{x_0}^{x} t\sin t\, dt$

on pose $\begin{cases} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \sin t\, dt \Rightarrow v = -\cos t \end{cases}$

$$\begin{aligned} H(x) &= \left[t^2\sin t\right]_{x_0}^{x} - 2\left(\left[-t\cos t\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x}\cos t dt\right) \\ &= \left[t^2\sin t\right]_{x_0}^{x} + 2\left[t\cos t\right]_{x_0}^{x} - 2\left[\sin t\right]_{x_0}^{x} \\ &= (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x + cte \end{aligned}$$

donc $F(x) = \dfrac{1}{18}x\cos 3x + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2}{27}\right)\sin 3x + \dfrac{3}{4}\left(x^2 - 2\right)\sin x + \dfrac{3}{2}x\cos x + cte$

h) <u>Primitive de</u> $\dfrac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

- si le coefficient de x^2 est négatif et le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ positif, on se ramène à une expression de la forme : $\dfrac{AX+B}{\sqrt{C^2 - X^2}}$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{At+B}{\sqrt{C^2-t^2}}dt = -A\int_{x_0}^{x} \frac{-2t}{2\sqrt{C^2-t^2}}dt + B\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{C^2-t^2}}dt$$

On pose $t = Cu \Rightarrow dt = C\,du$

$$\int_{x0}^{x} \frac{At+B}{\sqrt{C^2-t^2}}dt = -A\left[\sqrt{C^2-t^2}\right]_{x_0}^{x} + B\int_{x_0/a}^{x/a} \frac{C}{C\sqrt{1-u^2}}du$$

$$= -A\left[\sqrt{C^2-t^2}\right]_{x_0}^{x} + B\left[\arcsin u\right]_{x_0/a}^{x/a}$$

$$= -A\sqrt{C^2-x^2} + B\arcsin\frac{x}{C} + cte$$

<u>Ex</u> : primitive de $f(x) = \dfrac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{8t-3}{\sqrt{12t-4t^2-5}}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{8t-3}{\sqrt{-(2t-3)^2+4}}dt$$

on pose $2t-3 = u \Rightarrow 2\,dt = du$

$$F(x) = \int_{2x_0-3}^{2x-3} \frac{4u+9}{2\sqrt{4-u^2}}du = \int_{2x_0-3}^{2x-3} \frac{2u}{\sqrt{4-u^2}}du + \frac{9}{2}\int_{2x_0-3}^{2x-3} \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}du$$

on pose $u = 2v \Rightarrow du = 2\,dv$

$$F(x) = -2\left[\sqrt{4-u^2}\right]_{2x_0-3}^{2x-3} + \frac{9}{2}\int_{(2x_0-3)/2}^{(2x-3)/2} \frac{2dv}{2\sqrt{1-v^2}}dv = -2\left[\sqrt{4-u^2}\right]_{2x_0-3}^{2x-3} + \frac{9}{2}\left[\arcsin v\right]_{(2x_0-3)/2}^{(2x-3)/2}$$

$$= -2\sqrt{4-(2x-3)^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{2x-3}{2} + cte = -2\sqrt{12x-4x^2-5} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{2x-3}{2} + cte$$

- si le coefficient de x^2 est positif, on se ramène à une expression de la forme : $\dfrac{Ax+B}{\sqrt{x^2+C}}$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{At+B}{\sqrt{t^2+C}}dt = A\int_{x_0}^{x} \frac{2t}{2\sqrt{t^2+C}}dt + B\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{t^2+C}}dt$$

$$= A\left[\sqrt{t^2+C}\right]_{x_0}^{x} + B\left[\ln\left|t+\sqrt{t^2+C}\right|\right]_{x_0}^{x}$$

$$= A\sqrt{x^2+C} + B\ln\left|x+\sqrt{x^2+C}\right| + cte$$

i) <u>Primitives des fractions rationnelles</u>

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples.

- Partie polaire relative à un pôle réel et dénominateur de degré 1

$$\int_{x_0}^{x} \frac{A}{t-a}dt = A\left[\ln|t-a|\right]_{x_0}^{x} = A\ln|x-a| + cte$$

- Partie polaire relative à un pôle réel et dénominateur de degré supérieur à 1

$$\int_{x_0}^{x} \frac{A}{(t-a)^{\alpha}}dt = \int_{x_0}^{x} A(t-a)^{-\alpha}\,dt = A\left[\frac{(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x_0}^{x} = \frac{A}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} + cte$$

- Partie polaire relative à un pôle complexe et dénominateur de degré 1 : avant d'intégrer on regroupe les termes $\int_{x_0}^{x} \frac{A}{t-a}dt$ et $\int_{x_0}^{x} \frac{A^*}{t-a^*}dt$ où A^* et a^* sont les complexes conjugués de A et a.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{A}{t-a}dt + \int_{x_0}^{x} \frac{A^*}{t-a^*}dt = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{A}{t-a} + \frac{A^*}{t-a^*}\right)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{A(t-a^*)+A^*(t-a)}{(t-a)(t-a^*)}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\gamma t+\delta}{t^2+\lambda t+\mu}dt$$ avec γ, δ, λ et μ réels.

On fait apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\gamma t+\delta}{t^2+\lambda t+\mu}dt=\int_{x_0}^{x}\frac{\frac{\gamma}{2}(2t+\lambda)+\varepsilon}{t^2+\lambda t+\mu}dt=\frac{\gamma}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{2t+\lambda}{t^2+\lambda t+\mu}dt+\varepsilon\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t^2+\lambda t+\mu}$$

$$=\frac{\gamma}{2}\Big[\ln\left|t^2+\lambda t+\mu\right|\Big]_{x_0}^{x}+\varepsilon\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t^2+\lambda t+\mu}$$

On pose $t^2+\lambda t+\mu=(t-p)^2+q^2$ et on effectue le changement de variable $t-p=qu\Rightarrow dt=q\,du$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\gamma t+\delta}{t^2+\lambda t+\mu}dt=\frac{\gamma}{2}\Big[\ln\left|t^2+\lambda t+\mu\right|\Big]_{x_0}^{x}+\varepsilon\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{(t-p)^2+q^2}=\frac{\gamma}{2}\Big[\ln\left|t^2+\lambda t+\mu\right|\Big]_{x_0}^{x}+\varepsilon\int_{\frac{x_0-p}{q}}^{\frac{x-p}{q}}\frac{q\,du}{q^2\left(u^2+1\right)}$$

$$=\frac{\gamma}{2}\Big[\ln\left|t^2+\lambda t+\mu\right|\Big]_{x_0}^{x}+\frac{\varepsilon}{q}\big[\arctan u\big]_{\frac{x_0-p}{q}}^{\frac{x-p}{q}}=\frac{\gamma}{2}\ln\left|x^2+\lambda x+\mu\right|+\frac{\varepsilon}{q}\arctan\frac{x-p}{q}+cte$$

- Partie polaire relative à un pôle complexe et dénominateur de degré supérieur à 1 : on regroupe les intégrales $\int_{x_0}^{x}\frac{A}{(t-a)^{\alpha}}dt=\frac{A}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}+cte$ et $\int_{x_0}^{x}\frac{A^*}{\left(t-a^*\right)^{\alpha}}dt=\frac{A^*}{(1-\alpha)\left(x-a^*\right)^{\alpha-1}}+cte$ où A^* et a^* sont les complexes conjugués de A et a.

$$\frac{A}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A^*}{(1-\alpha)\left(x-a^*\right)^{\alpha-1}}=\frac{1}{1-\alpha}\frac{A\left(x-a^*\right)^{\alpha-1}+A^*(x-a)^{\alpha-1}}{\left[(x-a)\left(x-a^*\right)\right]^{\alpha-1}}=\frac{1}{1-\alpha}\frac{A\left(x-a^*\right)^{\alpha-1}+A^*(x-a)^{\alpha-1}}{\left(x^2-\left(a+a^*\right)x+aa^*\right)^{\alpha-1}}$$

<u>Ex</u> : **primitive de** $f(x)=\frac{x}{x^3+x^2+x+1}$

$f(x)=\frac{x}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-i}+\frac{B^*}{x+i}=\frac{A}{x+1}+\frac{\alpha x+\beta}{x^2+1}$ où A, α et β sont des réels à déterminer. Par identification on trouve $A=-\frac{1}{2}$, $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ donc $f(x)=-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{x+1}{2\left(x^2+1\right)}$

$$F(x)=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}\arctan x+cte$$

j) <u>Primitives d'une fraction rationnelle en sin *x* et cos *x*</u>

On se ramène à l'intégration d'une fraction rationnelle d'une variable en effectuant un changement de variable. Soit $u=\tan\frac{t}{2}$ alors $\sin t=\frac{2u}{1+u^2}$ et $\cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $du=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{t}{2}\right)dt$ et $dt=\frac{2du}{1+u^2}$

IV. Les équations différentielles

Les équations différentielles remontent à l'invention du calcul différentiel et intégral, faite indépendamment par le britannique Newton et l'allemand Leibniz dans les années 1670-1680. Au début, ces équations servaient à résoudre des problèmes géométriques, comme la détermination d'une courbe dont les tangentes sont soumises à une condition donnée. C'est seulement vers 1730 que le mathématicien suisse Euler a commencé à les utiliser pour traiter des problèmes de dynamique. Aujourd'hui, elles apparaissent dans presque tous les domaines de la science et de la technique : mathématiques, physique, chimie, biologie, etc.

