MASTER STEP Institut de Physique du Globe de Paris

Géophysique de l'Environnement

TDGE2: Corrigé des exercices pour le 20 mars 2007

TDGE2E1:

Comme le hangar est abrité de la pluie, supposons que la saturation du sous-sol en eau est de 50 %. Le coefficient de diffusion effectif D_{eff} du sel dans ce milieu est alors $0.05\times2\times10^{-9}$ m^2·s^{-1}=10^{-10} m^2·s^{-1}. Si le sel a diffusé sur une longueur L, par argument dimensionnel, en l'absence d'information plus précise, l'ordre de grandeur de la durée τ est donné par:

$$\tau \approx \frac{L^2}{D_{eff}} = \frac{0.5^2}{10^{-10}}s = \frac{10^{10}}{4}s = \frac{10^{10}}{4\times3\times10^7} = \text{83 ans}. \tag{1}$$

TDGE2E2:

Soit Q le débit de pompage dans ce puits de rayon r_0, et h_0 la hauteur d'eau dans le puits à l'équilibre. On a:

$$Q = \pi K \frac{H_0{}^2 - h_0{}^2}{Log\frac{R}{r_0}}, \tag{2}$$

où H_0 est la hauteur de la nappe avant pompage, K la conductivité hydraulique et R le rayon d'influence du pompage. Prenons dans un premier temps R=60 m. On souhaite pomper le plus possible dans ce puits, donc on va supposer qu'on se place à la limite de Sichardt. Le débit est alors:

$$Q = 2\pi r_0 h_0 \frac{\sqrt{K}}{15}. \tag{3}$$

En égalisant les deux expressions du débit, on obtient une équation du deuxième degré pour h_0:

$$\sqrt{K}\frac{H_0{}^2 - h_0{}^2}{Log\frac{R}{r_0}} = h_0 \frac{2r_0}{15}, \quad \text{soit:} \tag{4}$$

$$h_0{}^2 + h_0 \frac{2r_0}{15\sqrt{K}} Log\frac{R}{r_0} - H_0{}^2 = 0 \tag{5}$$

dont la solution positive est:

$$h_0 = -\frac{r_0}{15\sqrt{K}} Log\frac{R}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{r_0}{15\sqrt{K}} Log\frac{R}{r_0}\right)^2 + H_0{}^2}. \tag{6}$$

On obtient h_0=2 m. Si on utilise maintenant cette valeur pour estimer le rayon d'influence R en utilisant la formule de Sichardt, on obtient:

$$R = 3000\times8\times\sqrt{10^{-5}} = 76 \quad \text{m}. \tag{7}$$

On obtient alors h_0=1.9 m en utilisant cette nouvelle valeur dans (6). On vérifie ainsi que le résultat dépend peu de l'hypothèse sur le rayon d'influence.

Le débit de pompage est alors:

$$Q = 2\pi r_0 h_0 \frac{\sqrt{K}}{15} = 2\pi\times0.2\times2\frac{\sqrt{10^{-5}}}{15} = 46 \text{ m}^3\text{/jour}. \tag{8}$$

Or le besoin d'eau du village est de $30\times10^{-3}\times2000=60$ m^3/jour. On constate que même à son taux de pompage maximum, ce puits ne peut pas suffire pour alimenter le village.

TDGE2E3:

On utilise la formule de la décharge de Dupuit-Forchheimer (équation 2.23 du chapitre 2):

$$Q=\frac{3\times10^{3}\times10^{-7}}{2\times50}\left(50^2-40^2\right)=\frac{3\times10^{-4}\times10\times90}{100}=2.7\ \text{L/s}. \tag{9}$$

TDGE2E4:

