Licence STEP L2

Module Physique pour les géosciences S4

Mécanique des solides et des planètes

Corrigés des exercices du 11 février 2008

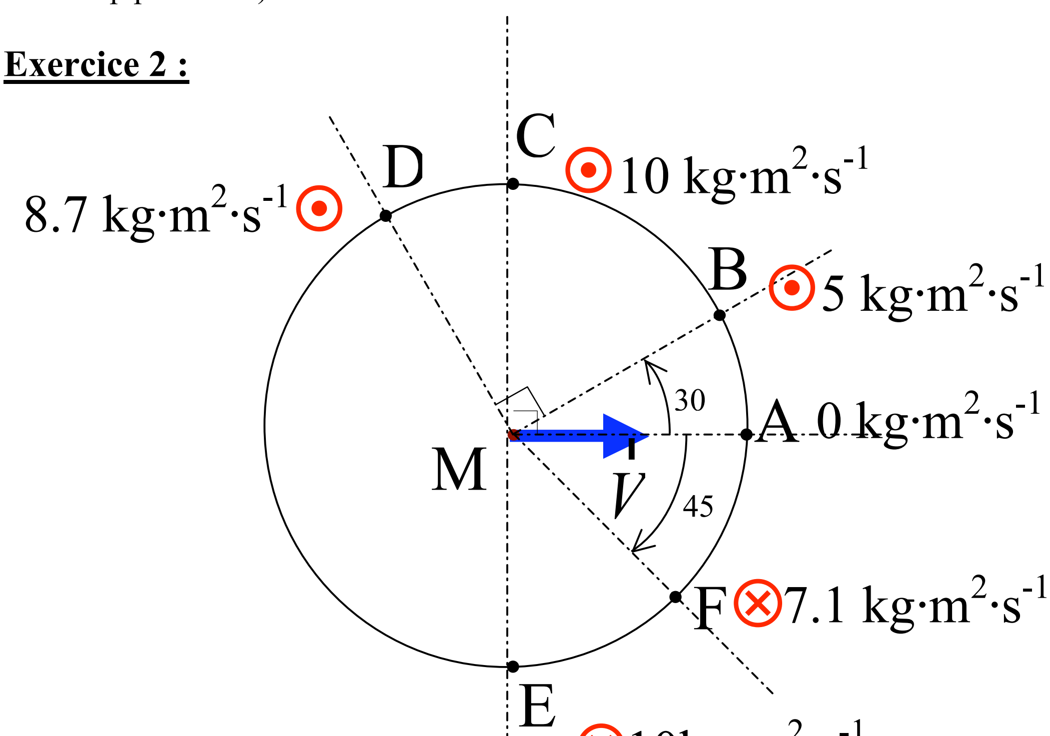
Exercice 1 :

Considérons un corps de masse m en MCU avec une période T sur une orbite de rayon R. La vitesse de rotation est alors $2\pi R/T$. Le moment cinétique autour du centre d'attraction est perpendiculaire au plan de l'orbite, et son module est $2\pi mR^2/T$. Pour les satellites Galiléens de Jupiter, on obtient les résultats donnés dans le tableau suivant :

Corps	Rayon de l'orbite (10^6 km)	Période (jours)	Masse (10^{23} kg)	Moment cinétique (10^{36} kg m^2 s^{-1})
Io	0.4216	1.77	0.893	0.654
Europe	0.6709	3.55	0.479	0.443
Ganymède	1.070	7.16	1.48	1.73
Callisto	1.883	16.69	1.08	1.67
Lune	0.384	29.53	0.734	0.026