IV.1. <u>Définition</u>

- Soit F une fonction de $n+2$ variables réelles. On appelle **équation différentielle** d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$ la relation $F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0$ où y désigne une fonction de x, réelle (exceptionnellement complexe), et n fois dérivable. $y',y'',\ldots,y^{(n)}$ sont les dérivées successives de y.
- Soit I un intervalle sur $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I, on appelle **solution** ou **intégrale** d'une équation différentielle toute fonction f(x) telle que : $\forall x\in I, F\left(x,f(x),f'(x),\ldots,f^{(n)}(x)\right)=0$. Intégrer une équation

différentielle, c'est donc en déterminer toutes les solutions en précisant pour chacune d'entre elles l'intervalle sur lequel elle est définie.

- On appelle **courbe intégrale** d'une équation différentielle la représentation graphique d'une solution.

IV.2. Equation différentielle linéaire du premier ordre : $y'+a(x)y=g(x)$

$a(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions continues sur l'intervalle I. L'équation différentielle est dite :

∗ **homogène** si $g(x) = 0$
∗ **à coefficients constants** si $a(x) = a$

Soit Φ = espace vectoriel des fonctions définies continues sur I
Soit Φ' = sous-espace vectoriel constitué des fonctions dérivables sur I

F est telle que $\begin{cases} \Phi' \to \Phi \\ y \to y'+ay \end{cases}$

F est linéaire de Φ' dans Φ car $F(y_1+y_2)=F(y_1)+F(y_2)$ et $F(\alpha y)=\alpha F(y)$. Résoudre l'équation différentielle $y'+a(x)y=g(x)$ revient à déterminer l'image réciproque de g par F. Supposons qu'on connaisse une solution particulière y_0 de $y'+a(x)y=g(x)$: $F(y_0)=g$. Alors $F(y)=g \Leftrightarrow F(y)=F(y_0) \Leftrightarrow F(y-y_0)=0$. Donc pour que y_0 soit solution de $y'+a(x)y=g(x)$, il faut et il suffit que $y-y_0$ soit solution de $y'+a(x)y=0$. On obtient toutes les solutions avec second membre en ajoutant à une solution particulière de cette équation toutes les solutions de l'équation homogène associée.

solution générale = solution générale de l'équation homogène + solution particulière

- **Intégration de l'équation homogène** : $y'+a(x)y=0$

  On admet qu'en dehors de la fonction nulle, il n'existe pas de solutions comprenant la valeur 0 en un point de l'intervalle I.

  $y'+a(x)y=0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-a(x)y \Rightarrow \dfrac{dy}{y}=-a(x)dx$

  Soit $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur I

  $y'+a(x)y=0 \Leftrightarrow \ln|y|=-A(x)+cte \Leftrightarrow |y|=e^{-A(x)}\times cte \Leftrightarrow y=\lambda e^{-A(x)}=\lambda y_0(x)$

  Les solutions de l'équation homogène forment un espace vectoriel de dimension 1.

- **Recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle**

  ∗ parfois on devine.

  ∗ si $y'+a(x)y=\alpha_1 g_1(x)+\alpha_2 g_2(x)+\cdots+\alpha_n g_n(x)$, on cherche une solution particulière de $y'+a(x)y=\alpha_i g_i(x)$ pour i = 1,2,…,n. Alors $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\cdots+\alpha_n y_n$ est solution particulière de l'équation.

  ∗ si l'équation est à coefficients constants et $g(x)=P_n(x)$, on cherche une solution particulière sous forme de polynôme de degré n si a ≠ 0 et de degré n+1 si a = 0.

  ∗ si l'équation est à coefficients constants et $g(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, on pose $y=e^{\alpha x}z$ où z est une fonction de x. $y=e^{\alpha x}z \Rightarrow y'=e^{\alpha x}(z'+\alpha z)$ et donc en remplaçant dans l'équation différentielle on obtient :

  $y'+ay=e^{\alpha x}P_n(x) \Leftrightarrow e^{\alpha x}(z'+\alpha z)+e^{\alpha x}az=e^{\alpha x}P_n(x) \Leftrightarrow e^{\alpha x}(z'+(\alpha+a)z)=e^{\alpha x}P_n(x) \Leftrightarrow z'+(\alpha+a)z=P_n(x)$

  On est ramené au cas précédent.

  ∗ cas général : on utilise la **méthode de variation de la constante**. On a trouvé $y_0(x)$ la solution de l'équation homogène non nulle. On cherche une solution particulière de l'équation différentielle sous forme $y=\lambda(x)y_0(x)$ où $\lambda(x)$ est une nouvelle fonction inconnue.

$y=\lambda(x)y_0(x)\Rightarrow y'=\lambda'(x)y_0(x)+\lambda(x)y_0'(x)$

$$\begin{aligned} y'+a(x)y=g(x) &\Leftrightarrow \lambda'(x)y_0(x)+\lambda(x)y_0'(x)+a(x)\lambda(x)y_0(x)=g(x)\\ &\Leftrightarrow \lambda'(x)y_0(x)+\lambda(x)\underbrace{\left[y_0'(x)+a(x)y_0(x)\right]}_{=0}=g(x)\\ &\Leftrightarrow \lambda'(x)y_0(x)=g(x)\\ &\Leftrightarrow \lambda'(x)=\frac{g(x)}{y_0(x)}\end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est donc : $y=\lambda(x)y_0(x)$

<u>**Ex**</u> : **résoudre** $y'+2y=x+x\cos x$

équation homogène : $y'+2y=0\Rightarrow y=\lambda e^{-2x}$

* soit E_1 : $y'+2y=x$

on pose $y=ax+b\Rightarrow y'=a$ donc $y'+2y=x\Leftrightarrow a+2(ax+b)=x\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$ et $b=-\frac{1}{4}$

alors $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

* soit E_2 : $y'+2y=x\cos x$

soit $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

E_2 est la partie réelle de l'équation différentielle $y'+2y=xe^{ix}$

on pose $y=e^{ix}z\Rightarrow y'=e^{ix}(z'+iz)$

donc $y'+2y=xe^{ix}\Leftrightarrow e^{ix}(z'+iz)+2e^{ix}z=xe^{ix}\Leftrightarrow z'+(i+2)z=x$

on pose $z=ax+b\Rightarrow z'=a$

donc $z'+(i+2)z=x\Leftrightarrow a+(i+2)(ax+b)=x\Leftrightarrow \begin{cases}a(i+2)=1\\ a+b(i+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2+i}\\ b=-\dfrac{1}{3+4i}\end{cases}$

alors $y=e^{ix}\left(\frac{x}{2+i}-\frac{1}{3+4i}\right)=(\cos x+i\sin x)\left(\frac{x}{2+i}-\frac{1}{3+4i}\right)=\frac{\cos x+i\sin x}{25}\left(10x-3+i(4-5x)\right)$

donc la solution est $\Re(y)=\frac{\cos x}{25}(10x-3)+\frac{\sin x}{25}(5x-4)$

* la solution générale est $y=\lambda e^{-2x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\cos x}{25}(10x-3)+\frac{\sin x}{25}(5x-4)$

<u>**Ex**</u> : **résoudre** $(x-1)y'+(x-2)y=x(x-1)^2$

en supposant x ≠ 1, on transforme cette équation différentielle en $y'+\frac{x-2}{x-1}y=x(x-1)$

équation homogène : $y'+\frac{x-2}{x-1}y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{x-2}{x-1}dx\Rightarrow\frac{dy}{y}=\left[-1+\frac{1}{x-1}\right]dx\Rightarrow\ln|y|=-x+\ln|x-1|+cte$

donc la solution générale de l'équation homogène est : $y=\lambda(x-1)e^{-x}$

méthode de variation de la constante : $y=\lambda(x)(x-1)e^{-x}\Rightarrow y'=\lambda'(x)(x-1)e^{-x}+\lambda(x)(2-x)e^{-x}$

donc $y'+\frac{x-2}{x-1}y=x(x-1)\Leftrightarrow\lambda'(x)(x-1)e^{-x}=x(x-1)\Leftrightarrow\lambda'(x)=xe^{x}\Leftrightarrow\lambda(x)=(x-1)e^{x}$ en posant $cte=0$

une solution particulière de l'équation est donc $y=(x-1)^2$

une solution générale de l'équation différentielle est donc : $y=\lambda(x-1)e^{-x}+(x-1)^2$

