

Introduction à Planétologie Comparée

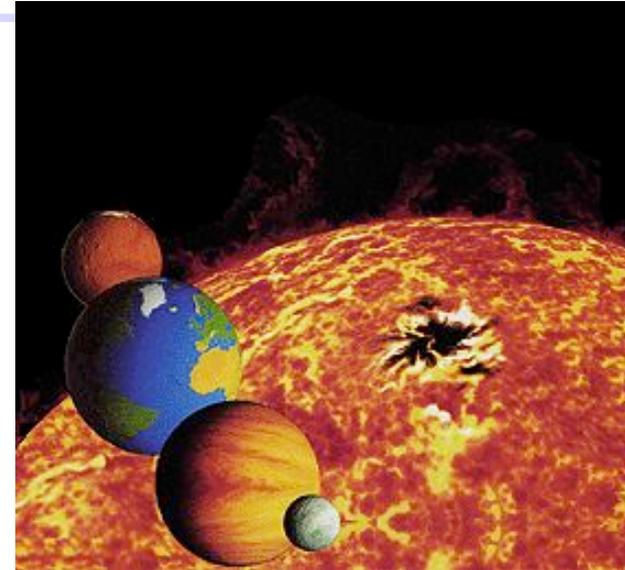
Philippe Lognonné
Lognonne@ipgp.jussieu.fr

Equipe Planétologie et Etudes Spatiales
Institut de Physique du Globe de Paris

Trajectoire des planètes

Planètes telluriques

- Mercure, Venus, Terre, Mars
 - Toutes à moins de 2 UA du soleil
 - Terre et Venus $\sim 90\%$ de la masse



	Planètes telluriques				Planètes géantes				
	Mercure	Venus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
Période de rotation [d ^a]	58.65	243.0 ^b	0.9973	1.026	0.4135	0.4440	0.7183 ^b	0.6713	6.387 ^b
Inclinaison sur orbite[°]	0.5	177.4	23.45	25.19	3.12	26.73	97.86	29.56	122.5
Distance Orbitale [UA ^c]	0.3871	0.7233	1.000	1.524	5.203	9.572	19.19	30.07	39.54
Période orbitale [a ^d]	0.2410	0.6156	1.001	1.882	11.87	29.39	84.16	165.0	248.8
Masse [10 ²⁴ kg]	0.3302	4.869	5.974	0.6419	1899.	568.46	86.63	102.4	0.0131

Trajectoire des planètes

Il est donc nécessaire au premier abord de simplifier notre problème. La première façon de faire est de négliger, pour une planète donnée, l'action de toutes les autres planètes et de ne supposer que celle du soleil. Si l'on a plutôt un système Terre-Lune, Pluton-Charon, on fait la même chose, mais en considérant la trajectoire du centre de masse du système planète+satellites. Cette approximation est l'approximation Keplerienne.

On considère donc le soleil, de masse M et notre planète de masse m , toutes les deux ponctuelles. La force de gravitation peut alors s'écrire

$$\mathbf{f} = -G \frac{M m \mathbf{u}}{r^2} \quad (1)$$

où G est la constante d'attraction universelle: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m Kg}^{-2}$, M et m les masses des deux corps, r leur distance et \mathbf{u} le vecteur unitaire les reliant. Si on applique la relation de la dynamique à la masse m , symbolisée par le point P , on a alors l'équation suivante:

$$m \frac{d^2 \mathbf{OP}}{dt^2} = -GM m \frac{\mathbf{MP}}{|PM|^3} \quad (2)$$

On peut résoudre cette équation en remarquant que

$$\mathbf{r} = \frac{M}{M+m} \mathbf{OP} \quad (3)$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{MP}$. Cette équation conduit, en remarquant que le point O , centre de gravité du système, est immobile ou animé d'une vitesse constante, à l'équation

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -GM m \frac{\mathbf{r}}{|r|^3} \quad (4)$$

où $\mu = \frac{mM}{M+m}$ est la masse réduite du système à deux corps. Pratiquement, cette masse est dans le cas des trajectoires de planètes autour du soleil, presque égale

à la masse du soleil et le barycentre O est presque confondu avec le centre du soleil. Pour le couple Terre-Lune par contre, la masse de la Terre n'est que 80 fois plus grande que celle de la Lune, de sorte que compte tenu de la distance entre la Terre et la Lune, le barycentre du système Terre-Lune se trouve en un point proche de la surface de la Terre. Dans l'équation (3), tout se passe alors comme si la masse M est immobile mais qu'elle agissait avec la masse $m + M$. Quelle est l'évolution du moment cinétique de la planète P ? On peut simplement écrire ce moment cinétique:

$$\mathcal{L} = \mathbf{OP} \times m \partial_t \mathbf{u} \quad (5)$$

et l'on s'aperçoit simplement à partir de l'équation (3) que ce moment cinétique est constant, la force étant appliquée parallèlement au rayon \mathbf{OP} . On dit que la force est centrale.

On peut continuer à faire une analyse en temps de l'équation différentielle. En fait, il est plus intéressant d'étudier la trajectoire, et pour cela de passer en coordonnées polaires. Dans ces coordonnées, nous avons:

$$\mathbf{OP} = r \mathbf{e}_r, \quad (6)$$

$$\partial_t \mathbf{OP} = \dot{r} \mathbf{e}_r - r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (7)$$

Ces deux premières relations permettent d'expliciter le moment cinétique de la planète:

$$\mathbf{L} = \mathbf{OP} \times m \partial_t \mathbf{OP} \quad (8)$$

$$= -r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z = -m C \mathbf{e}_z \quad (9)$$

Dans cette relation, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ forment un trièdre direct et $C = r^2 \dot{\theta}$, comme le moment cinétique est indépendant du temps, est constant. Cette constante s'appelle la constante des aires. En effet, à cause des propriétés du produit vectoriel, $\frac{C}{2}$ correspond à deux fois l'aire balayée par la planète durant l'unité de temps, et correspond donc à la vitesse areolaire. Il est possible alors d'utiliser C pour exprimer vitesse et accélération en fonction des dérivées non pas par rapport au temps, mais par rapport à la variable θ . On obtient alors:

$$\mathbf{OP} = r \mathbf{u}, \quad (10)$$

$$\partial_t \mathbf{OP} = C [\mathbf{u} \mathbf{e}_\theta - \partial_\theta \mathbf{u} \mathbf{e}_r] \quad (11)$$

$$\partial_t^2 \mathbf{OP} = -C^2 u^2 [\mathbf{u} + \partial_\theta^2 \mathbf{u}] \mathbf{e}_r \quad (12)$$

où $u = 1/r$. Ces relations forment les deux relations de Binet. On peut maintenant exprimer l'équation différentielle de la trajectoire de la planète, qui est finalement donnée par

$$\mu C^2 u^2 [\mathbf{u} + \partial_\theta^2 \mathbf{u}] = G M M u^2 \quad (13)$$

d'o l'équation finale de la trajectoire

$$\partial_{\theta}^2 u + u = \frac{G(M+m)}{C^2} \quad (14)$$

L'intégration de cette équation donne

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)] \quad (15)$$

C'est l'équation d'une conique de foyer M, d'excentricité e , de paramètre $p = \frac{C^2}{G(M+m)}$. θ_0 est l'argument du périastre de la trajectoire. Lorsque l'excentricité e est inférieure à 1, il s'agit d'une ellipse et si $e = 0$, il s'agit d'un cercle. Dans le cas où $e = 1$, nous avons une parabole et pour $e > 1$ une hyperbole. On peut réécrire la relation sous la forme

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (16)$$

Cette trajectoire est donc définie avec les paramètres suivant: • le demi-grand axe a ;

- l'excentricité e .

Remarque: l'excentricité est reliée au demi petit axe par la relation $e = c/a$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Il faut aussi définir le plan sur lequel se déroule la trajectoire. Ceci est fait avec les paramètres:

- l'argument θ_0 du périhélie ou périastre;

et le plan sur lequel cette trajectoire est inscrite par les paramètres:

- l'inclinaison i du plan de l'orbite par rapport à un plan de référence (plan de l'écliptique pour les planètes, par définition le plan de l'orbite terrestre ou le plan équatorial de la planète pour les satellites) • la longitude Ω du noeud ascendant (qui est l'intersection entre la trajectoire de la planète et le plan de référence, balayé du sud vers le nord).