L'atténuation à la profondeur p=10 m est $e^{-p/\lambda}$=0.5, donc la longueur de diffusion est $\lambda=p/\text{Log}2=14.4$ m. Or la profondeur de pénétration pour une onde de pression de période T est donnée par $\lambda=\sqrt{\kappa_p T/\pi}$ où κ_p est la diffusivité pneumatique. On a donc $\kappa_p=\lambda^2\pi/T=1.5\times10^{-2}$ m$^2\cdot$s^{-1}. Mais la diffusivité pneumatique κ_p est $k_g p_0/\phi_a\eta_a$ (équation 2.68 du chapitre 2) où k_g est la perméabilité à l'air, p_0 la pression moyenne (10^5 Pa), ϕ_a la porosité à l'air (0.05) et η_a la viscosité de l'air 1.8 10^{-5} Pa·s. On a donc :

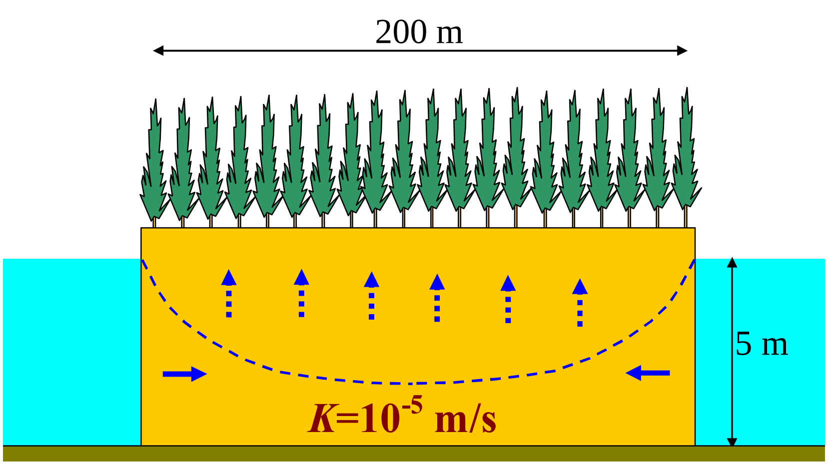
$$k_g=\frac{1.5\times10^{-2}\times0.05\times1.8\times10^{-5}}{10^5}=135\quad\text{mD}. \tag{10}$$

La perméabilité relative dans la phase gaz $k_{r,g}$ pour une saturation de 50 % peut être estimée en utilisant la relation 2.62 du chapitre 2. La saturation effective est $S_{eff}=\left(S_w-S_0\right)/\left(1-S_0\right)=0.44$ et on a :

$$k_{rg}(S_w=0.5)=\frac{\left(1-S_{eff}\right)^2}{1-S_{eff}{}^2}=0.38\cong0.4\,. \tag{11}$$

La perméabilité totale de notre milieu est donc 135/0.4 mD= 340 mD.

TDGE2E5:



Si on a un peuplier par 100 m^2, alors le taux d'évaporation est:

$$e=\frac{100\times10^{-3}}{10^5\times100}=10^{-8}\quad\text{m/s}. \tag{12}$$

L'équation d'equilibre de l'aquifère libre est :

$$h^2 = -\frac{a}{K}x^2 + Ax + B \,, \tag{13}$$

où A et B sont des constantes et a=-e. Les constantes sont imposées par le fait que le niveau est donné égal à h_0=5 m pour x=-$L/2$ et x=$L/2$, soit:

$$\begin{cases} h_0{}^2 = -\dfrac{a}{K}\dfrac{L^2}{4} - A\dfrac{L}{2} + B \\ h_0{}^2 = -\dfrac{a}{K}\dfrac{L^2}{4} + A\dfrac{L}{2} + B \end{cases} . \tag{14}$$

On obtient:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = h_0{}^2 + \dfrac{a}{K}\dfrac{L^2}{4} \end{cases} . \tag{15}$$

La forme de l'aquifère est donc:

$$h(x) = \sqrt{h_0{}^2 - \frac{eL^2}{4K} + \frac{e}{K}x^2} \,. \tag{16}$$

C'est un arc d'hyperbole dont le minimum est:

$$h_{\min} = \sqrt{h_0{}^2 - \frac{eL^2}{4K}} = \sqrt{25 - \frac{10^{-8} \times 4 \times 10^4}{10^{-5} \times 4}} = \sqrt{25-10} = 3.9 \text{ m} \,. \tag{17}$$

TDGE2E6:

Le pic d'anomalie gravimétrique d'une cavité cylindrique de rayon R à une profondeur z est donné par :

$$\Delta g = 2\pi G \frac{\Delta\rho R^2}{z} \,, \tag{18}$$

où $\Delta\rho$ est le déficit de masse volumique dans la cavité, et G la constante universelle de la gravitation. Prenons $\Delta\rho$=-2500 kg·m^{-3}. On a alors:

$$\Delta g = 2\pi \times 6.67 \times 10^{-3} \frac{2500 \times 4}{10} = 42\ \mu\text{Gal}. \tag{19}$$

De plus la largeur à mi-hauteur de l'anomalie est égale à deux fois la profondeur, soit 20 mètres. Cette anomalie doit donc être détectable sans trop de difficultés par un profil gravimétrique. Il est par contre vraisemblable que, si cette cavité contient des chars ou d'autres indélicatesses métalliques, alors le tunnel doit être encore plus facilement détectable par magnétométrie.

TDGE2E7:

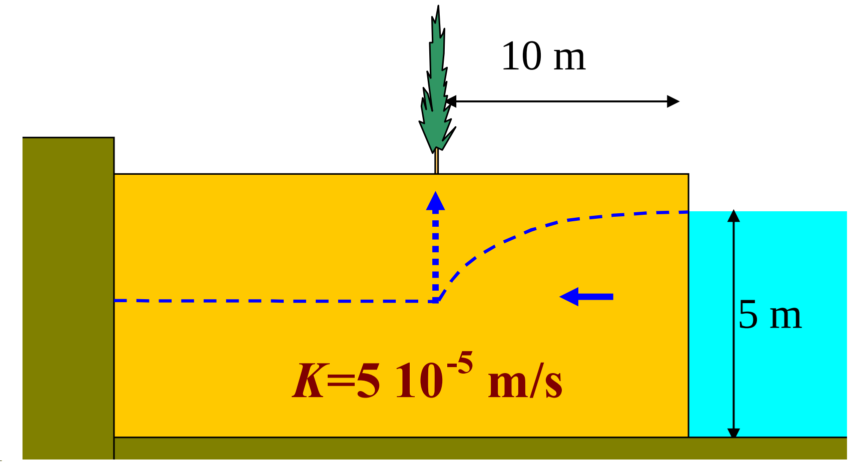
Soit q le débit spécifique circulant dans la nappe libre, compté positivement. Il est égal au débit emporté par l'allée des peupliers, soit:

$$q = \frac{100 \times 10^{-3}}{2} = 5 \times 10^{-5} \ \text{m}^3/\text{s}. \tag{20}$$

Le débit spécifique est par ailleurs donné par l'approximation de Dupuit:

$$q = Kh\frac{dh}{dx} \,, \tag{21}$$

où K est la conductivité hydraulique et $h(x)$ la forme de la hauteur piézométrique en fonction de la coordonnée x perpendiculaire à la rivière.



On obtient donc une équation différentielle pour *h(x)* :

$$\frac{q}{K}dx = \frac{1}{2}dh^2 \ , \qquad (22)$$

qui s'intègre facilement entre $x=0$ (allée de peuplier) et $x=L$ (rivière):

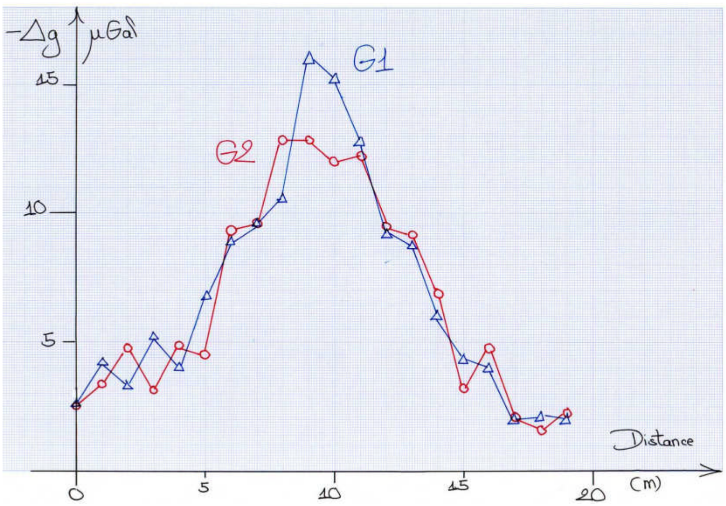
$$\frac{q}{K}L = \frac{1}{2}\left(H_0^{\ 2} - h_0^{\ 2}\right), \qquad (23)$$