IV.3. <u>Equation différentielle linéaire du second ordre</u> : $y''+a(x)y'+b(x)y=g(x)$

$a(x)$, $b(x)$ et $g(x)$ sont trois fonctions définies continues sur un intervalle I. L'équation différentielle est dite :

* **homogène** si $g(x) = 0$
* **à coefficients constants** si $a(x) = a$ et $b(x) = b$

Soit Φ = espace vectoriel des fonctions définies continues sur I
Soit Φ'' = sous-espace vectoriel constitué des fonctions deux fois dérivables sur I

F est telle que $\begin{cases} \Phi'' \to \Phi \\ y \to y''+ay'+by \end{cases}$

F est linéaire de Φ'' dans Φ car $F(y_1+y_2) = F(y_1)+F(y_2)$ et $F(\alpha y) = \alpha F(y)$. Résoudre l'équation différentielle $y'+a(x)y'+b(x)y = g(x)$ revient à déterminer l'image réciproque de g par F. On obtient toutes les solutions avec second membre en ajoutant à une solution particulière de cette équation toutes les solutions de l'équation homogène associée.

solution générale = solution générale de l'équation homogène + solution particulière

a) <u>Equation différentielle à coefficients constants et sans second membre</u> : $y''+ay'+by = 0$

- **Intégration de l'équation homogène** : $y''+a\,y'+b\,y = 0$
  L'ensemble des solutions constitue un sous-espace vectoriel : montrons que sa dimension est 2, c'est-à-dire que si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation homogène, la solution générale est de la forme : $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. y_1 et y_2 étant linéairement indépendantes, le rapport y_2/y_1 n'est pas constant. Effectuons alors un changement de fonction inconnue en prenant comme fonction inconnue z telle que :
  $y = y_1 z \Rightarrow y' = y_1'z + y_1 z' \Rightarrow y'' = y_1''z + 2y_1'z' + y_1 z''$
  Donc si y est solution de l'équation homogène, alors z est solution de l'équation différentielle
  $\Rightarrow y_1''z + 2y_1'z' + y_1 z'' + a(y_1'z + y_1 z') + by_1 z = 0$
  $\Rightarrow y_1 z'' + (2y_1' + ay_1)z' + \underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{=0} z = 0$
  $\Rightarrow y_1 z'' + (2y_1' + ay_1)z' = 0$
  On fait un changement de fonction inconnue en posant $Z = z'$. Dire que z est solution de cette équation homogène équivaut à dire que Z est solution de $y_1 Z' + (2y_1' + ay_1)Z = 0$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène. Une solution particulière de $y_1 z'' + (2y_1' + ay_1)z' = 0$ est $z_0 = y_2/y_1$, donc une solution particulière de cette équation homogène est $Z_0 = (y_2/y_1)'$. Comme le rapport y_2/y_1 n'est pas constant, sa dérivée n'est pas la fonction nulle. Donc la solution générale est $Z = \lambda Z_0 = \lambda (y_2/y_1)'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
  $\Rightarrow z' = \lambda (y_2/y_1)' \Rightarrow z = \lambda (y_2/y_1) + \mu \Rightarrow y = \lambda y_2 + \mu y_1$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

- **Recherche de deux solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation homogène [1]**
  On cherche une solution particulière de la forme $y = e^{rx} \Rightarrow y' = r\,e^{rx} \Rightarrow y'' = r^2\,e^{rx}$
  e^{rx} est solution de l'équation homogène si et seulement si $e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0$ soit encore $r^2 + ar + b = 0$. Il s'agit de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle.

  * si $\Delta = a^2 - 4b > 0 \Rightarrow$ deux racines réelles r_1 et r_2
  $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$ sont deux solutions particulières de l'équation homogène et $y_2/y_1 = e^{(r_2 - r_1)x}$ n'est pas constant. Donc une solution générale est :

$$y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

  * si $\Delta = a^2 - 4b < 0 \Rightarrow$ deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$
  $y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ et $y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$ sont deux solutions particulières de l'équation homogène. Soit $y_3 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ et $y_4 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$ deux solutions

particulières réelles de cette même équation, telles que $y_4/y_3 = \tan\beta x$ n'est pas constant. Donc une solution générale est :

$$y = e^{\alpha x}\left(\lambda_1 \cos\beta x + \lambda_2 \sin\beta x\right)$$

∗ si $\Delta = a^2 - 4b = 0 \Rightarrow$ une racine double réelles r

$y_1 = e^{rx}$ est une solution particulière de l'équation homogène. Montrons que $y_2 = xe^{rx}$ est une autre solution particulière : $y_2 = xe^{rx} \Rightarrow y_2' = e^{rx}(rx+1) \Rightarrow y_2'' = e^{rx}\left(r^2x+2r\right)$.

Alors $y_2'' + a\,y_2' + b\,y_2 = e^{rx}\left(r^2x+2r\right) + ae^{rx}(rx+1) + bxe^{rx} = e^{rx}\left(\underbrace{\left(r^2+ar+b\right)}_{=0}x + \underbrace{2r+a}_{=0}\right) = 0$

De plus $y_2/y_1 = x$ n'est pas constant. Donc une solution générale est :

$$y = e^{rx}\left(\lambda_1 x + \lambda_2\right)$$

remarque : on peut aussi parler d'équation caractéristique pour une équation du premier ordre. Considérons l'équation différentielle $y' + ay = 0$ qui a pour équation caractéristique $r + a = 0$ dont la solution est $r = -a$. Alors $y_1 = e^{rx} = e^{-ax}$ est une solution particulière et la solution générale est de la forme $y = \lambda e^{-ax}$

b) Equation différentielle à coefficients constants avec second membre de la forme $Ae^{\alpha x} + B$

A, B, α sont des nombres réels ou complexes. Le problème est de trouver une solution particulière. On peut considérer que le second membre est une somme de fonctions : $y'' + ay' + by = g(x) + h(x)$, avec $g(x) = Ae^{\alpha x}$ et $h(x) = B$. On pourrait vérifier que si y_1 et y_2 sont respectivement des solutions particulières de l'équation avec comme second membre $g(x)$ et $h(x)$, alors $y_1 + y_2$ est solution particulière de l'équation générale.

- **Le second membre est une constante** : $y'' + ay' + by = B$
  Une solution particulière est la fonction constante $y = B/b$

- **Le second membre est une exponentielle** : $y'' + ay' + by = Ae^{\alpha x}$

∗ α n'est pas racine de l'équation caractéristique : il existe une solution particulière de la forme,
$y = \lambda e^{\alpha x} \Rightarrow y' = \lambda\alpha e^{\alpha x} \Rightarrow y'' = \lambda\alpha^2 e^{\alpha x}$

Donc $\lambda e^{\alpha x}\left(\alpha^2 + a\alpha + b\right) = Ae^{\alpha x} \Rightarrow \lambda\left(\alpha^2 + a\alpha + b\right) = A \Rightarrow \lambda = \dfrac{A}{\alpha^2 + a\alpha + b}$

Ce résultat est valable pour une équation du premier ordre.

∗ α est une racine simple de l'équation caractéristique : il existe une solution particulière de la forme,
$y = \lambda xe^{\alpha x} \Rightarrow y' = \lambda(\alpha x + 1)e^{\alpha x} \Rightarrow y'' = \lambda\left(\alpha^2 x + 2\alpha\right)e^{\alpha x}$

Donc $\lambda e^{\alpha x}\left(\left(\alpha^2 x + 2\alpha\right) + a(\alpha x + 1) + bx\right) = Ae^{\alpha x} \Rightarrow \lambda\left(\underbrace{\left(\alpha^2 + a\alpha + b\right)}_{=0}x + 2\alpha + a\right) = A \Rightarrow \lambda = \dfrac{A}{2\alpha + a}$

Ce résultat est valable pour une équation du premier ordre.

∗ α est une racine double de l'équation caractéristique : il existe une solution particulière de la forme,
$y = \lambda x^2 e^{\alpha x} \Rightarrow y' = \lambda\left(\alpha x^2 + 2x\right)e^{\alpha x} \Rightarrow y'' = \lambda\left(\alpha^2 x^2 + 4\alpha x + 2\right)e^{\alpha x}$

Donc $\lambda e^{\alpha x}\left[\left(\alpha^2 x^2 + 4\alpha x + 2\right) + a\left(\alpha x^2 + 2x\right) + bx^2\right] = Ae^{\alpha x} \Rightarrow \lambda\left[\underbrace{\left(\alpha^2 + a\alpha + b\right)}_{=0}x^2 + 2\underbrace{\left(2\alpha + a\right)}_{=0}x + 2\right] = A \Rightarrow \lambda = \dfrac{A}{2}$

Ce résultat est valable pour une équation du premier ordre.