Pour une trajectoire elliptique, le point le plus proche du foyer est le périhélie de l'orbite, le point le plus lointain est l'apogée, tandis que la distance entre le centre de l'ellipse et son foyer est ae . La quasi totalité des planètes du système solaire ont une excentricité proche de 0 et donc une trajectoire quasi circulaire. Il y a quelques exceptions, en particulier Mercure et Pluton, qui ont une excentricité de 0.206 et 0.246. Dans le cas de Pluton, ceci signifie la dis entre le soleil et Pluton varie entre 29.70 UA et 48.96 UA. Le demi grand axe de Neptune étant de 30.109, et son excentricité presque nulle ($e=0.009$) ceci signifie que Neptune est parfois la planète la plus éloignée du Soleil. Certaines comètes ainsi que les astéroïdes ont des trajectoires elliptiques. Parmi les objets ayant une trajectoire très elliptique, on rencontre les astéroïdes Apollo-Amor. Ces astéroïdes ont des aphélies presque tous situés entre les orbites de Mars et de Jupiter, et pour beaucoup ont un périhélie inférieur à une UA Leur trajectoire coupe donc celle de la Terre, et mme celles de Venus et de Mercure. L'astéroïde

1566 Icare approche par exemple le soleil à 0.19 UA et s'en éloigne à 1.19, tandis que 1978 SB s'en approche à 0.35 UA pour s'en éloigner à 4.11 UA, ce qui correspond à des trajectoires d'excentricité de 0.85. Ce sont ces objets qui ont donné naissance aux cratères de plus de cinq kilomètres qui existent sur la Terre, sur la Lune, Mercure et peut tre Mars, et qui sont utilisés comme chronomètres chronologiques pour déterminer les ages des surfaces de ces planètes. On estime par exemple que près de 400 tonnes de fragments d'objets Amor-Apollo, pesant entre 100g et une tonne doivent rentrer chaque année dans l'atmosphère de la Terre. De plus, pour un objet Apollo donné, la probabilité de collision est de l'ordre de 5×10^{-9} par an, ce qui donne environ une collision toute les 200 millions d'année. Si on suppose qu'il y a environ entre 750 et 1000 objets Apollo, la probabilité de collision serait donc environ de une collision tous les millions d'années. La quasi-totalité des fragments de météorites sont ainsi des restes d'objets Apollo-Amor

Pour une trajectoire parabolique, caractérise également la trajectoire avec:

- la distance périhélique $q = a(1-e)$
- la distance aphélie $Q = a(1+e)$. Les comètes non-périodiques sont des objets avec une trajectoire quasi-parabolique, qui semblent venir d'un réservoir appelé "nuage d'Oort" a quelques dizaines de millier d'UA.

2.3 les lois de Kepler

La demarche que nous venons d'effectuer est l'inverse du cheminement historique des idées. En effet, à partir des observations de Ticho-Brahé, Kepler fit une synthèse des observations sous la forme de trois lois:

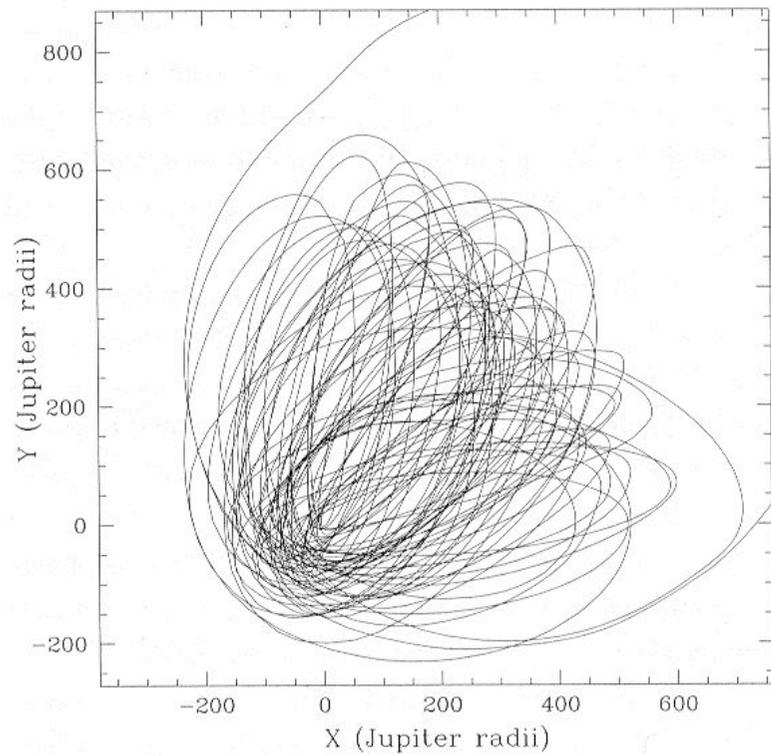
- La trajectoire des planètes est une ellipse dont le centre du soleil est l'un des foyers
- Au cours du mouvement, le rayon vecteur joignant le centre du soleil à la planète décrit des aires égales en des temps égaux: c est la loi des aires
- le rapport des carrés des périodes sur les cubes des demi grands axes est une constante. Exprimé avec a en UA et T en années, ceci donne:

$$\frac{T^2}{a^3} = 1 \quad (17)$$

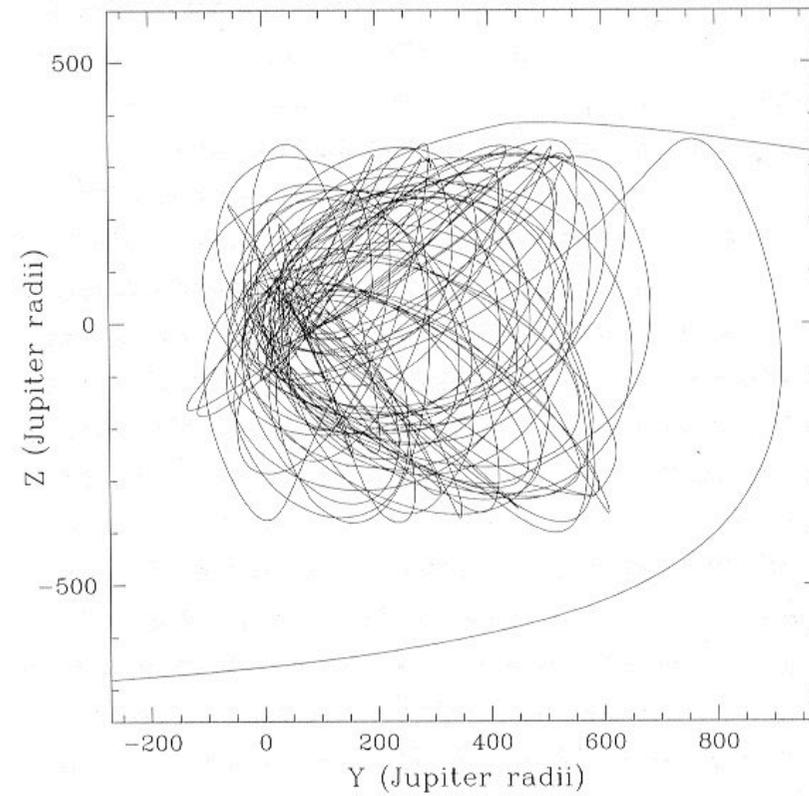
On peut redémontrer la troisième relation à partir de nos résultats.