où H_0 est le niveau d'eau dans la rivière et h_0 le niveau d'eau sous les peupliers. On remarque que le niveau d'eau demeure constant égal à h_0 au-delà des peupliers, puisqu'il n'y a pas d'autre source d'alimentation ou de perte d'eau. On a donc:

$$h_0 = \sqrt{H_0^{\ 2} - \frac{2qL}{K}} = \sqrt{25 - \frac{2\times5\times10^{-5}\times10}{5\times10^{-5}}} = \sqrt{5} = 2.2 \text{ m}. \qquad (24)$$

On a donc un rabattement de 7.8 m, ce qui fait beaucoup… On peut vraiment se demander si les peupliers pourront récupérer assez d'eau… Il est vraisemblable que le modèle ci-dessus, qui suppose que les peupliers vont puiser l'eau directement sous leur tronc, est trop sommaire. Les racines iront probablement chercher l'eau horizontalement, éventuellement en puisant directement dans l'eau au bord des berges…

<u>TDGE2E8:</u>



On a représenté les données sur le graphe ci-dessus. On constate que les anomalies sont semblables sur les deux profils. On peut donc considérer qu'il s'agit d'une cavité cylindrique.

La largeur à mi-hauteur est 8 m sur G1 et 8.8 m sur G2, soit 8.4 m en moyenne. On peut donc estimer que la cavité se trouve à une profondeur z de 4.2 m. On peut maintenant estimer son rayon R à partir de la valeur maximale Δg de l'anomalie, soit 14.5 µGal en moyennant les deux profils. On a en effet:

$$\Delta g = 2\pi G \Delta\rho \frac{R^2}{z}, \tag{23}$$

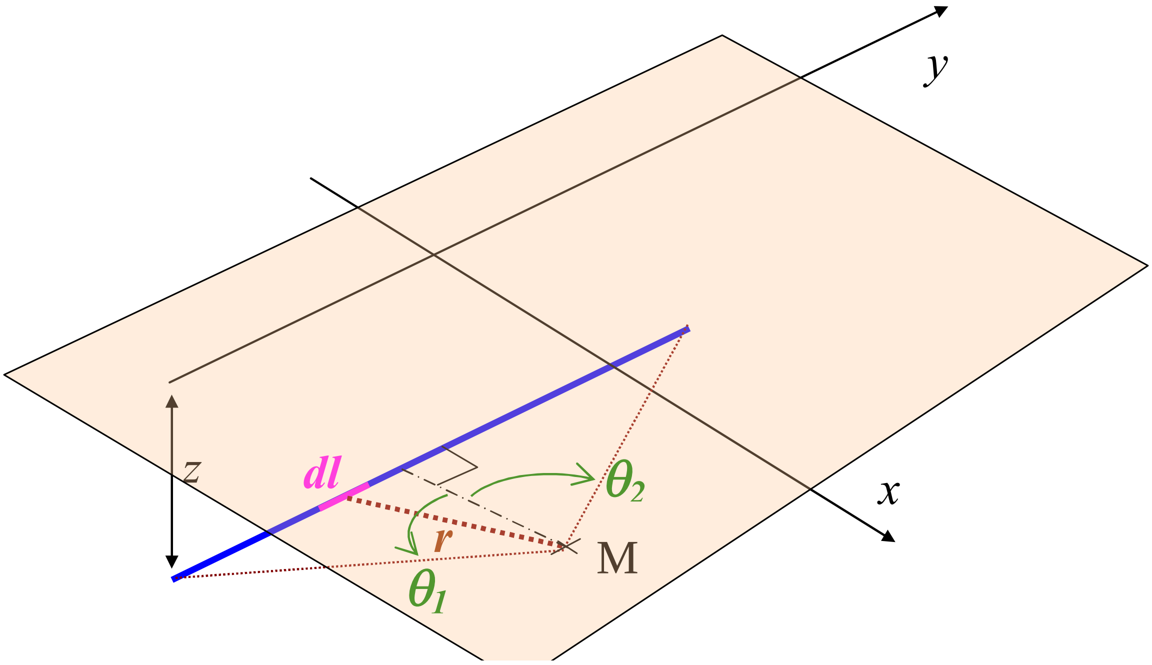
où G est la constante universelle de la gravitation et $\Delta\rho$ le déficit de masse volumique associé à la cavité. Prenons $\Delta\rho$=2500 kg·m^{-3}. On obtient alors:

$$R = \sqrt{\frac{\Delta g z}{2\pi G \Delta\rho}} = \sqrt{\frac{14.5 \times 4.2}{2 \times \pi \times 6.67 \times 10^{-3} \times 2000}} \cong 0.9 \text{ m}. \tag{24}$$

Remarque: En réalité, il s'agissait de données synthétiques avec une cavité cylindrique de rayon 1 m à une profondeur de 6 m et un bruit instrumental de 1 µGal RMS. On voit que notre résultat est plutôt bon pour le rayon mais sous-estime la profondeur.

TDGE2E9:

Soit un point M de la surface, de coordonnées x et y. L'axe x est perpendiculaire à la ligne souterraine, et y est parallèle. La ligne souterraine correspond à x=0 et y variant de $-L/2$ à $+L/2$ si L est sa longueur. Soit $\Delta\lambda$ le déficit linéique de masse volumique associé à cette ligne.



Considérons un petit élément dl de cette ligne, situé entre l et $l+dl$. Sa contribution à l'anomalie gravimétrique Δg est :

$$G \Delta\lambda dl \frac{z}{r^3}, \tag{25}$$

où r est la distance entre ce petit élément et le point considéré. On a:

$$r^2 = x^2 + z^2 + (y - l)^2, \tag{26}$$

d'où l'expression de l'anomalie gravimétrique :

$$\Delta g = G\Delta\lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dl \frac{z}{\left(x^2+z^2+(y-l)^2\right)^{\frac{3}{2}}} . \tag{27}$$

Pour intégrer cette équation, on pose:

$$l - y = \sqrt{x^2+z^2}\tan\theta . \tag{28}$$

On a alors:

$$\Delta g = \frac{G\Delta\lambda z}{x^2+z^2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta = \frac{G\Delta\lambda z}{x^2+z^2}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right), \tag{29}$$

où les angles θ_1 et θ_2 sont donnés par:

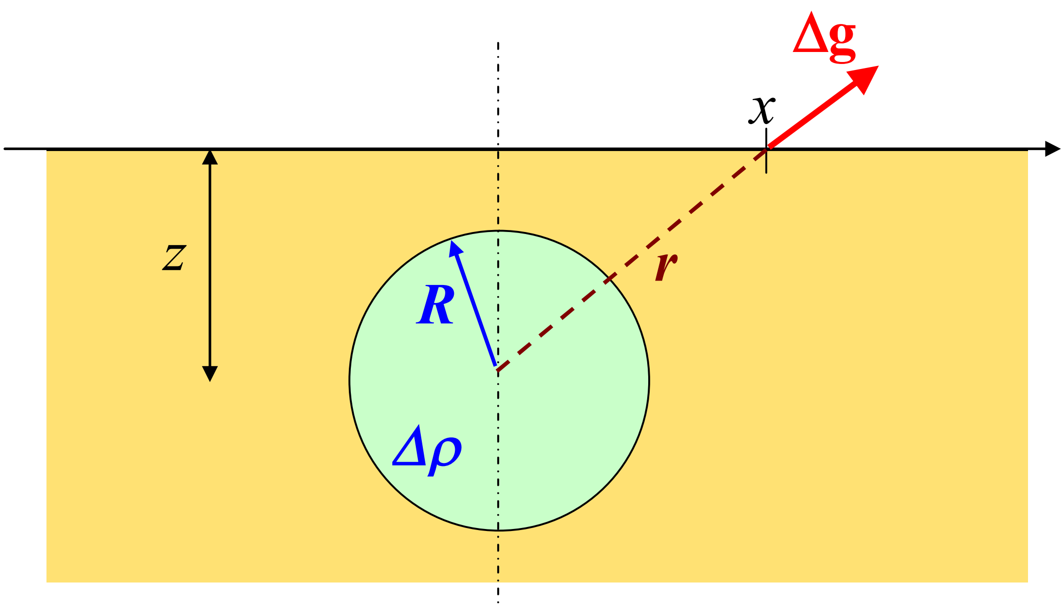
$$\theta_1 = -\tan^{-1}\left(\frac{y+\frac{L}{2}}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) \text{ et } \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{L}{2}-y}{\sqrt{x^2+z^2}}\right). \tag{30}$$