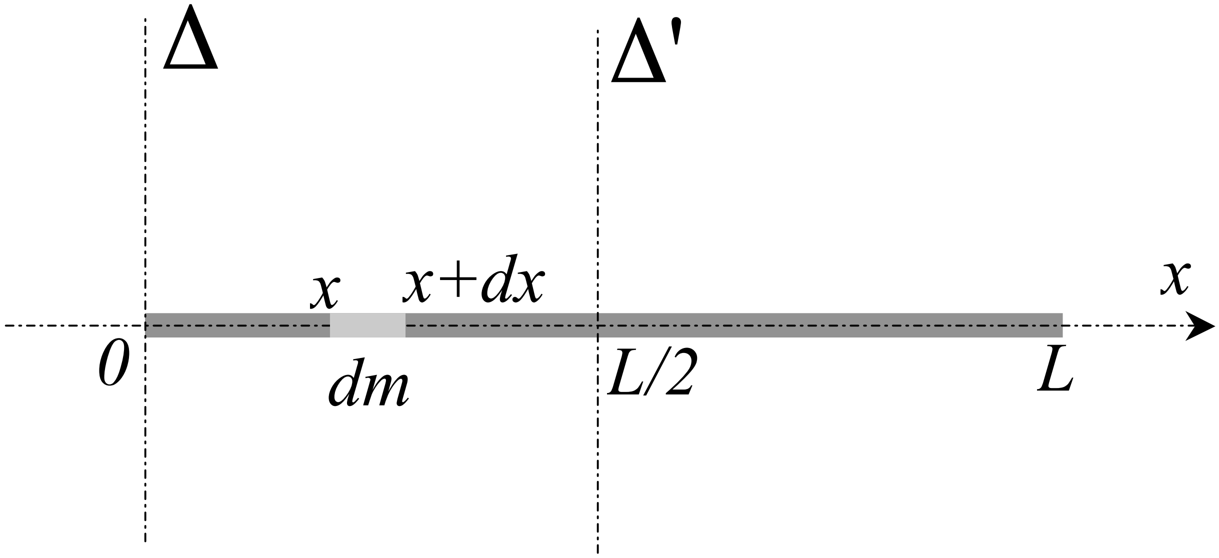
On constate que les valeurs des moments cinétiques de Io et Europe d'une part, et Ganymède et Callisto d'autre part, sont assez voisines. Celui de la Lune en revanche est un ordre de grandeur plus petit. C'est la période qui est plus longue (donc vitesse beaucoup plus lente).

Exercice 2 :



Exercice 3 :

Soit L la longueur de la barre fine et M sa masse. Plaçons-nous par rapport à un axe Δ perpendiculaire à la barre et passant par une extrémité. Soit x la coordonnée le long de la barre qu'on découpe en petites rondelles de longueur dx entre x et $x+dx$. La masse de chaque rondelle est $dm=mdx/L$.



Le moment d'inertie I par rapport à l'axe Δ est :

$$I = \int_0^L x^2 dm = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L}\frac{1}{3}L^3 = \frac{1}{3}ML^2 \ . \qquad (3.1)$$

Soit J le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ' parallèle à Δ passant par le centre de la barre. J s'écrit alors:

$$J = \int_0^{L/2} x^2 dm + \int_0^{L/2} (-x)^2 dm \qquad (3.2)$$

On peut aussi calculer J en remarquant que J est égal à deux fois le moment d'inertie par rapport à une extrémité (équation (3.1)) mais pour une barre de longueur L/2. On a donc :

$$J = 2\frac{1}{3}M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 \ . \qquad (3.3)$$

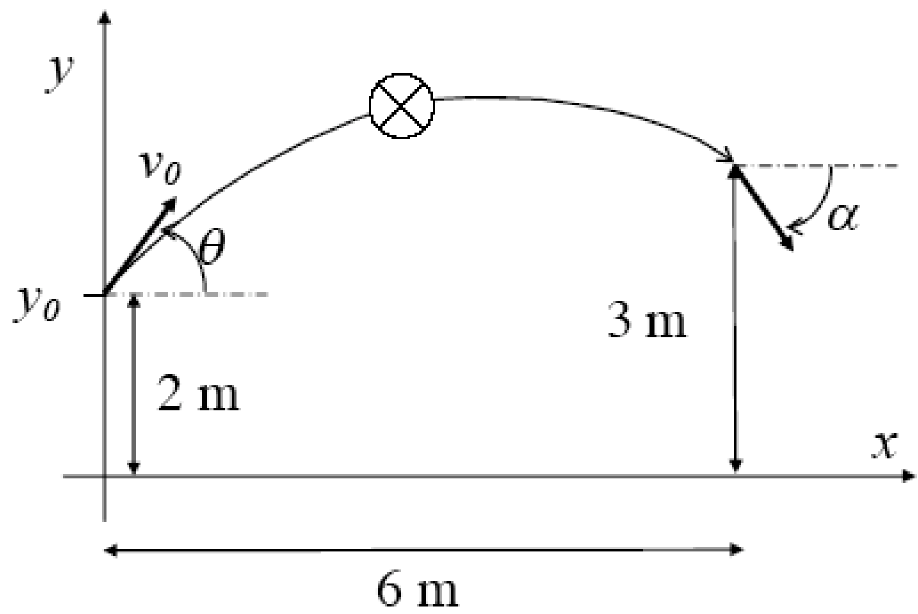
Calculons $J+Md^2$ où d est la distance entre nos deux axes :

$$J + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2 = I \ . \qquad (3.4)$$

On retrouve bien la règle de Steiner-Huygens.

Exercice 1C :

Premiere étape, interpréter les données de l'énoncé sous forme d'un dessin, et mettre en équation le problème.