Sphère de Hill

(a)



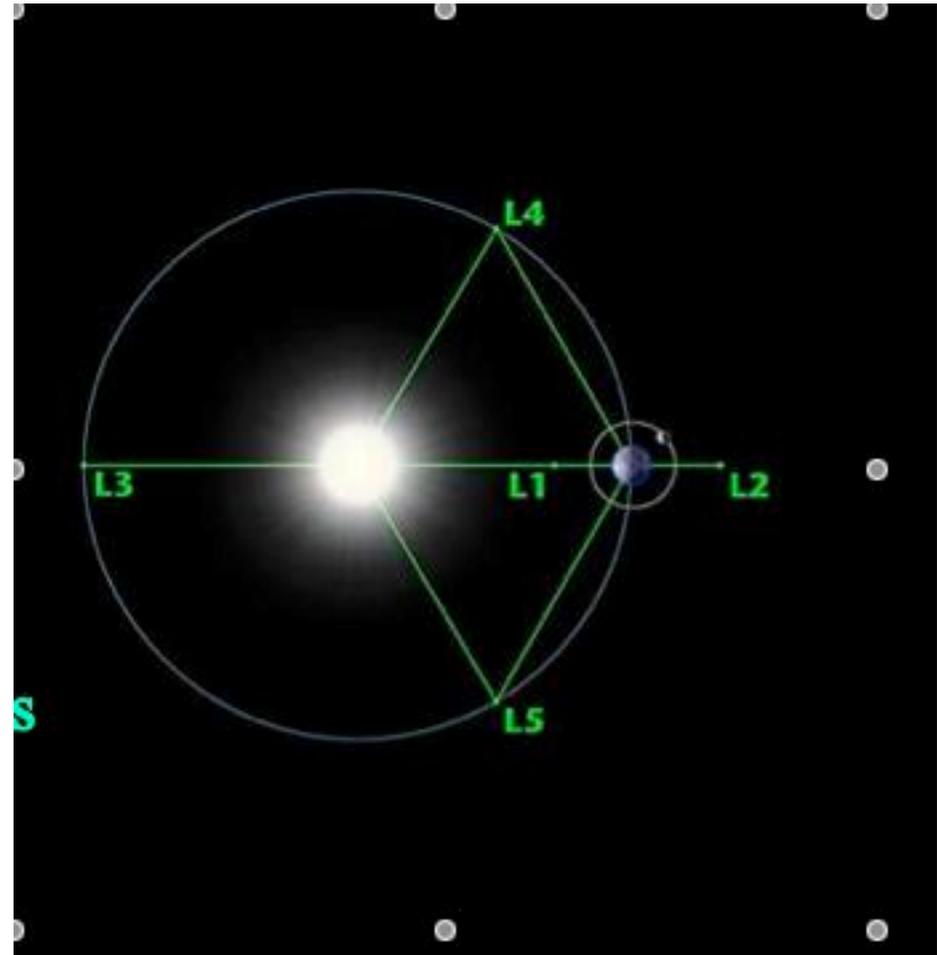
(b)



(c)

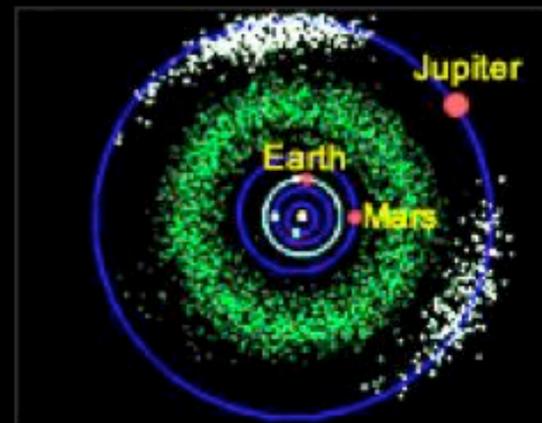
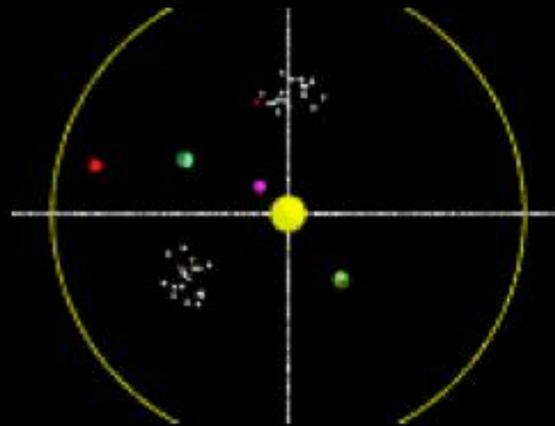
Points de Lagrange

- Points particuliers ou les particules sont en équilibre
- 5 Points de Lagrange



[Aller à la page précédente](#)

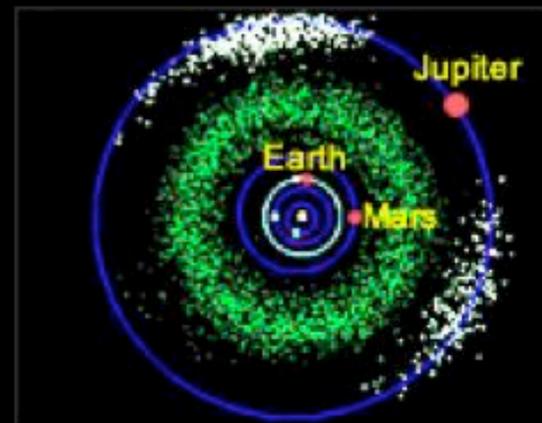
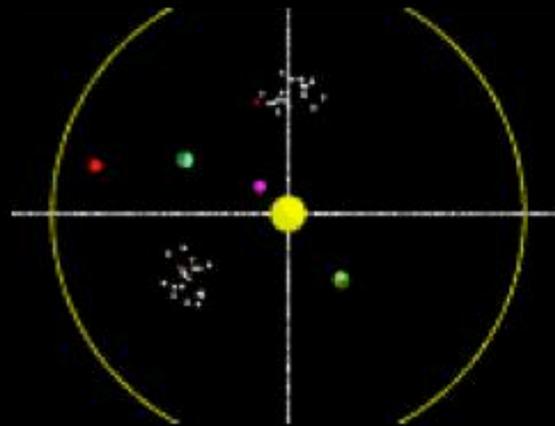
Trojan asteroids



A family of asteroids exists in tadpole orbits about L4, L5 with Jupiter.

[Aller à la page précédente](#)

Trojan asteroids



A family of asteroids exists in tadpole orbits about L4, L5 with Jupiter.