qui sont les angles sous lesquels on voit les extrémités de la ligne depuis le point M.

Pour une ligne infinie, on a $\theta_1=-\pi/2$ et $\theta_2=\pi/2$ et par conséquent:

$$\Delta g = 2G\Delta\lambda \frac{z}{x^2+z^2} . \tag{31}$$

Considérons maintenant un cylindre horizontal infini de rayon R, de déficit de densité $\Delta\rho$ et dont l'axe est à profondeur z. Soit un point de la surface, à une distance horizontale x du cylindre. Soit r sa distance à l'axe du cylindre.



Cherchons le champ de pesanteur dû au déficit de masse dans le cylindre. C'est un champ qui, par symétrie, est radial et perpendiculaire à l'axe du cylindre, et porté par la perpendiculaire à cet axe passant par le point considéré. Le flux de ce champ à travers une surface cylindrique de rayon r est égal à la masse par unité de longueur contenue dans ce cylindre. Ce champ est donc le même que celui d'une ligne infiniment fine coïncidant avec l'axe du cylindre et de densité linéique $\Delta\lambda=\Delta\rho\pi R^2$. L'anomalie gravimétrique Δg_c due au cylindre est donc la même que l'anomalie due à une ligne infinie. On a donc:

$$\Delta g_c = 2\pi G \Delta\rho R^2 \frac{z}{x^2+z^2} = 2\pi G \Delta\rho \frac{R^2}{z} \frac{1}{1+\frac{x^2}{z^2}} . \quad (32)$$

On retrouve bien la formule du cours.

TDGE2E10:

Si l'équilibre est hydrostatique, alors le poids de la colonne d'eau douce doit être égal au poids de la colonne d'eau de mer, soit:

$$\rho_d(h+z) = \rho_s z , \quad (33)$$

où ρ_d est la masse volumique de l'eau douce et ρ_s celle de l'eau de mer. On a donc:

$$z = \frac{\rho_d}{\rho_s - \rho_d} h = \frac{1000}{25} h = 40h . \quad (34)$$

L'angle α du biseau est donné par:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{h}{L}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{z}{L}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{200}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{80}{200}\right) = 0.6° + 21.8° = 22.4° . \quad (35)$$

TDGE2E11:

Soit Q_I le débit total d'infiltration dans la carrière de Vincennes en g/s. On suppose que le taux l'infiltration est 1% de la pluviométrie moyenne, soit 6 mm par an. On a donc:

$$Q_I = \frac{6\times10^{-3}}{3\times10^7} \times 3\times10^4 \times 10^6 = 6 \text{ g/s}. \quad (36)$$