Ex : **résoudre** $y''-2y'+y=6e^{x}$

équation caractéristique $r^2-2r+1=0$ ayant une racine double 1. Une solution générale de l'équation homogène est de la forme $y=e^{x}\left(\lambda_1 x+\lambda_2\right)$ et une solution particulière de l'équation avec second membre est de la forme

$y=\lambda x^2 e^{x} \Rightarrow y'=\lambda\left(x^2+2x\right)e^{\alpha x} \Rightarrow y''=\lambda\left(x^2+4x+2\right)e^{\alpha x}$

$y''-2y'+y=6e^{x} \Rightarrow \lambda=3$

donc la solution générale de l'équation avec second membre est $y=e^{x}\left(3x^2+\lambda_1 x+\lambda_2\right)$

c) <u>Equation différentielle à coefficients constants avec second membre de la forme</u> $\alpha\cos kx+\beta\sin kx$

Si $y''+ay'+by=\alpha\cos kx+\beta\sin kx$ on pose $\cos kx=\dfrac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$ et $\sin kx=\dfrac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$:

$$y''+ay'+by=\alpha\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}+\beta\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}=\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2i}\right)e^{ikx}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2i}\right)e^{-ikx}=\alpha' e^{ikx}+\beta' e^{-ikx}$$

On se ramène à la situation précédente où le second membre est une exponentielle.

∗ si $\pm ik$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique, une solution particulière est de la forme :
$\lambda e^{ikx}+\mu e^{-ikx}=\lambda\left(\cos kx+i\sin kx\right)+\mu\left(\cos kx-i\sin kx\right)=\left(\lambda+\mu\right)\cos kx+i\left(\lambda-\mu\right)\sin kx=\lambda'\cos kx+\mu'\sin kx$

∗ si $\pm ik$ sont racines de l'équation caractéristique, une solution particulière est de la forme :
$x\left(\lambda e^{ikx}+\mu e^{-ikx}\right)$ soit encore $x\left(\lambda'\cos kx+\mu'\sin kx\right)$.

Ex : **résoudre** $2y'+3y=\cos^2 2x$

équation caractéristique $2r+3=0$ ayant une racine réelle simple $r=-3/2$. Une solution générale de l'équation homogène est de la forme $y=\lambda e^{-3/2x}$. On peut écrire que $\cos^2 2x=\frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x \Rightarrow$

$2y'+3y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x$

∗ seconde membre = $\frac{1}{2}$: solution particulière $y=\frac{1}{6}$

∗ seconde membre = $\frac{1}{2}\cos 4x$: solution particulière de la forme $y=A\cos 4x+B\sin 4x$ car ± 4i n'est pas racine de l'équation caractéristique.

$y=A\cos 4x+B\sin 4x \Rightarrow y'=-4A\sin 4x+4B\cos 4x$

$$2y'+3y=\frac{1}{2}\cos 4x \Rightarrow 2\left(-4A\sin 4x+4B\cos 4x\right)+3\left(A\cos 4x+B\sin 4x\right)=\frac{1}{2}\cos 4x \Rightarrow \begin{cases}8B+3A=\frac{1}{2}\\ 3B-8A=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=\frac{3}{146}\\ B=\frac{4}{73}\end{cases}$$

donc la solution générale de l'équation avec second membre est $y=\lambda e^{-3/2x}+\frac{1}{6}+\frac{3}{146}\cos 4x+\frac{4}{73}\sin 4x$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Ex : **résoudre** $y''-2y'+5y=10\cos x$

équation caractéristique $r^2-2r+5=0$ ayant deux racines complexes conjuguées $r=1\pm 2i$. Une solution générale de l'équation homogène est de la forme $y=e^{x}\left(\lambda\cos 2x+\mu\sin 2x\right)$ et une solution particulière de l'équation avec second membre est de la forme $y=A\cos x+B\sin x$ car ± i n'est pas racine de l'équation caractéristique.

$y=A\cos x+B\sin x \Rightarrow y'=-A\sin x+B\cos x \Rightarrow y''=-A\cos x-B\sin x$

$y''-2y'+5y=10\cos x \Rightarrow \left(-A\cos x-B\sin x\right)-2\left(-A\sin x+B\cos x\right)+5\left(A\cos x+B\sin x\right)=10\cos x$

$\Rightarrow \begin{cases}4A-2B=10\\ 2A+4B=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=2\\ B=-1\end{cases}$

donc la solution générale de l'équation avec second membre est $y = 2\cos x - \sin x + e^x\left(\lambda\cos 2x + \mu\sin 2x\right)$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Ex : **résoudre** $y'' + 4y = \sin 2x + 3\cos 2x$

équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ ayant deux racines complexes conjuguées $r = \pm 2i$. Une solution générale de l'équation homogène est de la forme $y = \lambda\cos 2x + \mu\sin 2x$ et une solution particulière de l'équation avec second membre est de la forme $y = x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right)$ car ± i est racine de l'équation caractéristique.

$y = x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) \Rightarrow y' = A\cos 2x + B\sin 2x + x\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right)$

$\Rightarrow y'' = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x$

$y'' + 4y = \sin 2x + 3\cos 2x \Rightarrow A = -\dfrac{1}{4}$ et $B = \dfrac{3}{4}$

donc la solution générale de l'équation avec second membre est $y = -\dfrac{1}{4}x\cos 2x + \dfrac{3}{4}x\sin 2x + \lambda\cos 2x + \mu\sin 2x$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

d) <u>Equation différentielle à coefficients non constants</u> : $y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$

Une méthode de résolution existe si l'on connaît une solution particulière de l'équation homogène, soit $y_0(x)$. On pose alors $y = z(x)y_0(x) \Rightarrow y' = z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x) \Rightarrow y'' = z''(x)y_0(x) + 2z'(x)y_0'(x) + z(x)y_0''(x)$

$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x) \Leftrightarrow \left(z''y_0 + 2z'y_0' + zy_0''\right) + a\left(z'y_0 + zy_0'\right) + bzy_0 = g$

$\Leftrightarrow z''y_0 + z'\left(2y_0' + ay_0\right) + z\underbrace{\left(y_0'' + ay_0' + by_0\right)}_{=0} = g \Leftrightarrow z''y_0 + z'\left(2y_0' + ay_0\right) = g$

On pose $z' = u$ et on se ramène à une équation du premier ordre.

Ex : **résoudre** $x^2y'' - xy' + y = x$

équation homogène : $x^2y'' - xy' + y = 0$ dont une solution particulière est $y = x$

on pose $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z \Rightarrow y'' = z''x + 2z'$

$x^2y'' - xy' + y = x \Leftrightarrow x^2\left(z''x + 2z'\right) - x\left(z'x + z\right) + zx = x \Leftrightarrow x^2z'' + xz' = 1$

on pose $z' = u \Rightarrow x^2u' + xu = 1 \Rightarrow u' + \dfrac{1}{x}u = \dfrac{1}{x^2}$

équation homogène : $u' + \dfrac{1}{x}u = 0 \Rightarrow \dfrac{u'}{u} = -\dfrac{1}{x} \Rightarrow u = \dfrac{\lambda}{x}$

méthode de variation de la constante : $u' = \dfrac{\lambda'}{x} - \dfrac{\lambda}{x^2}$

$u' + \dfrac{1}{x}u = \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{\lambda'}{x} = \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow \lambda = \ln|x|$

donc une solution particulière est $u = \dfrac{\ln|x|}{x}$ et la solution générale est :

$u = \dfrac{\lambda}{x} + \dfrac{\ln|x|}{x} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\lambda}{x} + \dfrac{\ln|x|}{x} \Rightarrow z = \lambda\ln|x| + \dfrac{1}{2}\ln^2|x| + \mu \Rightarrow y = \lambda x\ln|x| + \dfrac{x}{2}\ln^2|x| + \mu x$

IV.4. <u>Equations différentielles non linéaires</u>

Elles sont assez mal connues sur le plan mathématique d'où l'utilisation de méthodes numériques pour les résoudre et la simulation pour connaître leur comportement.