Chaos

$$d(t) = d(0) \exp(\gamma t)$$

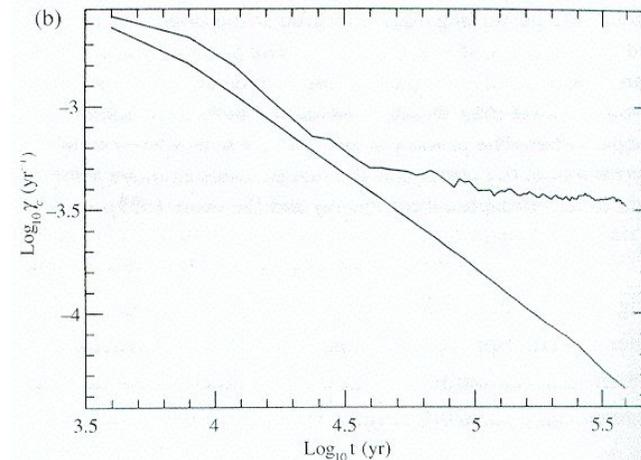
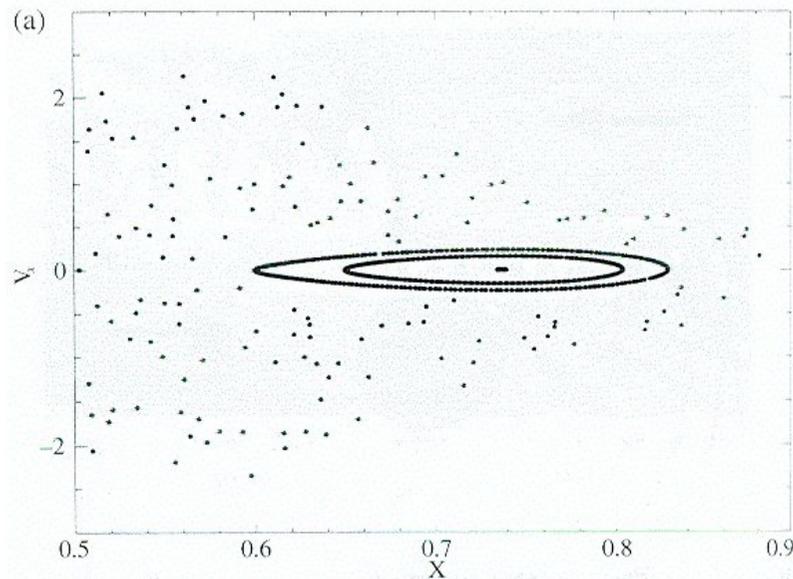
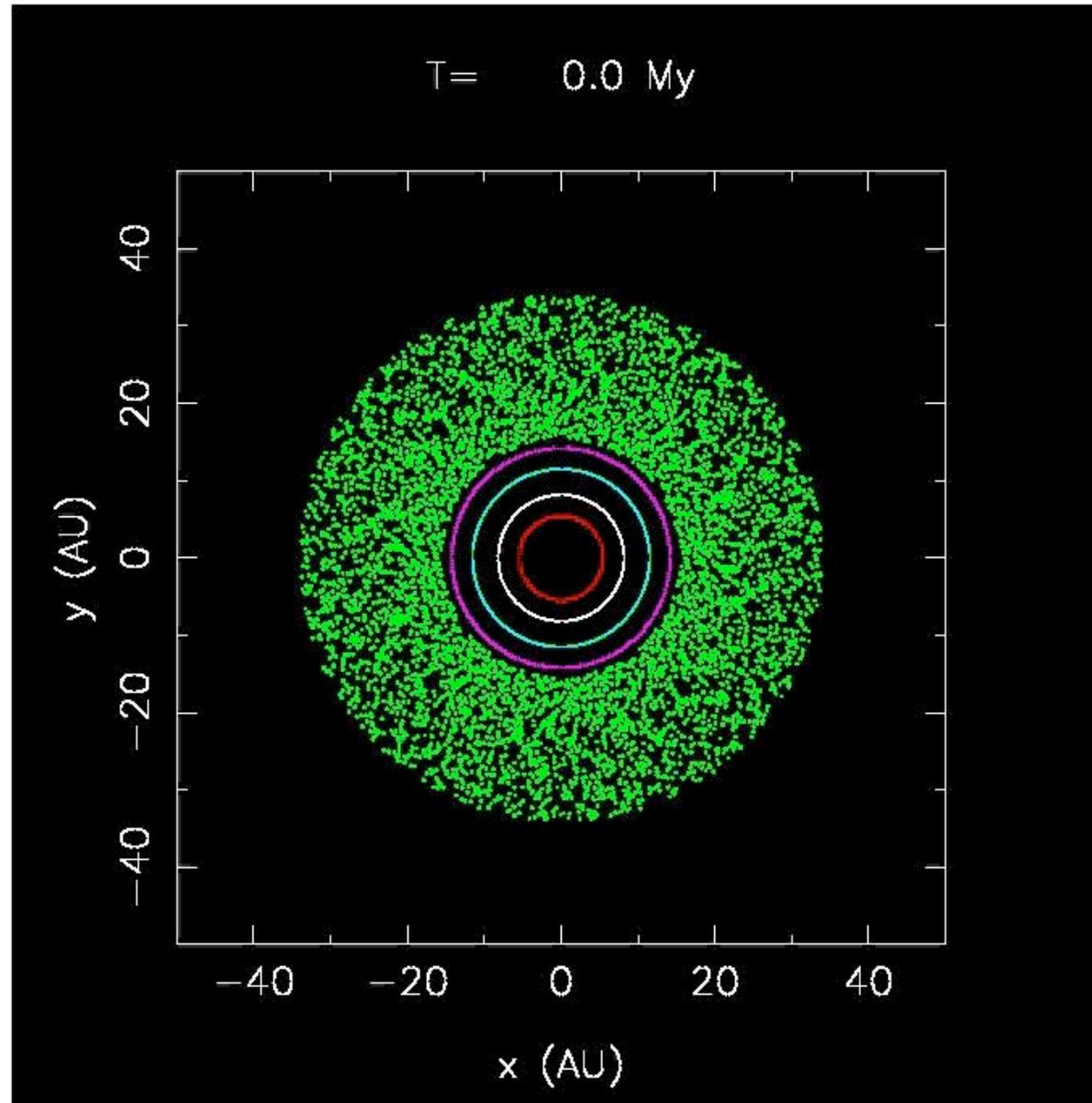
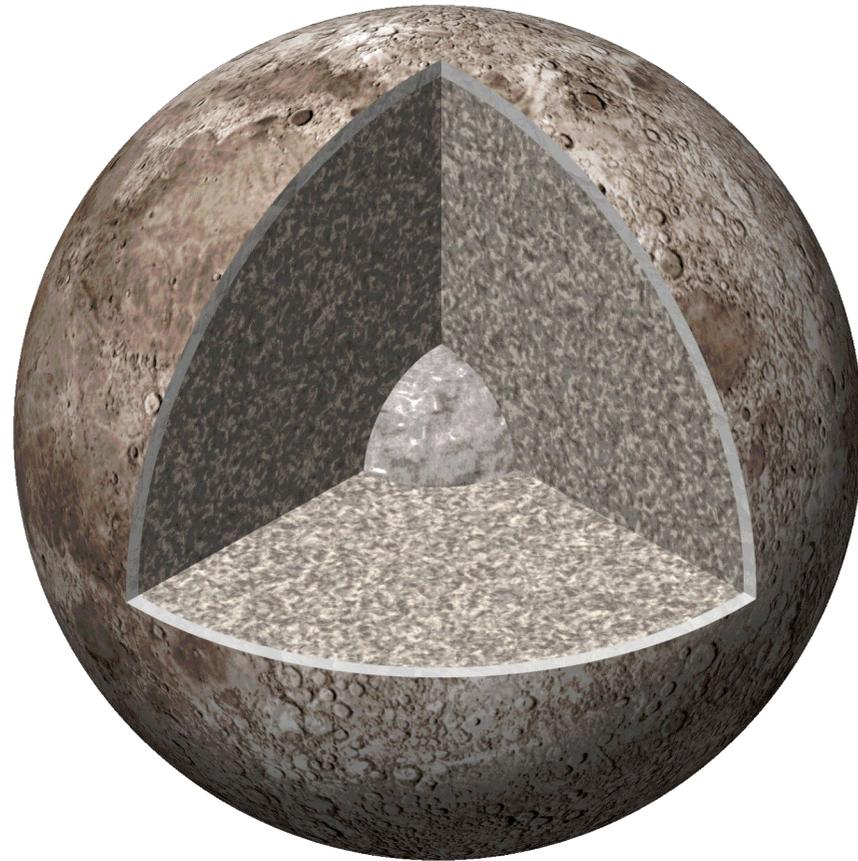


FIGURE 2.6 (a) *Surface of section* for the trajectories of four different test particles in the planar circular restricted three-body problem. The dots display the x coordinate and x velocity of the particles each time the particles pass through the $y = 0$ plane with positive y velocity. The four particles have the same value of C_J but different initial conditions. Three of the trajectories are regular and produce well-defined *quasiperiodic* patterns on the plot. The unconnected dots all represent the trajectory of the fourth particle, which is on a chaotic orbit and therefore is less confined in phase space. (Adapted from Duncan and Quinn 1993) (b) Distinction between regular (lower curve) and chaotic trajectories as characterized by the Lyapunov characteristic exponent, γ_c . Both trajectories are near the 3:1 resonance with Jupiter, and they have been integrated using the elliptic restricted three-body problem. For chaotic trajectories, a plot of $\log \gamma_c$ versus $\log t$ eventually levels off at a value of γ_c that is the inverse of the Lyapunov timescale for the divergence of initially adjacent trajectories, whereas for regular trajectories, $\gamma_c \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. (Adapted from Duncan and Quinn 1993)