On a la relation entre les 2 angles α et θ :

$$\tan\alpha + \tan\theta = 2\frac{y - y_0}{x} = 2\frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \qquad (1.1C)$$

d'où, puisque tanα=-1 est donné, on tire la valeur de l'angle de lancée :

$$\tan\theta = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \qquad (1.2C)$$

soit **θ=53°.**

On en déduit :

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{9}{25}, \qquad (1.3C)$$

qui fournit :

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \text{ et } \sin\theta = \frac{4}{5}. \qquad (1.4C)$$

La durée t du lancer du ballon vérifie :

$$3 = 2 + x\tan\theta - \frac{1}{2}gt^2, \qquad (1.5C)$$

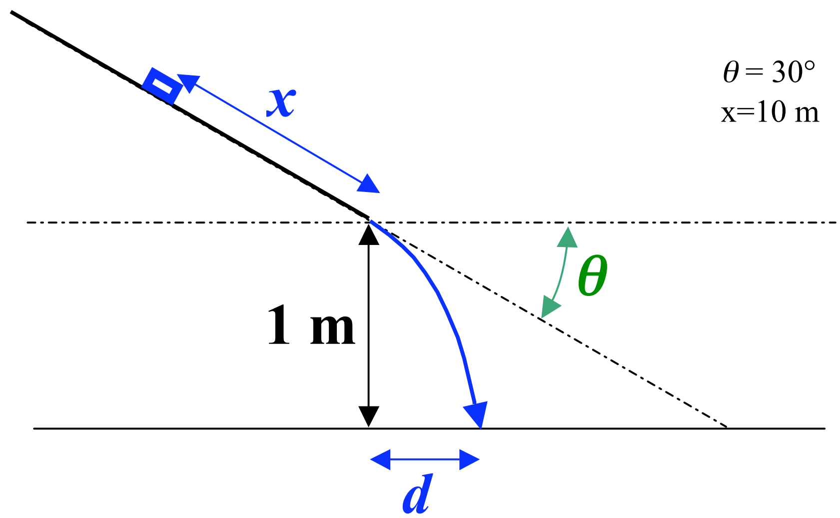
soit :

$$t = \sqrt{\frac{7}{5}} = \mathbf{1.2\ s} \qquad (1.6C)$$

et :

$$V_0 = \frac{x}{\cos\theta t} = 10\sqrt{\frac{5}{7}} = \mathbf{8.5\ \ m/s}. \qquad (1.7C)$$

Exercice 2C :



Soit V_0 la vitesse du mobile quand il arrive au bout du plan incliné. V_0 est liée à la distance parcourue sur le plan inclinée par :

$$V_0^2 = 2\sin\theta g x = gx \;. \qquad (2.1C)$$

Soit **V_0=10m/s**.

Le temps de parcours correspondant est de $\tau = V_0/(g \sin\theta)$ soit **τ =2s.**

La distance horizontale d entre le bout du plan incliné et le point d'impact avec le sol vérifie (voir chapitre 1) :

$$0 = 1 + \tan\theta\, d - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{V_0^2 \cos^2\theta}\,, \qquad (2.1C)$$

soit :

$$0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} d - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{V_0^2 3/4}\;. \qquad (2.2C)$$

On a donc :

$$0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} d - \frac{2}{3}\frac{d^2}{x}\;. \qquad (2.4C)$$

d est donc l'une des racines de l'équation du second degré (2.4C), celle qui donne la valeur positive **d=1.47m**

Remarque : Si on fait varier x expérimentalement, qu'on mesure d et qu'on représente la quantité $y = \frac{2}{3}\frac{d^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} d}$ en fonction de x, on attend que les points soient alignés sur une droite de pente 1. En présence de friction sur le plan incliné, l'accélération sur le plan incliné sera diminuée, et ainsi la vitesse V_0. La pente observée sera alors inférieure à 1. Cela signifie que pour un même d il faudrait un x plus grand pour parvenir à cette vitesse V_0 au bout du plan.

Exercice 3C :

Cf cours : cas d'un cylindre homogène de masse M, de rayon R et de longueur L. Son volume est $V = \pi R^2 L$ et sa masse volumique $\rho = M/V = M / \pi R^2 L$. Pour trouver le moment d'inertie par rapport à l'axe de symétrie de révolution Δ (axe le long de la hauteur du cylindre), découpons le cylindre en petits éléments de longueur L et s'appuyant sur un anneau entre r et $r+dr$ (Figure 2.9 du chap 2). Le petit élément de volume est alors $dV=2\pi r dr L$ et la masse dm de dV est :

$$dm = \rho 2\pi r dr L = 2\pi r dr L \frac{M}{\pi R^2 L} = 2\frac{M}{R^2} r dr \tag{3.1C}$$

Le moment d'inertie s'écrit donc :

$$I_\Delta = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{2M}{R^2} r dr = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr \tag{3.2C}$$

soit :

$$I_\Delta = \frac{1}{2} M R^2 \tag{3.3C}$$

On peut remarquer que ce résultat ne dépend pas de la hauteur L du cylindre.