V. Les suites réelles

V.1. Définitions

- On appelle **suite** sur $\mathbb{R}$ toute application de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$. On écrit $v(n) = u_n$. u_n peut être donnée en fonction de n ou être définie par une **relation de récurrence** : $u_n = f(u_{n-1})$ ou $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2})$.
- Une suite **croissante** ou **décroissante** au sens large ou strict est dite **monotone**. Pour étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. S'il s'agit d'une suite à termes positifs, on compare le rapport u_{n+1}/u_n à 1.
- La suite de terme général u_n est dite **majorée** (ou **minorée**) si l'ensemble des réels u_n admet un **majorant** (ou un **minorant**). L'ensemble des réels u_n admet une borne supérieure (ou inférieure) appelée borne supérieure (ou inférieure) de la suite. Une suite majorée et minorée est dire **bornée**.
- On dit que la suite de terme général u_n est **convergente** et admet pour limite ℓ (ou $u_n \to \ell$ quand n $\to +\infty$) si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n < N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$. Lorsqu'une suite est convergente, sa limite est unique. Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

V.2. Suite définie par une relation de récurrence d'ordre 1

On part de $u_n = f(u_{n-1})$ avec u_0 donné. Si la fonction *f* est continue, les limites possibles de cette suite sont les solutions de l'équation $\ell = f(\ell)$. Pour voir les propriétés de la suite, on peut construire la courbe d'équation $y = f(x)$: la limite est le point d'intersection entre la courbe et la bissectrice.

Ex : **étude de la suite $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$ avec $u_0 > -2$**

on cherche les limites possibles : s'il en existe une notée ℓ, elle sera solution de l'équation $\ell = \sqrt{2+\ell}$

$\Rightarrow \ell^2 = 2 + \ell \Rightarrow \ell = -1$ ou $\ell = 2$. Or la suite est positive donc $\ell = 2$

Ex : **soit $u_n = (u_{n-1} - 6)/(u_{n-1} - 4)$ avec u_0 donné et choisi de telle sorte que $u_n \neq 4$**

1) rechercher pour quelles valeurs α et β la suite est constante ($\alpha < \beta$)

$\alpha = 2$ et $\beta = 3$

2) en supposant que u_0 est différent de α et β, calculer $v_n = (u_n - \alpha)/(u_n - \beta)$ et montrer que v_n est une suite géométrique de raison 1/2 donc que $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$

3) en déduire l'expression de u_n en fonction de v_0 et n, et montrer que $u_n \to 2$ quand n $\to +\infty$

$$u_n = \left[2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n v_0\right] \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0\right]^{-1}$$

Cas particulier : $u_n = a u_{n-1} + b$

La seule limite possible est $\ell = a\ell + b \Rightarrow \ell(1-a) = b$

- si $a \neq 1$ alors $\ell = b/(1-a)$

$$\left.\begin{array}{l} u_n = a u_{n-1} + b \\ \ell = a\ell + b \end{array}\right\} \Rightarrow u_n - \ell = a(u_{n-1} - \ell)$$

$$\Rightarrow v_n = a v_{n-1} \text{ en posant } v_n = u_n - \ell$$

$$\Rightarrow v_n = a^n v_0$$

on obtient une suite géométrique qui converge vers 0 si $|a| < 1$, vers $+\infty$ si $|a| > 1$, ou qui n'a pas de limite si $a = -1$

- si $a = 1$ alors $u_n = u_{n-1} + b$

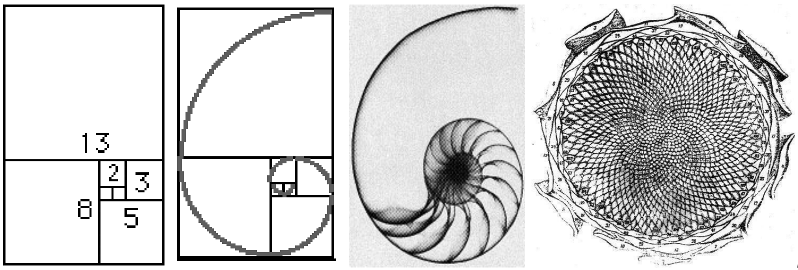
on obtient une suite arithmétique : $u_n = u_{n-1} + b = u_{n-2} + 2b = u_0 + nb$

V.3. Suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2

On part de $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ avec u_0 et u_1 donnés. Par récurrence, cette suite est entièrement déterminée. On définit $r^{n+2} = a\,r^{n+1} + b\,r^n \Rightarrow r^2 - a\,r - b = 0$.

- si r_1 et r_2 sont deux racines distinctes, réelles ou complexes : $u_n = \lambda\,r_1^n + \mu\,r_2^n$
- si $r_1 = r_2 = a/2$ est une racine double : $u_n = \lambda\,r^n + \mu\,n\,r^n = (\lambda + \mu\,n)\,r^n$

<u>**Ex**</u> **:** **analyser la suite de Fibonacci $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$**



spirale de Fibonacci ou *spirale logarithmique*

on calcule les racines de $r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

u_n est de la forme $u_n = \lambda\,r_1^n + \mu\,r_2^n$. On détermine $\lambda = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ et $\mu = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$ en posant cette formule pour u_0 et u_1. Donc $u_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

<u>**Ex**</u> **:** **analyser la suite $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$**

on calcule les racines de $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

u_n est de la forme $u_n = (\lambda + \mu\,n)\,1^n$. On détermine λ et μ en posant cette expression pour u_0 et u_1 et on trouve $u_n = 2 - n$.

VI. Séries numériques et séries entières

VI.1. <u>Séries numériques</u>

- Soit une suite réelle de terme général u_n. On lui associe la suite S_n définie par $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. On appelle **série de terme général** u_n le couple formé par ces deux suites.
- Etudier la série $\sum u_n$, c'est chercher si S_n a une limite finie ou non quand $n \to \infty$. Si S_n tend vers une limite finie S quand $n \to \infty$, on dit que la série est **convergente** et a pour somme S. Si S_n n'a pas de limite finie quand $n \to \infty$, on dit que la série est **divergente**. Il existe deux sortes de divergences : de **première espèce** si $S_n \to \infty$ quand $n \to \infty$ et de **seconde espèce** si S_n n'a pas de limite quand $n \to \infty$.
- Une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que la série $\sum u_n$ soit convergente est que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Si u_n ne tend pas vers 0, la série est divergente ; si u_n tend vers 0, on ne peut rien dire.
- On ne change pas la nature d'une série en supprimant un nombre aussi grand que l'on veut mais fini de termes au début de la série.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.
- La somme de deux séries convergentes est convergente ; la somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente ; on ne peut rien dire sur la somme de deux séries divergentes.
- **théorème** : pour qu'une série $\sum u_n$ **à termes positifs** soit convergente, il faut et il suffit que la suite $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ soit majorée.
- **théorème** : la série de Riemann $\sum u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si $\alpha > 1$ et divergente si $\alpha \le 1$.

- **règle de Cauchy** : soit une série $\sum u_n$ **à termes positifs**. Si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite inférieure ou égale à 1 quand $n \to \infty$, alors la série est convergente ; si cette limite est supérieure à 1 et finie, ou infinie, alors la série est divergente.
- **règle de d'Alembert** : soit une série $\sum u_n$ **à termes positifs**. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite inférieure ou égale à 1 quand $n \to \infty$, alors la série est convergente ; si cette limite est supérieure à 1 et finie, ou infinie, alors la série est divergente.

<u>**Ex**</u> **: convergence de la série de terme général** $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$$

soit $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) - \ln 1 \to +\infty$ quand $n \to \infty$

donc la série est divergente

<u>**Ex**</u> **: convergence de la série de terme général** $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

soit $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ quand $n \to \infty$

donc la série est convergente et a pour somme 1.

<u>**Ex**</u> **: nature de la suite** $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$

$$\left.\begin{array}{l} \text{quand } n \to +\infty \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \to +\infty \quad \text{car } \sum \frac{1}{n} \text{ est divergente} \\ \text{quand } n \to +\infty \quad \ln n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{forme indéterminée } +\infty - \infty$$

or la suite a_n est de même nature que la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = a_{n+1} - a_n$

$$u_n = a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc on cherche un développement limité à l'ordre 2 de ces deux expressions :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \sim -\frac{1}{2n^2} \text{ quand } n \to +\infty$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente donc la suite a_n est convergente et sa limite est notée E, constante d'Euler.

VI.2. <u>Séries entières</u>

a) <u>Définitions</u>

- Une **série entière** est une série de terme général $u_n(x) = a_n x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et a_n une suite dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $S_n(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ est un polynôme de degré n.
- Cas particulier : $S_n(0) = u_0$ donc au point 0 la série est toujours convergente.