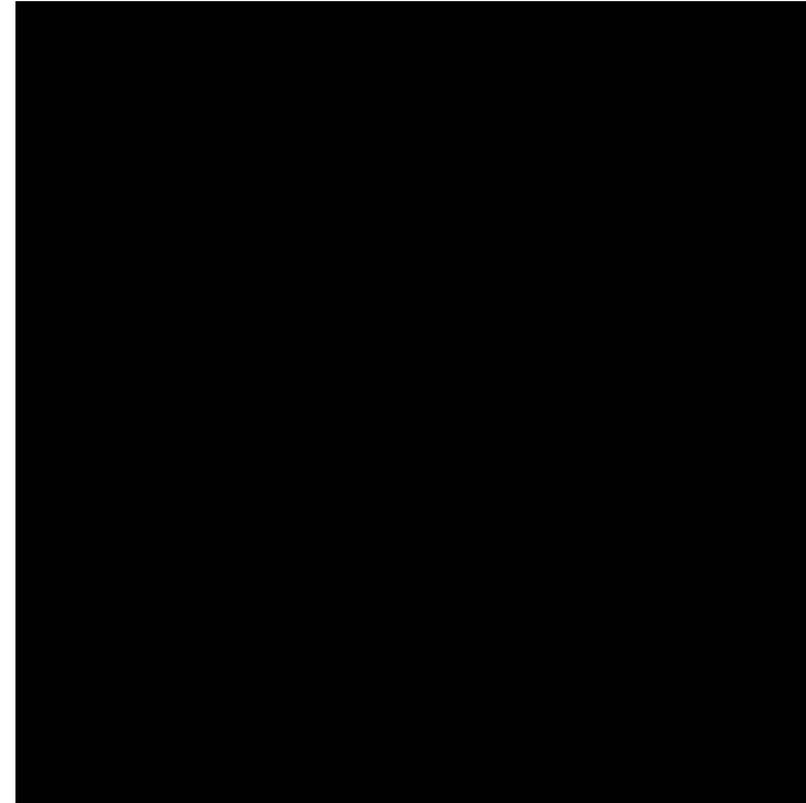
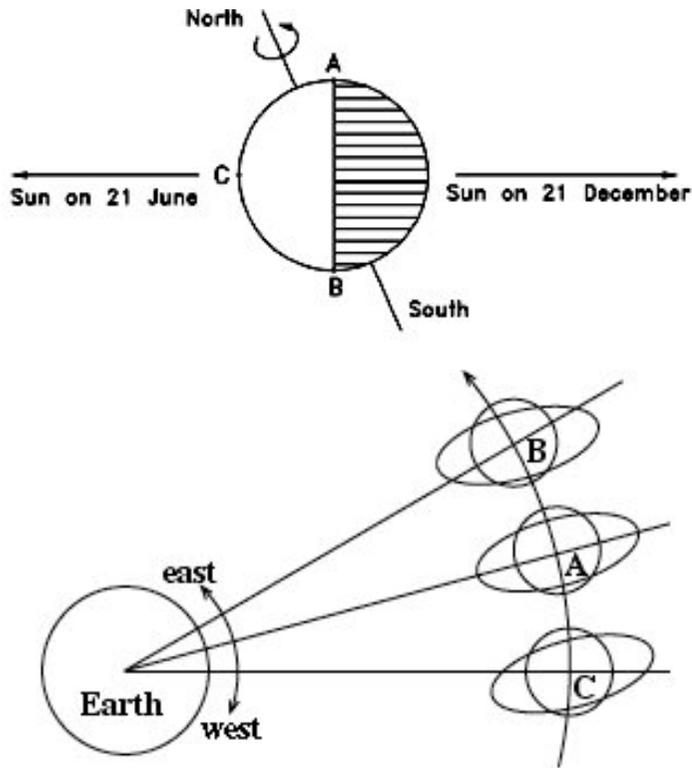
Migration et résonance



Lune...



Rotation de la Lune et librations



- rotation synchrone
- libration géométrique (associées à l'orientation de l'axe de rotation sur l'écliptique: $6^{\circ}50'$, effet de rotation/ellipticité: $7^{\circ}54'$, effet de taille finie: 1°)... pas d'information mais 59% de la surface de la Lune visible
- libration physique (pôle-à-pôle, 1.5° , longitudinale: $0.25'$)

les forces de marée sont une des premières manifestations du fait que les planètes ne sont pas ponctuelles, mais de la taille finie. A l'échelle de la planète en effet, les forces d'attraction gravitationnelle ne sont pas homogènes. le centre des planètes seront donc attirés par les autres astres différemment que leur bords, induisant une faible déformation de ces planètes.

Pour exprimer la force de marée, considérons une planète de rayon a , soumise

à l'attraction gravitationnel d'un corps de masse m situé à une distance $R = |\mathbf{r}|$ du centre de la planète. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un point matériel dans le repère lié à la Terre donne

$$m \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{f} + \mathcal{G} m M \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} - m \gamma_{inertie} \quad (20)$$

Les forces d'inerties comprennent les forces liées à la rotation de la Terre (accélération centripète et accélération de Coriolis), mais aussi l'accélération d'entraînement liée à l'attraction de l'astre de masse M sur la Terre. Cette force est donc simplement

$$\gamma_{inertie} = \mathcal{G} M \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \quad (21)$$

On voit qu'il apparaît une force qui fait apparaître la différence d'attraction gravitationnelle entre un point du globe et le centre de la planète. Cette accélération s'écrit alors

$$\mathbf{f}_{Marée} = \mathcal{G} M \left[\frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \right] = -\nabla \phi_{Marée} \quad (22)$$

où $\phi_{Marée}$ est le potentiel de marée. Ce potentiel est donnée par

$$\phi_{Marée} = -\mathcal{G} M \left[\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{R}|^3} \right] \quad (23)$$

Exprimons alors le potentiel de la force d'attraction gravitationnel.

$$V(\mathbf{r}) = -\mathcal{G} \frac{M}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \quad (24)$$

Si la distance R est grande devant r , on peut faire un développement limité du potentiel par rapport aux puissances de $x = r/R$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} &= \frac{1}{R} (1 - 2x \cos \theta + x^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{R} (1 + x \cos \theta \\ &+ x^2 (\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}) + x^3 (\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta) + \dots) \end{aligned} \quad (25)$$

Si l'on dérive ce potentiel, on trouve l'expression des accélérations perturbatrices. soit, en posant $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{R}$, et en remarquant que

$$\nabla r \cos \theta = \mathbf{u} \quad (26)$$

$$\nabla r = \mathbf{e}_r \quad (27)$$

$$(28)$$

Marée fluide (1/2)

on a finalement

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots \quad (29)$$

avec

$$\gamma_0 = + \frac{\mathcal{G} M}{R^2} \mathbf{u} \quad (30)$$

$$\gamma_1 = + \frac{\mathcal{G} M}{R^3} (3 \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - r \mathbf{e}_r) \quad (31)$$

$$\gamma_2 = + \frac{\mathcal{G} M}{R^4} (\frac{15}{2} \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u} r^2 - 3 r \mathbf{e}_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \quad (32)$$

le premier terme correspond à l'accélération d'attraction exercée au centre de la planète. Cette accélération est celle qui entraîne la planète le long de sa trajectoire. Si on se place dans un repère lié à la planète, elle disparaît, car opposée à l'accélération liée à l'inertie de la planète. Les accélérations supplémentaires sont les accélérations de la marée. Le potentiel de Marée est, si on se limite au premier terme

$$\phi_{Marée} = -\frac{\mathcal{G} M r^2}{R^3} (\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}) - \frac{\mathcal{G} M r^3}{R^4} (\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta) \quad (33)$$

Dans la plupart des cas, le potentiel de marée peut être négligé pour ses termes supérieurs. Seul le terme en r^2/R^3 est alors à considérer. En effet, ceci est tout à fait justifié lorsque l'argument x de la série est petit: c'est le cas pour les marées créées par le soleil sur les planètes ($x = 4 \times 10^{-6}$ pour la Terre par exemple. Ce terme est souvent petit pour les marées créées par les satellites sur la planète, mais pas toujours. On a pour la Lune $x = 0.0167$, mais pour la marée de Phobos sur Mars $x = 1/2.76$, $x = 1/13$ pour la marée de Charon sur Pluton. Négliger les termes supérieurs représente alors une erreur de l'ordre du pourcent sur Terre, mais plus importante encore sur Mars. Nous allons maintenant étudier les conséquences de cette force de marée. Pour commencer, considérons une planète fluide et négligeons la compressibilité. Quelle est la forme de la planète, lorsqu'elle est soumise aux forces conjuguées de sa pesanteur et de la force de marée?

Pour répondre à cette question, considérons le potentiel de pesanteur de la planète $W(\mathbf{r})$, à partir duquel dérive la pesanteur par la relation $\mathbf{g} = -\nabla W$. La surface de la planète est une surface d'équilibre et doit donc être une surface équipotentielle de la somme des divers champs de potentiels. On obtient donc

$$W_{total}(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \quad (34)$$

Appelons \mathbf{r}_s la position de la surface en l'absence de marée. Considérons que le potentiel de marée U est petit devant le potentiel de la pesanteur, et que la déformation de la surface par la marée est également faible. En différenciant la

relation (xx) autour de la position d'équilibre nous déduisons que la surface est une équipotentielle lorsque la quantité:

$$-\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}_0(\mathbf{r}_s) + U(\mathbf{r}_s) \quad (35)$$

est constante. La valeur de cette constante peut être calculée en supposant la planète incompressible. La variation de volume totale produite par la marée doit être nulle. Intégrant la relation sur la surface, on déduit alors que cette constante doit être égale à la valeur moyenne du potentiel perturbateur, ce qui donne finalement:

$$\frac{U(\mathbf{r}_s) - \frac{1}{4\pi} \int d\Sigma U(\mathbf{r}_s)}{\mathbf{g}_0(\mathbf{r}_s)} = \delta h \quad (36)$$

où δh représente la hauteur de la déformation perpendiculaire à la surface non déformée de la planète (et donc parallèlement à son champ de pesanteur). En remarquant que la valeur moyenne de la perturbation du potentiel de marée est nulle, on en déduit finalement l'expression de la déformation de la surface de la planète par la force de marée:

$$\delta h = h_0 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \quad (37)$$

where $h_0 = \frac{GM_s^2}{g_0 R^3}$.

