

L2 - Physique pour les Sciences de l'univers

TD N°2

Vendredi 9 février 2007

Exercice 1 : Champs et potentiels

Tout point $M(x, y, z)$ de l'espace est défini par sa position par rapport à un point fixe arbitraire O : $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. On note la distance au point O : $OM = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Chaque question est indépendante.

1) Soit un champ vectoriel $\vec{u}(\vec{r})$. Calculer le divergent de ce champ si $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{r}$, $\vec{u}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{u}(\vec{r}) = f(r) \vec{r}$. Ces champs dérivent-ils d'un potentiel ? Si oui, pouvez-vous calculer lequel ?

2) On considère le champ scalaire $f(M) = \frac{\ln r}{r}$. Déterminer le champ vectoriel $\vec{u}(M)$ dérivé de ce potentiel.

3) Soit un champ vectoriel qui à un point de l'espace $M(x, y, z)$ associe le vecteur $\vec{u} = (xz, y, \phi(z))$. Déterminer ϕ pour que $\text{div } \vec{u} = z$.

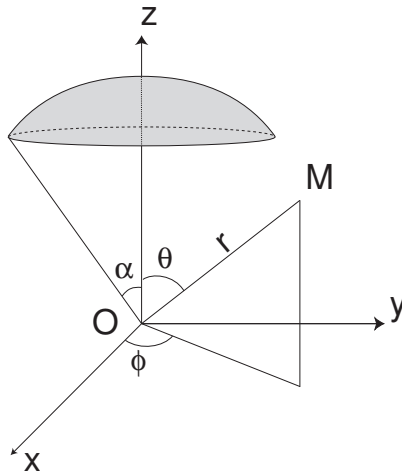
4) Soit un champ scalaire $f(M) = xy + yz + xz$. On se place au point $A = (1, 1, 1)$: dans quelle direction la variation du champ est-elle la plus rapide ? Et au point $B = (1, 2, 3)$?

Exercice 2 : Flux à travers une surface

1) Calculer la valeur du flux du champ vectoriel $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ à travers la surface d'un cylindre défini par $x^2 + y^2 = R^2$ et $0 \leq z \leq h$.

2) On connaît l'expression du potentiel $V(r, \theta, \phi) = \frac{k}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$, et on s'intéresse au champ dérivé \vec{E} . Calculer les composantes sphériques de ce champ. Est-ce que $\text{div } \vec{E} = 0$?

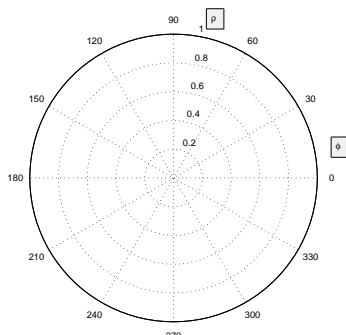
3) Calculer le flux de ce champ à travers une calotte sphérique centrée à l'origine O de rayon R et de demi-angle au centre α .



Exercice 3 : Champ dipolaire

On commence par se placer dans un repère local polaire (cylindrique en 2-D, sans axe vertical) (ρ, ϕ) et on considère le champ de vecteurs défini par $E_\rho = \frac{2k \cos \phi}{\rho^3}$ et $E_\phi = \frac{k \sin \phi}{\rho^3}$.

- 1) Déterminer l'équation des lignes de champ en coordonnées polaires, et faire un dessin.



- 2) Déterminer le potentiel $U(\rho, \phi)$ dont dérive ce champ.

- 3) Exprimer U en coordonnées cartésiennes, et en déduire les composantes cartésiennes de \vec{E} .

On se place maintenant en 3-D en coordonnées sphériques. Le champ \vec{E} a pour composantes :

$$E_\rho = \frac{2k \cos \theta}{\rho^3}, \quad E_\phi = 0, \quad E_\theta = \frac{k \sin \theta}{\rho^3}.$$

- 4) Calculer le flux de ce champ à travers la surface d'une sphère de rayon R centrée à l'origine.

5) Maintenant ce champ est en réalité celui d'un dipôle constitué d'une charge positive q et d'une charge négative $-q$ placées symétriquement par rapport à O et éloignées de $d \ll R$: retrouver simplement la même valeur de flux.