- Cas particulier où le terme général est une **suite géométrique** : $u_n(x) = ax^n \Rightarrow S_n = a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n$

  1[er] cas : x ≠ 1 $\quad S_n = a\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

  si $|x| < 1$, $x^{n+1} \to 0$ quand $n \to \infty$ et $S_n \to \dfrac{a}{1-x}$ la série est convergente de somme $\dfrac{a}{1-x}$

  si $|x| > 1$, $x^{n+1} \to \infty$ quand $n \to \infty$ et $S_n \to \infty$ la série est divergente de première espèce

  si $x = -1$, $x^{n+1} \to 1$ ou -1 quand $n \to \infty$ et $S_n \to 0$ ou $\dfrac{2a}{1-x}$ la série est divergente de seconde espèce

  2[ème] cas : x = 1 $\quad S_n \to \infty$ la série est divergente de première espèce

b) Développement en séries entières de fonctions de variable réelle

- Une fonction f définie sur un intervalle I ouvert contenant 0 est développable en série entière s'il existe une série $\left(a_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que cette série converge $\forall x \in \left]-R, R\right[$ et ait pour somme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- Si f est développable en série entière, alors $\exists R > 0$ tel que f est indéfiniment dérivable sur $\left]-R, R\right[$.
- Si f est indéfiniment dérivable sur $\left]-R, R\right[$ et si f est développable en série entière, alors $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$
- Si f est indéfiniment dérivable en 0, alors la série entière $\left(\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la **série de Taylor** de f :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left(x\theta_n(x)\right)}_{R_n(x)}$$

- Pour qu'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 soit développable en série entière, il faut et il suffit que le reste d'ordre n de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à f sur $[0, x]$ tende vers 0 quand $n \to \infty$

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ pour $\|x\| < 1$	$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$ pour $\|x\| < 1$
$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$ pour $\|x\| < 1$	$\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \ldots - \dfrac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots$ pour $\|x\| < 1$
$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$ pour $\|x\| < 1$	$\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ pour $\|x\| < 1$
$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ pour $R = \infty$	$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ pour $R = \infty$
$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$ pour $R = \infty$	$e^{-x} = 1 - \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$ pour $R = \infty$
$\cosh x = \dfrac{e^{-x} + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ pour $R = \infty$	$\sinh x = \dfrac{e^{-x} - e^{-x}}{2} = x + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ pour $R = \infty$

<u>**Ex**</u> : **développer en série entière** $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^3+3x^2+3x+1}$

en remarquant que $f(x) = \dfrac{x^3+2}{(x+1)^3} = A + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2} + \dfrac{D}{(x+1)^3}$ on détermine A, B, C et D par identification.

$A = 1,\ B = -3,\ C = 3$ et $D = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{3}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+1)^3}$

On développe les fractions rationnelles en séries entières :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}x^{n+1}+(-1)^{n+2}x^{n+2}+\ldots$$

En dérivant cette expression on obtient :

$$\frac{-1}{(1+x)^2}=-1+2x-3x^2+\ldots+(-1)^{n+1}(n+1)x^n+(-1)^{n+2}(n+2)x^{n+1}+\ldots$$

Idem pour cette expression :

$$\frac{2}{(1+x)^3}=2-6x+\ldots+(-1)^{n+2}(n+1)(n+2)x^n+\ldots$$

$$\text{donc } f(x)=2-6x+\ldots+(-1)^n\left[-3+3(n+1)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]x^n+\ldots$$

$$=2-6x+\ldots+(-1)^n\left(\frac{n^2+9n+2}{2}\right)x^n+\ldots=2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n^2+9n+2}{2}\right)x^n$$

VII. Les séries de Fourier

VII.1. Définitions

Il est parfois nécessaire de savoir développer une fonction en série trigonométrique, par exemple pour résoudre un problème aux limites (voir l'équation de la chaleur plus loin).

- une fonction *f* est dite **périodique**, de période *P*, si pour tout *x*, $f(x+P)=f(x)$, où *P* est une constante positive. La plus petite valeur de $P>0$ est la période de *f*. Les multiples de la période sont eux-mêmes des périodes. Enfin, si *f* et *g* sont deux fonctions de période *P*, toute combinaison linéaire de ces fonctions est une fonction périodique de période *P*.
- une fonction f est dite **paire** si $f(-x)=f(x)$ et **impaire** si $f(-x)=-f(x)$.

VII.2. Les séries de Fourier

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-L,L]$ et déterminée à l'extérieur de cet intervalle par $f(x+2L)=f(x)$, c'est-à-dire que $f(x)$ présente une période 2 L. La **série de Fourier** ou le **développement de Fourier** qui correspond à $f(x)$ est défini par :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\to f(x)$$

où $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$ et $b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$ sont les **coefficients de Fourier**. On pose :

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

a) Détermination de a_n

Pour déterminer a_n on multiplie $f(x)$ par $\cos\frac{m\pi x}{L}$ puis on intègre de $-L$ à L.

$$\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx=A\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx+b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx\right)$$

* soit $\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=\frac{L}{m\pi}\left[\sin\frac{m\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}=\frac{L}{m\pi}(\sin m\pi+\sin m\pi)=0$

* soit $\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{L}+\cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right)dx$

si m ≠ n

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{L}{2(m-n)\pi}\left[\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}+\frac{L}{2(m+n)\pi}\left[\sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}$$
$$=\frac{L}{2(m-n)\pi}\left(\sin(m-n)\pi+\sin(m-n)\pi\right)+\frac{L}{2(m+n)\pi}\left(\sin(m+n)\pi+\sin(m+n)\pi\right)$$
$$=0$$

si m = n

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\int_{-L}^{L}\cos^2\frac{m\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1+\cos\frac{2m\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{2}[x]_{-L}^{L}+\frac{L}{4m\pi}\left[\sin\frac{2m\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}=L$$

* soit $\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(\sin\frac{(n-m)\pi x}{L}+\sin\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)dx$

si m ≠ n

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=-\frac{L}{2(n-m)\pi}\left[\cos\frac{(n-m)\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}-\frac{L}{2(n+m)\pi}\left[\cos\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}$$
$$=-\frac{L}{2(n-m)\pi}\left(\cos(n-m)\pi-\cos(n-m)\pi\right)-\frac{L}{2(m+n)\pi}\left(\cos(n+m)\pi-\cos(n+m)\pi\right)$$
$$=0$$

si m = n

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sin\frac{2m\pi x}{L}dx=-\frac{L}{4m\pi}\left[\cos\frac{2m\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}=0$$

Or $\sum_{n=1}^{\infty}X_n=\sum_{n=1}^{n<m}X_n+X_m+\sum_{n>m}^{\infty}X_n$ donc $\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx=a_mL\Rightarrow a_m=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx$

b) <u>Détermination de</u> b_n

Pour déterminer b_n on multiplie $f(x)$ par $\sin\frac{m\pi x}{L}$ puis on intègre de $-L$ à L.

$$\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx=A\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx+b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx\right)$$

On montre de même que $\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx=b_mL\Rightarrow b_m=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx$

c) <u>Détermination de</u> A

Pour déterminer a_0 on applique la définition de a_n au rang zéro

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{L}\left(A\int_{-L}^{L}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx+b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\right)=2A$$

On trouve donc $A=a_0/2$

d) <u>Remarques</u>

- puisque $f(x)$ est de période $2L$, les coefficients a_n et b_n peuvent également être définis par les expressions

  $a_n=\frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$ et $b_n=\frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$ pour n = 0, 1, 2,...

où c est un nombre entier quelconque. Dans le cas particulier où $c=-L$, on retrouve les expressions précédentes.

- le terme constant $a_0/2$ est la moyenne de $f(x)$ sur une période.
- si $L = \pi$, les coefficients a_n et b_n ont des expressions particulièrement simples.
- si f est paire, alors $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ est paire et $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ est impaire :

  $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$ et $\mathrm{b_n}=0 \Rightarrow a_0+\sum a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$
- si f est impaire, alors $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ est impaire et $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ est paire :

  $a_n=0$ et $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \Rightarrow a_0+\sum b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$
- un **développement en cosinus** est un développement de Fourier où seuls sont présents les termes en cosinus ; de même un **développement en sinus** est un développement de Fourier où seuls sont présents les termes en sinus. Quand on veut obtenir ce type de développement, on définit généralement f dans l'intervalle $[0,L]$ qui représente la moitié de l'intervalle $[-L,L]$ et on fait une extension sur l'autre moitié de l'intervalle $[-L,0]$ de façon à ce que f soit parfaitement définie : paire ($a_n \neq 0$ et $b_n=0 \rightarrow$ développement en cosinus) ou impaire ($a_n=0$ et $b_n\neq 0 \rightarrow$ développement en sinus).