Sun/Mercury	Sun/Earth	Sun/Mars	Sun/Jupiter	Moon/Earth	Phobos/Mars
1 m	16 cm	2,6 cm	5,7 cm	36 cm	2,4 mm

Table 1: Amplitude of the tidal amplitude

Ces relations donnent l'amplitude des marées sur divers planètes. Mis à part Mercure, les marées terrestres comptent parmi les plus importantes dans le système solaire, par l'action conjuguée du Soleil et de la Lune. Les relations que nous venons d'obtenir, dans le cas de la Terre, sont également valables pour les marées océaniques. Néanmoins pour ces dernières des phénomènes de résonance peuvent avoir lieu, amplifiant les amplitudes des ondes océaniques.

En fait, il faut en plus considérer dans le cas de la Terre le fait que la Terre est inclinée par rapport au plan de l'écliptique. L'inclinaison est de θ degrés. On doit donc alors écrire le cosinus sous la forme

$$\cos \Theta = \sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta \cos(H - \phi) \quad (38)$$

Si on remplace cette expression dans le potentiel, on trouve alors

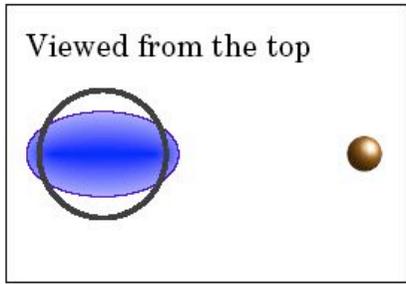
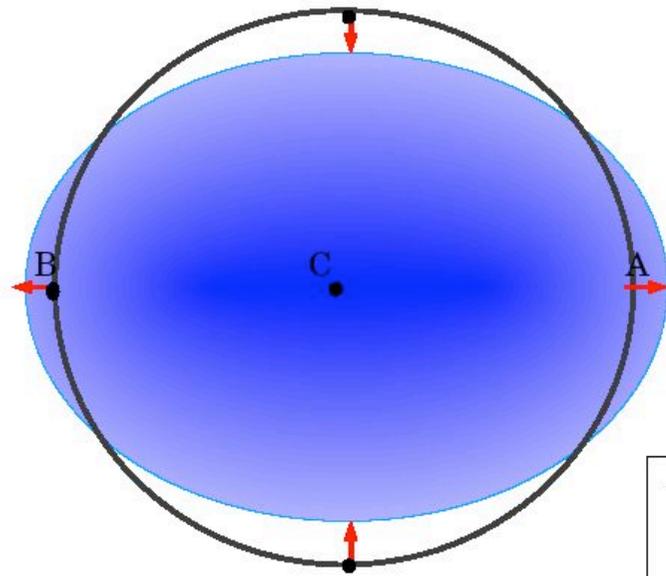
$$\frac{3 \cos^2 \Theta - 1}{2} = \left(1 - \frac{3 \cos^2 \theta}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{3 \cos^2 \delta}{2}\right)^2 \quad (39)$$

$$+ 3 \cos \theta \sin \theta \cos \delta \sin \delta \cos(H - \phi) \quad (40)$$

$$+ \frac{3}{4} \cos^2 \theta \cos^2 \delta \cos 2(H - \phi) \quad (41)$$

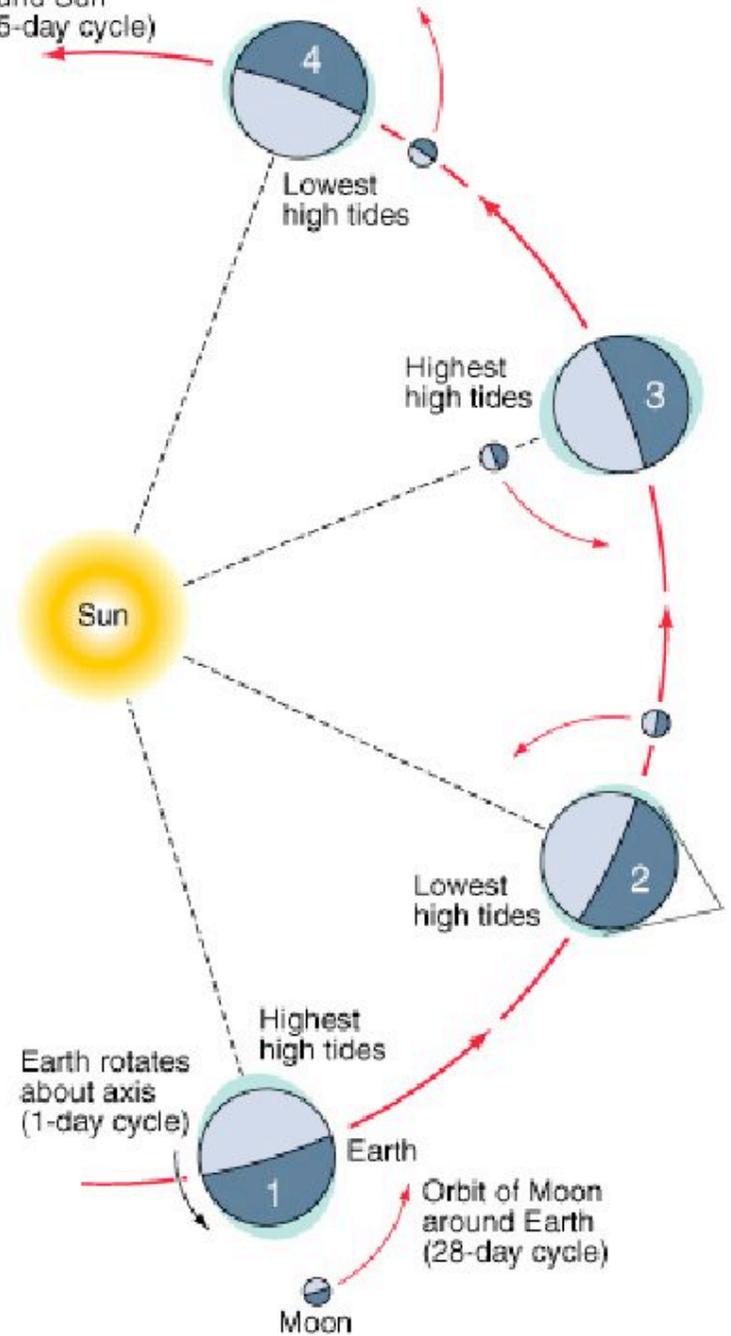
Marée fluide (2/2)

Le premier terme s'appelle terme zonal. Il ne dépend pas de la longitude de la lune, mais seulement de l'angle entre le plan équatorial de la Terre et le plan de l'orbite lunaire, c'est à dire la déclinaison de la Lune. Ce terme va varier avec une période deux fois plus faible que la période lunaire, soit environ 13,666 jours (Onde Mf). A cela ce rajoute la variation de la distance Terre-Lune, ce qui fait une période égale à la période lunaire, 27,555 jours (onde Mm). Le second terme fait apparaître un terme en $\cos(H - \phi)$, qui va faire intervenir la période de rotation de la Terre par rapport à la Lune, soit 24h04. Au voisinage de cette onde, on trouvera une série d'ondes de marée provenant des compositions de cette dernière avec les variations plus lentes de déclinaison et d'ellipticité. Cette onde est l'onde diurne. Enfin, on a enfin le troisième terme qui comprend un terme qui varie avec une fréquence deux fois plus grande que la vitesse de rotation angulaire de la Lune, et donc avec une période de 12h25, qui est l'onde semi-diurne...



