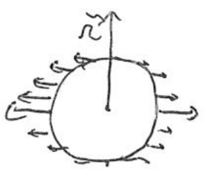
1) Rotation.

- $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix} = -\Omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$



- En coordonnées sphériques.

$$\vec{\Omega}_s = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Omega\cos\theta \\ -\Omega\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore on projette.

$$\vec{\Omega} = \cos\theta\,\Omega\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\Omega\,\vec{e_\theta}$$

vitesse. $\vec{V_s} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$

$$= \Omega \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Omega r \sin\theta\,\vec{e_\varphi}$$

Force centrifuge

$$\vec{F_s} = \vec{\Omega} \wedge \vec{V_s} = \Omega^2 r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= -\Omega^2 r \left(\sin^2\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\cos\theta\,\vec{e_\theta}\right)$$

Le dipôle

① On note $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

avec $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ dans l'équateur ($\vec{e_x}$ vers Greenwich) et $\vec{e_z}$ dirigé vers N le nord géographique.

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla} = u_1 \frac{\partial}{\partial x} + u_2 \frac{\partial}{\partial y} + u_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Rightarrow U = + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{r^3} \left[u_1 x + u_2 y + u_3 z \right]$$

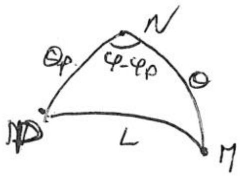
car $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3} \ldots$

$\vec{B} = \vec{\nabla} U = \frac{\partial}{\partial x} U \, \vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y} U \, \vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z} U \, \vec{e_z}$.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^5}$

$\rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{r^3} \begin{pmatrix} (1 - 3x/r^2) u_1 \\ (1 - 3y/r^2) u_2 \\ (1 - 3z/r^2) u_3 \end{pmatrix}$

$\vec{OM} = a \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$



Trigonométrie sphérique :

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

$\Rightarrow$ $\underline{\cos L = \cos\theta_P \cos\theta + \sin\theta_P \sin\theta \cos(\varphi - \varphi_P)}$.

a vu $U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{r^3} (u_1 x + u_2 y + u_3 z)$

remplace | u_1, u_2, u_3 par .. θ_P, φ_P
| $x\ y\ z$ par θ, φ

$\Rightarrow U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{r^2} \Big[\sin\theta_P \cos\varphi_P \sin\theta \cos\varphi$
$+ \sin\theta_P \sin\varphi_P \sin\theta \sin\varphi$
$+ \cos\theta \cos\theta_P \Big]$

$\Rightarrow U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{r^2} \Big[\sin\theta_P \sin\theta \cos(\varphi - \varphi_P)$
$+ \cos\theta \cos\theta_P \Big]$

$\Rightarrow \boxed{U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{r^2} \cos L}$

2) <u>Dans le repère géomagnétique</u>

On note $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ une base avec $\vec{e_3}$ dirigé vers le Nord magnétique et $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ dans l'équateur magnétique.

Dans ce repère, $\vec{u} = \vec{e_3}$

et $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_3}$ $\qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$\rightarrow (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x_3}{r^3}$ avec $x_3 = r \cos L$

$\Rightarrow \boxed{U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{r^2} \cos L}$

(3) (4)

On introduit les vecteurs sphériques liés au repère géomagnétique : $(\vec{e_r}, \vec{e_L}, \vec{e_\phi})$

avec Φ longitude magnétique (on n'en a pas besoin ici).

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} U \\ \frac{1}{r \partial L} U \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z_g \\ X_g \\ Y_g \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} Y_g = 0 \ ; \quad X_g = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{r^3} \sin L \\ \\ \qquad\qquad Z_g = +\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{r^3} 2 \cos L \end{array} \right.$$

au pôle magnétique $L = 0 \rightarrow X_g = Y_g = 0$
Z_g max ou min

pour $L = \pi/2$, $Z_g = Y_g = 0$ et X_g max.

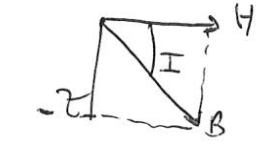

ligne de champ.

3) Dans le plan horizontal à M et vertical.....

$$\vec{B} = \vec{H} + Z \vec{e_r}$$
$$= H \cos D \, \vec{e_\theta} + H \sin D \, \vec{e_\varphi} - Z \vec{e_r}$$

Dans le repère géomagnétique $\vec{B} = \cancel{H}X_g \vec{e_L} - Z_g \vec{e_r}$
$= X_g (\cos D \vec{e_\theta} + \sin D \vec{e_\varphi}) - Z_g \vec{e_r}$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} X = X_g \cos D \\ Y = X_g \sin D \\ Z = Z_g \end{array} \right.$$



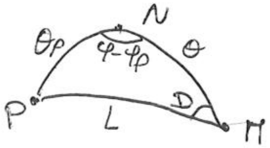
$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg} I = \frac{-Z}{H}$$

$$\rightarrow \quad \operatorname{tg} I = -\frac{Z_g}{X_g} = +2 \frac{\cos L}{\sin L}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg} I \cdot \operatorname{tg} L = 2}$$

connaissant l'inclinaison du champ, on peut calculer la paléolatitude du lieu magnétique.

On reprend le triangle sphérique :



→ $\cos L = \cos\theta_p \cos\theta + \sin\theta \sin\theta_p \cos(\varphi-\varphi_p)$.

→ <u>analogie des sinus</u> :

$$\frac{\sin L}{\sin(\varphi-\varphi_p)} = \frac{\sin\theta_p}{\sin D} \;\rightarrow\; \boxed{\sin D = \frac{\sin\theta_p \sin(\varphi-\varphi_p)}{\sin L}}$$

En résumé, les relations permettant de calculer les composantes D, I, H et Z en un point $M(\theta, \varphi)$ connaissant le moment du dipole M_1 et les coordonnées (θ_p, φ_p) du pôle géomagnétique Nord, sont :

$$\cos L = \cos\theta \cos\theta_p + \sin\theta \sin\theta_p \cos(\varphi-\varphi_p)$$

$$\sin D = \frac{\sin\theta_p \sin(\varphi-\varphi_p)}{\sin L}.$$

$$\operatorname{tg} I = 2 \operatorname{cotg} L$$

$$H = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M_1}{a^3} \sin L.$$

$$Z = 2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M_1}{a^2} \cos L$$