<u>Ex</u> : **développer la fonction** $\begin{cases} f(x)=-1 \text{ si } -\pi<x<0 \\ f(x)=1 \text{ si } 0<x<\pi \\ f(x+2\pi)=f(x) \end{cases}$ **en série de Fourier**

période $2L=2\pi \Rightarrow L=\pi$

$a_0=0$ et $a_n=0$ car la fonction est impaire

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\left[\cos nx\right]_0^\pi=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

la série de Fourier correspondante est :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\cos n\pi)\sin x=\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{4}{3\pi}\sin 3x+\ldots$$

<u>Ex</u> : **développer la fonction** $\begin{cases} f(x)=0 \text{ si } -5<x<0 \\ f(x)=3 \text{ si } 0<x<5 \\ f(x+10)=f(x) \end{cases}$ **en série de Fourier**

période $2L=10 \Rightarrow L=5$

$$a_0=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\,dx=\frac{3}{5}\int_0^5 dx=3$$

$$a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}dx+\frac{1}{5}\int_0^5(3)\cos\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{3}{5}\int_0^5\cos\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{3}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5=0$$

$$b_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0}(0)\sin\frac{n\pi x}{5}dx+\frac{1}{5}\int_0^5(3)\sin\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{3}{5}\int_0^5\sin\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5=\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

la série de Fourier correspondante est :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{5}+b_n\sin\frac{n\pi x}{5}\right)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi x}{5}+\frac{2}{\pi}\sin\frac{3\pi x}{5}+\ldots$$

<u>Ex</u> : **développer la fonction** $f(x)=x$ si $0<x<2$ **1) en une série de sinus 2) en une série de cosinus**

1) on fait une <u>extension impaire</u> de f sur l'intervalle $[-2,2]$. Dans ces conditions, $2L=4 \Rightarrow L=2$

$$a_0=0,\ a_n=0 \text{ et } b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

on intègre par partie en posant $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = 1 \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{2} \Rightarrow v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{cases}$

$$b_n = \frac{-2}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{-2}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi$$

la série de Fourier correspondante est :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2} + b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos n\pi\sin\frac{n\pi x}{2} = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi x + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - ...\right)$$

2) on fait une <u>extension paire</u> de f sur l'intervalle $[-2,2]$. Dans ces conditions, $2L = 4 \Rightarrow L = 2$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx \text{ et } b_n = 0$$

on intègre par partie en posant $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = 1 \\ dv = \cos\frac{n\pi x}{2} \Rightarrow v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} \end{cases}$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \int_0^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$$

la série de Fourier correspondante est :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2} + b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right) = 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2} = 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2} + ...\right)$$

3) Les deux séries représentent $f(x)$ dans l'intervalle $0 < x < 2$ et la deuxième converge plus rapidement.

<u>Ex</u> : **développer la fonction** $\begin{cases} f(x) = x^2 \text{ si } 0 < x < 2\pi \\ f(x + 2\pi) = f(x) \end{cases}$ **en série de Fourier**

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$$

a_n et b_n sont calculés en posant leurs expressions respectives et en intégrant deux fois par partie.

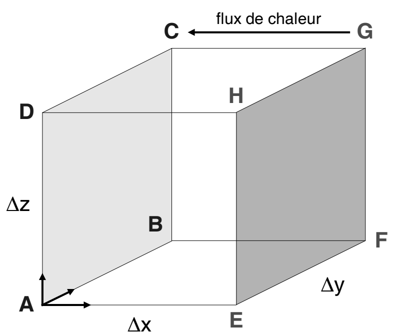
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,dx = \frac{-4\pi}{n}$$

la série de Fourier correspondante est $\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$

VII.3. <u>Propagation de la chaleur</u>

a) <u>Cas général</u>



Considérons un solide dont la température est $T(x,y,z,t)$ en un point de coordonnées (x,y,z) à l'instant t. Soit $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ un élément de volume de ce solide, délimité par deux plans parallèles ABCD et EFGH situés à une distance Δx l'un de l'autre, de températures respectives T et $T + \Delta T$. Dans ces conditions, la chaleur passe du plan dont la température est la plus élevée au plan dont la température est la plus faible.

La quantité de chaleur par unité de surface et de temps, appelée **flux de chaleur** (W m^{-2}), est directement proportionnelle à la différence de température ΔT et inversement proportionnelle à la distance Δx :

$$G = K\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

avec K la **conductibilité thermique du matériau** (W m^{-1} K^{-1}). En faisant tendre ΔT et Δx vers zéro, on obtient l'expression du flux de chaleur : $G = K\frac{\partial T}{\partial x}$.

La quantité de chaleur entrant par la face EFGH pendant l'intervalle de temps Δt est : $Q_{x+\Delta x} = K\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z\Delta t$

La quantité de chaleur sortant par la face ABCD pendant l'intervalle de temps Δt est : $Q_x = K\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}\Delta y\Delta z\Delta t$

La quantité de chaleur se propageant dans la direction Ox et restant dans l'élément de volume ΔV est donnée par la différence : $Q_{\Delta x} = Q_{x+\Delta x} - Q_x = K\left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}\right)\Delta y\Delta z\Delta t$

De même dans la direction Oy on a : $Q_{\Delta y} = Q_{y+\Delta y} - Q_y = K\left(\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+\Delta y} - \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y}\right)\Delta x\Delta z\Delta t$

De même dans la direction Oz on a : $Q_{\Delta z} = Q_{z+\Delta z} - Q_z = K\left(\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z+\Delta z} - \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z}\right)\Delta x\Delta y\Delta t$

La quantité de chaleur totale gagnée par l'élément de volume est donc la somme des trois : $Q = Q_{\Delta x} + Q_{\Delta y} + Q_{\Delta z}$. Elle sert à élever la température du volume élémentaire de ΔT. Par ailleurs, nous savons que la quantité de chaleur nécessaire pour élever de ΔT la température d'une masse m est $Q = m\sigma\Delta T$ avec σ la **chaleur massique du matériau** (J kg^{-1} K^{-1}). En introduisant $\mu = \frac{m}{\Delta x\Delta y\Delta z}$ la **masse volumique du matériau** (kg m^{-3}) on obtient $Q = \mu\Delta x\Delta y\Delta z\,\sigma\Delta T$. On égale alors les deux expressions de la quantité totale de chaleur et on divise le tout par $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$:

$$K\left(\frac{1}{\Delta x}\left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}\right) + \frac{1}{\Delta y}\left(K\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+\Delta y} - \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y}\right) + \frac{1}{\Delta z}\left(K\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z+\Delta z} - \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z}\right)\right) = \mu\sigma\frac{\Delta T}{\Delta t}$$

Lorsque Δx, Δy, Δz et Δt tendent vers zéro, cette équation devient :

$$K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = c\nabla^2 T \text{ avec } c = \frac{K}{\mu\sigma}$$

Le terme c est appelé **coefficient de diffusion** (m^2 s^{-1}) : par exemple pour l'aluminium c = 0.835 cm^2 s^{-1}.

Remarque : dans le cas d'un courant stationnaire de chaleur, la température T est indépendante du temps t donc $\partial T/\partial t = 0$. Alors l'équation ci-dessus se réduit à l'équation de Laplace $\nabla^2 T = 0$.

b) <u>Cas d'une barre mince</u>

Considérons les extrémités $x = 0$ et $x = L$ d'une barre mince se trouvant sur l'axe des x. Le coefficient de diffusion du matériau est c. La surface latérale de la barres est isolée de façon à ce qu'il n'y ait aucun échange de chaleur possible avec le milieu extérieur. Le problème est à une dimension puisque la température ne dépend que de la position x à un temps t quelconque. Par conséquent, elle peut être exprimée par $T(x,t)$. L'équation de propagation de la chaleur est alors :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = c\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } t > 0$$

On suppose que la température initiale est une fonction de la distance $f(x)$ et que les extrémités sont maintenues respectivement aux températures T_1 et T_2. Ceci se traduit par $T(0,t) = T_1$, $T(L,t) = T_2$ et $T(x,0) = f(x)$. On pose $T(x,t) = F(x)G(t)$ où F ne dépend que de x et G ne dépend que de t. Par substitution dans l'équation différentielle il vient $F(x)G'(t)=cF''(x)G(t)$ soit encore $\frac{1}{c}\frac{G'(t)}{G(t)}=\frac{F''(x)}{F(x)}$ si l'on sépare les variables. On peut montrer que chaque membre est constant, et en donnant à cette constante la valeur *k*, on obtient :

$$\begin{cases} F''(x)-k\,F(x)=0 & [1] \\ G'(t)-k\,c\,G(t)=0 & [2] \end{cases}$$

[1] est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2-k=0$.

- 1er cas : $k=\alpha^2$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles $r=\pm\alpha$. Une solution générale de [1] est $F(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$.
- 2ème cas : $k=0$, la résolution de [1] est immédiate donc $F(x)=Ax+B$.
- 3ème cas : $k=-\alpha^2$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r=\pm\alpha i$. Une solution générale de [1] est $F(x)=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x$.