Moon/Sun

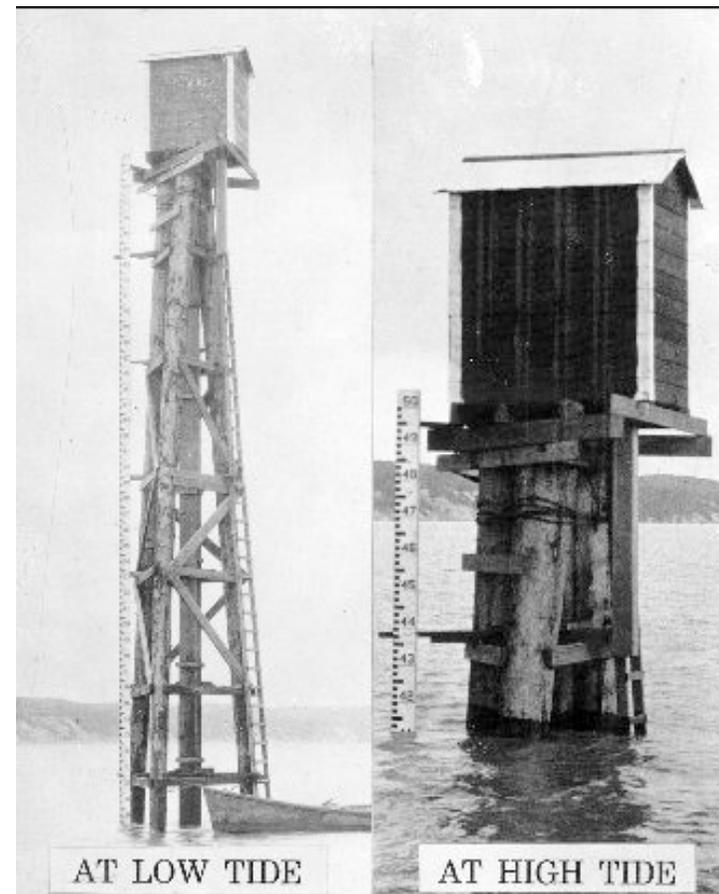
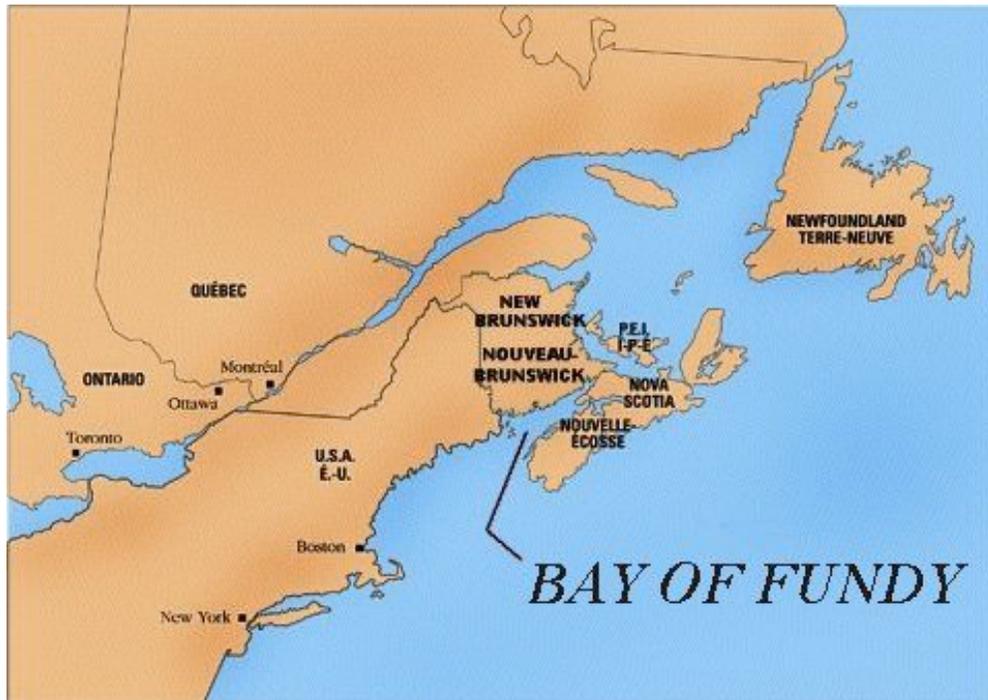
Orbit of Earth
around Sun
(365-day cycle)

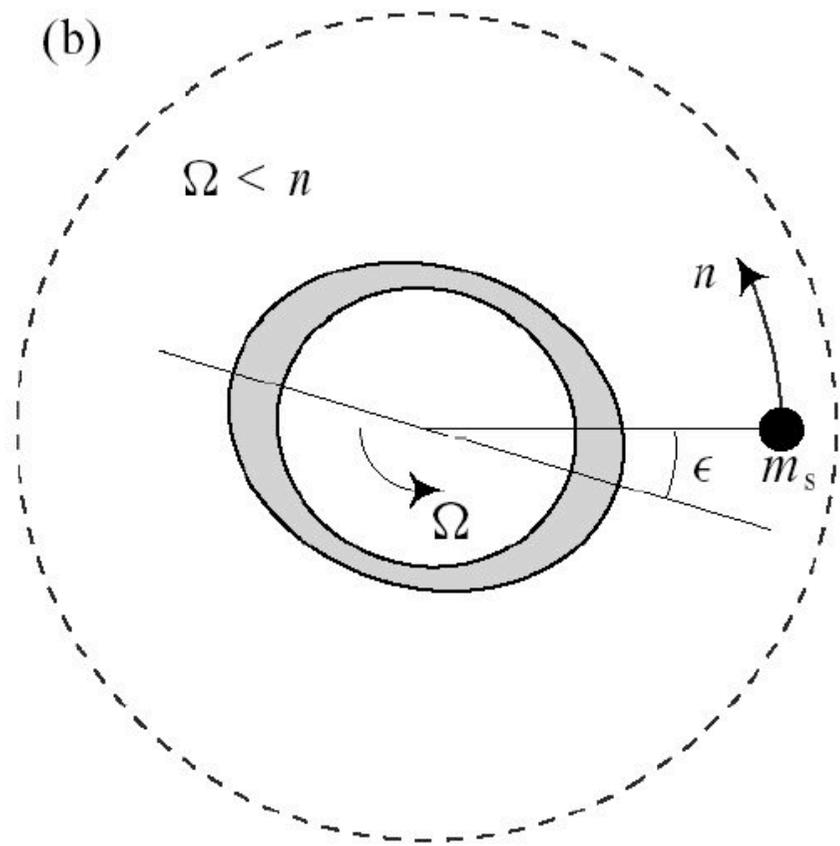
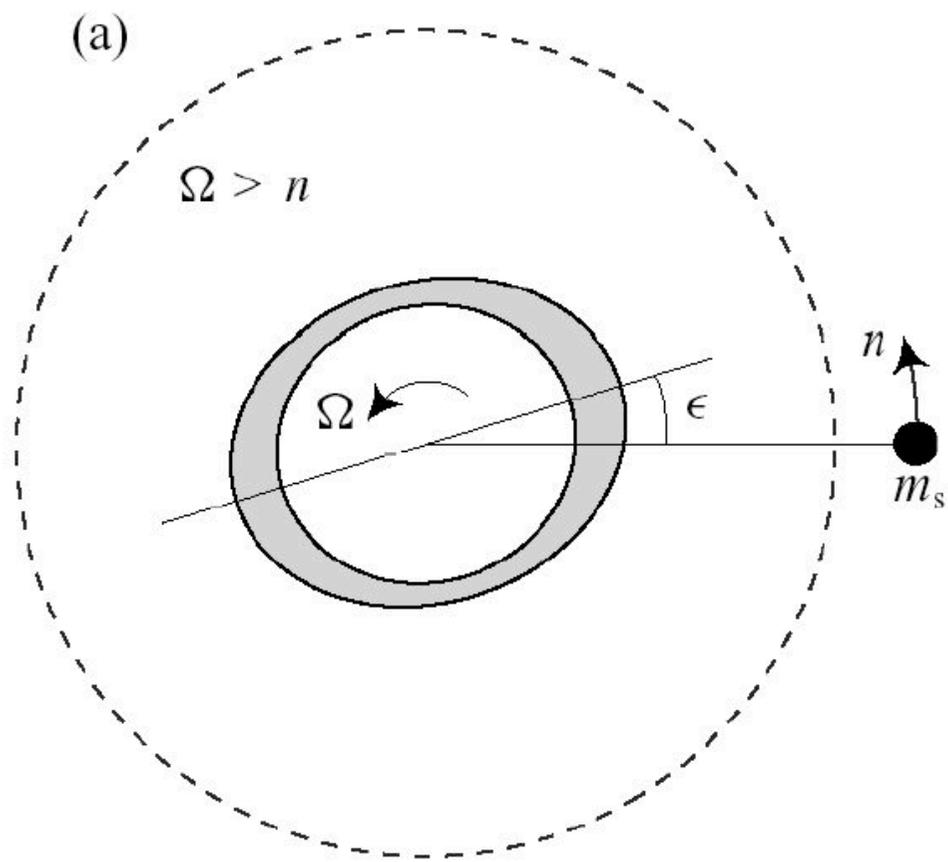


Résonance

Dans certaines régions du globe la marée est particulièrement forte, c'est le cas dans la baie du Mont Saint-Michel (15 m d'unité de hauteur). Les marées les plus fortes se trouvent dans la baie de Fundy, située sur la frontière entre les Etats Unis et le Canada du côté Atlantique.