Si le taux de ventilation est d'environ 4×10^{-6} s^{-1}, alors le débit volumique Q_V d'air est $Q_V=(4\times10^{-6}$ s$^{-1})\times(6\times10^4$ m$^3)=0.24$ m^3/s. On suppose que l'air entre sec et qu'il sort saturé en vapeur eau, eau qui est prélevée par évaporation dans la carrière. La fraction molaire de vapeur d'eau dans l'air saturé est égal au rapport de la pression de vapeur saturante à la pression atmosphérique, soit $1400/10^5=1.4\times10^{-2}$ à 12 °C. Une mole d'air saturé contient donc $18\text{g}\times1.4\times10^{-2}=0.25$ g de vapeur d'eau. Mais le volume d'une mole d'air est $RT/p=8.31\times285/10^5=0.024$ m^3 à 12 °C. L'air saturé contient donc $0.25/0.024\cong10$ g d'eau par m^3. La perte d'eau Q_E de la carrière par ventilation est donc:

$$Q_E = 0.24\times10 = 2.4 \text{ g/s}. \quad (37)$$

On constate que le taux d'évaporation dans la carrière de Vincennes en hiver, en régime ventilé, n'est pas négligeable par rapport à l'infiltration possible. Il n'est donc pas étonnant qu'en de nombreux endroits le toit de la carrière apparaisse sec en hiver.

TDGE2E12:

Soit V_P la vitesse sismique de l'onde P et ρ_r la résistivité électrique de la roche. Un lien entre la vitesse sismique et la résistivité électrique doit exister via la porosité totale ϕ. En effet, dans un milieu saturé en eau, on peut écrire la relation de Wyllie:

$$\frac{1}{V_P} = \frac{1-\phi}{V_m} + \frac{\phi}{V_w} , \quad (38)$$

où V_m est la vitesse de l'onde P dans la matrice minérale et V_w la vitesse du son dans l'eau (1500 m/s). Par ailleurs, supposons que la résistivité électrique est liée à la conductivité de surface σ_s et à la conductivité électrique de l'eau des pores σ_w par la relation suivante:

$$\frac{1}{\rho_r} = \sigma_s + \frac{\sigma_w}{F_0}, \quad (39)$$

où F_0 est le facteur de formation que nous prendrons donné par une loi d'Archie $F_0=1/\phi^2$. On a donc:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{V_P} - \frac{1}{V_m}\right)^2 = \phi^2 \left(\frac{1}{V_w} - \frac{1}{V_m}\right)^2 \\ \frac{1}{\rho_r} = \sigma_s + \sigma_w \phi^2 \end{cases} \quad (40)$$

et on peut donc proposer la relation suivante entre ρ_r et V_P:

$$\frac{1}{\rho_r} = \sigma_s + \sigma_w \frac{\left(\frac{1}{V_P} - \frac{1}{V_m}\right)^2}{\left(\frac{1}{V_w} - \frac{1}{V_m}\right)^2}. \quad (41)$$

On peut donc suggérer de tracer $1/\rho_r$ en fonction de $1/V_P$ et ajuster un polynome de degré 2.

TDGE2E13:

La résistivité ρ_1 de la roche saturée en eau est donnée par:

$$\rho_1 = \rho_w F_0 = \frac{\rho_w}{\phi^2} = \frac{40}{0.2^2} = 1000\ \Omega\text{m}. \quad (42)$$

tandis que la résistivité ρ_2 de cette même roche à saturation S_w=0.5 est donnée par:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{S_w^{\ 2}} = \frac{1000}{0.5^2} = 4000\ \Omega\text{m}. \quad (43)$$

En présence d'une conductivité de surface σ_s, la résistivité de la roche saturée devient:

$$\rho_3 = \frac{1}{\sigma_s + \frac{1}{\rho_1}} = \frac{1}{10^{-3} + \frac{1}{1000}} = 500\ \Omega\text{m}. \quad (44)$$

tandis que la résistivité de la roche à 50 % de saturation devient:

$$\rho_3 = \frac{1}{\sigma_s + \frac{1}{\rho_2}} = \frac{1}{10^{-3} + \frac{1}{4000}} = \frac{4}{5}1000 = 800\ \Omega\text{m}. \quad (45)$$