[2] est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants. Une solution générale de [2] est $G(t)=C\,e^{kct}$.

c) Conditions aux limites

Pour évaluer les constantes *A*, *B* et *C*, on suppose que $G(t)\neq 0$ et on utilise les conditions aux limites $T(0,t)=0$ et $T(L,t)=0$.

- 1er cas : $k=\alpha^2 \Rightarrow T(x,t)=\left(A\,e^{\alpha x}+B\,e^{-\alpha x}\right)\times C\,e^{kct}=e^{kct}\left(A\,e^{\alpha x}+B\,e^{-\alpha x}\right)$
  $\begin{cases} T(0,t)=0 \\ T(L,t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A\,e^{\alpha L}+B\,e^{-\alpha L}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ A\left(e^{\alpha L}-e^{-\alpha L}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$ donc $T(x,t)=0$ ce qui n'est pas possible.
- 2ème cas : $k=0 \Rightarrow T(x,t)=(Ax+B)\times C\,e^{kct}=e^{kct}(Ax+B)$
  $\begin{cases} T(0,t)=0 \\ T(L,t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ AL+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$ donc $T(x,t)=0$ ce qui n'est pas possible.

  3ème cas : $k=-\alpha^2 \Rightarrow T(x,t)=(A\cos\alpha x+B\sin\alpha x)\times C\,e^{kct}=e^{kct}(A\cos\alpha x+B\sin\alpha x)$
  $\begin{cases} T(0,t)=0 \\ T(L,t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ A\cos\alpha L+B\sin\alpha L=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B\sin\alpha L=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ \sin\alpha L=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha L=n\pi \Rightarrow \alpha=\frac{n\pi}{L}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$

  donc une solution est $T(x,t)=B\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct}\sin\frac{n\pi x}{L}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. Le **théorème de superposition** nous permet d'écrire que $T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct}\sin\frac{n\pi x}{L}$.

La dernière condition, $T(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}$, permet de calculer B_n. Il suffit de développer $f(x)$ en série de Fourier en sinus. Si $f(x)$ est une fonction impaire, périodique de période 2*L*, on a $B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$. Sinon on fait une extension impaire.

<u>Ex</u> : **trouver $T(x,t)$ la température en un point *x* et à un instant donné *t* d'une barre de longueur *L* = 80 cm. Les conditions aux limites sont $T(0,t)=0$, $T(L,t)=0$ et $T(x,0)=100\sin(\pi x/80)$**

$T(x,t)$ est de la forme : $T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{80^2}ct}\sin\frac{n\pi x}{80}$

$f(x)=T(x,0)\Rightarrow 100\sin\frac{\pi x}{80}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{80}$. Ceci revient à développer $f(x)$ en série de Fourier. On a :

$$B_n=\frac{2}{80}\int_0^{80}100\sin\frac{\pi x}{80}\sin\frac{n\pi x}{80}dx=\frac{200}{80}\int_0^{80}\sin\frac{n\pi x}{80}\sin\frac{\pi x}{80}dx=\frac{100}{80}\int_0^{80}\left(\cos\frac{(n-1)\pi x}{80}-\cos\frac{(n+1)\pi x}{80}\right)dx$$

<u>1^{er} cas</u> : $n\neq 1$

$$B_n=100\left[\frac{1}{(n-1)\pi}\sin\frac{(n-1)\pi x}{80}-\frac{1}{(n+1)\pi}\sin\frac{(n+1)\pi x}{80}\right]_0^{80}=100\left[\frac{\sin(n-1)\pi}{(n-1)\pi}-\frac{\sin(n+1)\pi}{(n+1)\pi}\right]=0$$

<u>2^{ème} cas</u> : $n=1$

$$B_1=\frac{100}{80}\int_0^{80}\left(1-\cos\frac{\pi x}{40}\right)dx=\frac{100}{80}\left[x-\frac{40}{\pi}\sin\frac{\pi x}{40}\right]_0^{80}=100$$

donc $T(x,t)=100\times e^{-\frac{\pi^2 c}{80^2}t}\sin\frac{\pi}{80}x$

<u>Ex</u> : trouver $T(x,t)$ la température en un point *x* et à un instant donné *t* d'une barre de longueur *L* = 80 cm. Les conditions aux limites sont $T(0,t)=0$, $T(L,t)=0$ et $T(x,0)=25$

$T(x,t)$ est de la forme $T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{n^2\pi^2 c}{L^2}t}\sin\frac{n\pi}{80}x$

$f(x)=T(x,0)\Rightarrow 25=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{80}x$. Ceci revient à développer $f(x)$ en série de Fourier. On a :

$$B_n=\frac{2}{80}\int_0^{80}25\sin\frac{n\pi x}{80}dx=\frac{50}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{80}\right]_0^{80}=\frac{50}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

donc $T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{50(1-\cos n\pi)}{n\pi}e^{-\frac{n^2\pi^2 c}{80^2}t}\sin\frac{n\pi}{80}x=\frac{100}{\pi}\left(e^{-\frac{\pi^2 c}{80^2}t}\sin\frac{\pi}{80}x+\frac{1}{3}e^{-\frac{3^2\pi^2 c}{80^2}t}\sin\frac{3\pi}{80}x+\ldots\right)$

d) <u>Conditions aux limites</u> : $T(0,t)=T_1$, $T(L,t)=T_2$ **et** $T(x,0)=T_3$

Pour résoudre ce problème, on va supposer que $T(x,t)=R(x,t)+\psi(x)$ où $\psi(x)$ sera une fonction à déterminer. En terme de $R(x,t)$, le problème de valeurs aux limites devient :

$$\frac{\partial R(x,t)}{\partial t}=c\frac{\partial^2 R(x,t)}{\partial x^2}+c\psi''(x)$$

avec $R(0,t)+\psi(0)=T_1$, $R(L,t)+\psi(L)=T_2$ et $R(x,0)+\psi(x)=T_3$. L'équation ci-dessus peut être simplifiée en choisissant $\psi''(x)=0$, $\psi(0)=T_1$, et $\psi(L)=T_2$, d'où nous tirons $\psi(x)=\frac{T_2-T_1}{L}x+T_1$. Le problème devient alors :

$$\frac{\partial R(x,t)}{\partial t}=c\frac{\partial^2 R(x,t)}{\partial x^2}$$

avec $R(0,t)=0$, $R(L,t)=0$, $R(x,0)=T_3-T_1-\frac{T_2-T_1}{L}x$. Comme précédemment la première expression donne :

$$\boxed{R(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{n^2\pi^2 c}{L^2}t}\sin\frac{n\pi x}{L}}$$

La dernière condition donne $T_3-T_1-\frac{T_2-T_1}{L}x=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}=f(x)$ d'où :

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \left(T_3 - T_1 - \frac{T_2 - T_1}{L} x \right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L \left(T_3 - T_1 \right) \sin \frac{n\pi x}{L} - \frac{T_2 - T_1}{L} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \frac{2\left(T_3 - T_1\right)}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx - \frac{2\left(T_2 - T_1\right)}{L^2} \int_0^L x \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \frac{2\left(T_3 - T_1\right)}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^L - \frac{2\left(T_2 - T_1\right)}{L^2} \left(-\frac{L}{n\pi} \left[x \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \\
&= \frac{2\left(T_3 - T_1\right)}{n\pi} \left(1 - \cos n\pi\right) + \frac{2\left(T_2 - T_1\right)}{Ln\pi} \left(L \cos n\pi - \frac{L}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi x}{L} \right]_0^L \right) \\
&= \frac{2\left(T_3 - T_1\right)}{n\pi} \left(1 - \cos n\pi\right) + \frac{2\left(T_2 - T_1\right)}{n\pi} \cos n\pi \\
&= \frac{2\left(T_2 - T_3\right)}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2\left(T_3 - T_1\right)}{n\pi}
\end{aligned}
$$

On obtient donc la solution finale :

$$
\boxed{T\left(x,t\right) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left(T_2 - T_3\right)}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2\left(T_3 - T_1\right)}{n\pi} \right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} ct} \sin \frac{n\pi x}{L}}
$$

$\psi\left(x\right) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$ est la température à l'état stationnaire.

Références

- Ayres F., Mendelson E. (1993), *Calcul différentiel et intégral*, Série Schaum, McGraw-Hill, 484 pages.
- Beaury L., Bruneteau A.M., Régis R., Bouchriha H. (1989), *Mathématiques appliquées*, Editions Economica, 473 pages.
- Mashaal M. (1996), Les équations différentielles, *La Recherche*, 284:110-113.
- Spiegel M.R. (1974), *Formules et tables mathématiques*, Série Schaum, McGraw-Hill, 272 pages.
- Spiegel M.R. (1980), *Analyse de Fourier*, Série Schaum, McGraw-Hill, 199 pages.