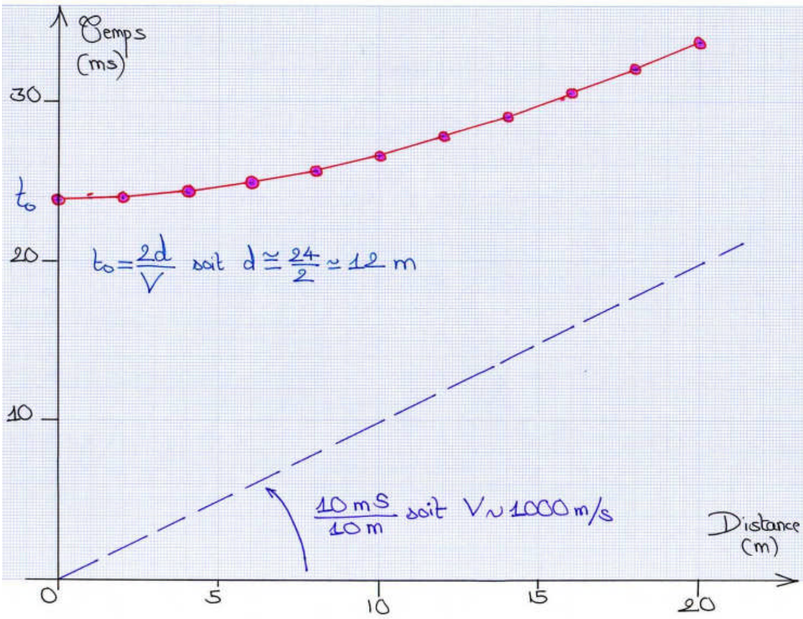
On constate qu'il ne sera pas aisé, par des mesures électriques, de distinguer entre la roche saturée en eau et la roche de la zone non-saturée.

TDGE2E14:

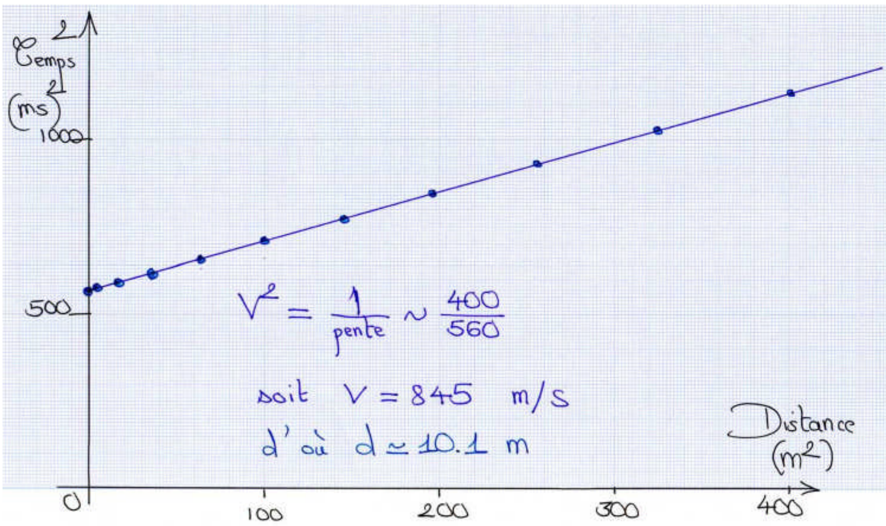
Contentons nous d'abord de représenter le temps t en fonction de la distance x (voir page suivante). On a:

$$t = \frac{2}{V}\sqrt{d^2 + \frac{x^2}{4}}, \quad (46)$$

où d est la profondeur de l'interface réfléchissant et V la vitesse dans le milieu. Il n'est pas très facile de déterminer sur le graphe de t en fonction de x la pente de l'asymptote de l'hyperbole. Une estimation donne alors 10 ms par 10 m, soit, selon (46), une vitesse de 1000 m/s. La profondeur *d* s'obtient alors par l'ordonnée à l'origine et on obtient *d=2t(x=0)/V* soit environ 12 m.



Si, par contre, on représente t^2 en fonction de la distance x^2 (graphe ci-dessous) alors on obtient une belle droite dont il est aisé de déterminer la pente de manière fiable. On obtient *V*=845 m/s et alors *d*=10.1 m.



Remarque: il s'agissait de données synthétiques avec *V*=840 m/s et *d*=10 m.