Ce phénomène d'amplification de la marée est dû à la forme particulière des côtes. L'onde de marée incidente rebondit au fond de ces baies et crée une onde réfléchi. Lorsque la baie a une certaine longueur l'onde incidente et l'onde réfléchi peuvent être en phase, doublant ainsi l'amplitude de la marée. Ce phénomène porte le nom de résonance.





Marée solide et ralentissement

Considérons une Terre à symétrie sphérique. Le déplacement de la Terre produit par la marée pour une planète fluide incompressible peut s'écrire sous la forme:

$$u(r) = \frac{\mathcal{G}Mr^2}{gR^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

où θ est l'angle entre le point et la direction de l'astre produisant la marée. Dans une planète non-fluide, ce déplacement s'exprimera sous la forme

$$u(r) = H(r) \frac{\mathcal{G}Mr^2}{gR^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) = -H(r) \frac{\phi_{Maree}}{g}$$

A la surface, la grandeur $H(a) = h$ définit un nombre appelé nombre de Love. On peut également définir d'autres nombres de Love. L'un est relié au potentiel d'attraction gravitationnel de la Terre, qui sous l'effet des marées, se retrouve perturbé et devient:

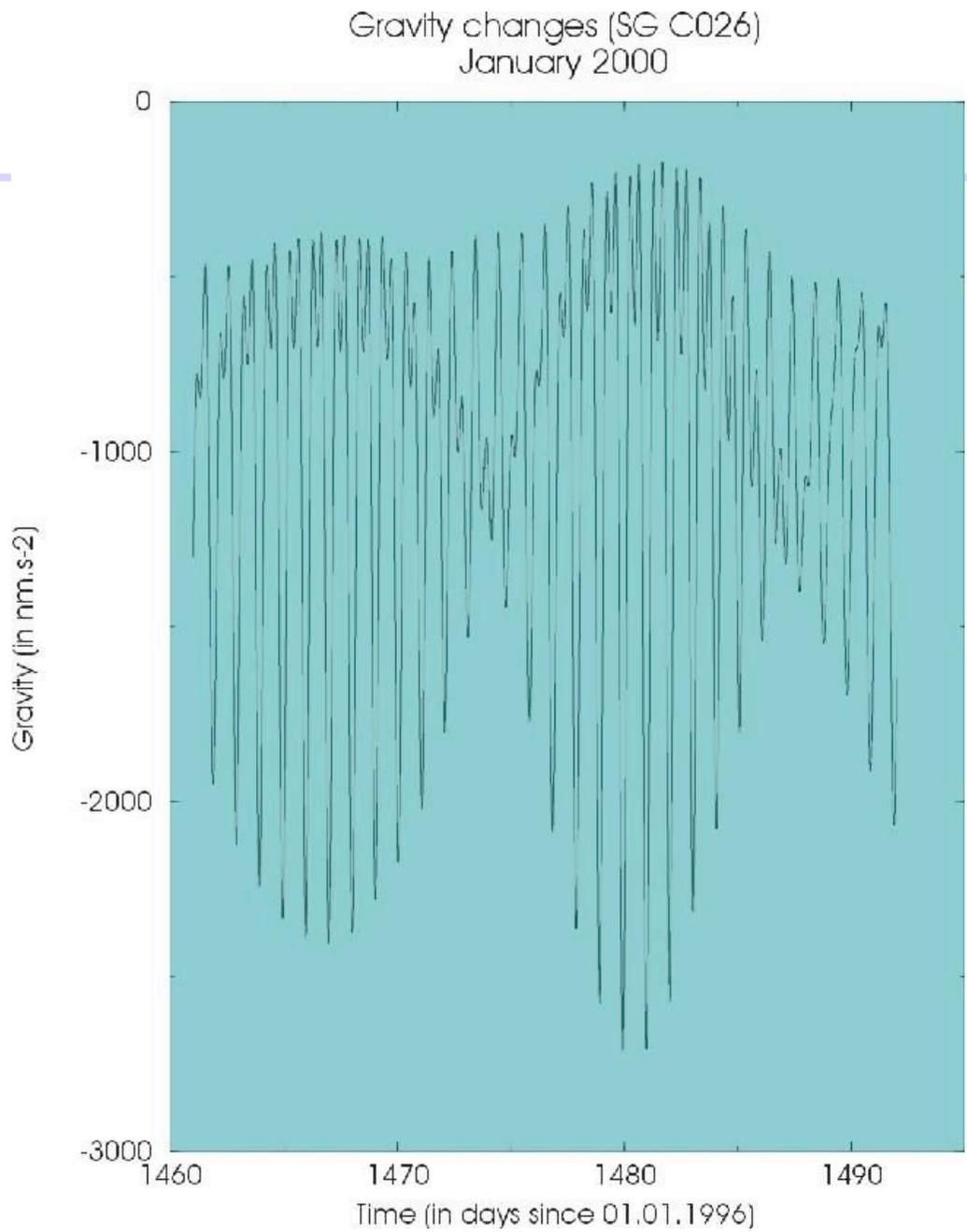
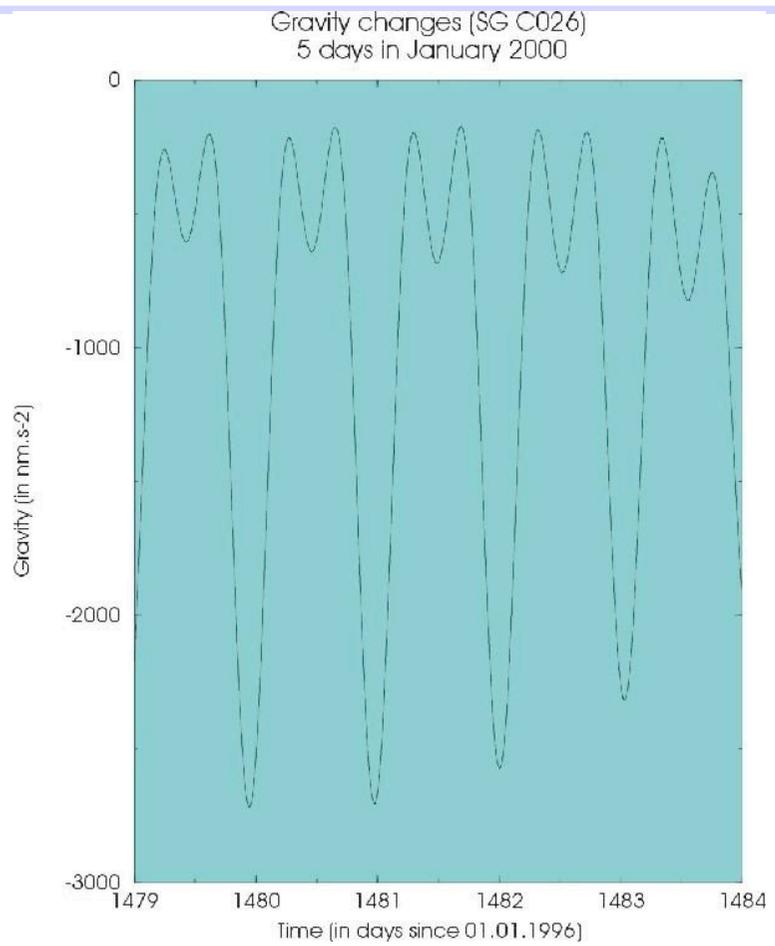
$$\phi_{grav} = \phi_0 + K(r)\phi_{Maree}$$

Le potentiel à la surface de la Terre devient donc

$$\begin{aligned} \phi_{grav}(a) &= \phi_0(a) + u(a) \frac{d\phi_0}{dr} + K(a)\phi_{Maree} \\ \phi_{grav.}(a) &= \phi_0(a) + (K(a) - H(a))\phi_{Maree} \end{aligned}$$

ou on utilise $\frac{d\phi_0}{dr} = g$. Le potentiel complet à la surface est donc maintenant

$$\phi_{total}(a) = \phi_0(a) + (1 + K(a) - H(a))\phi_{Maree}$$



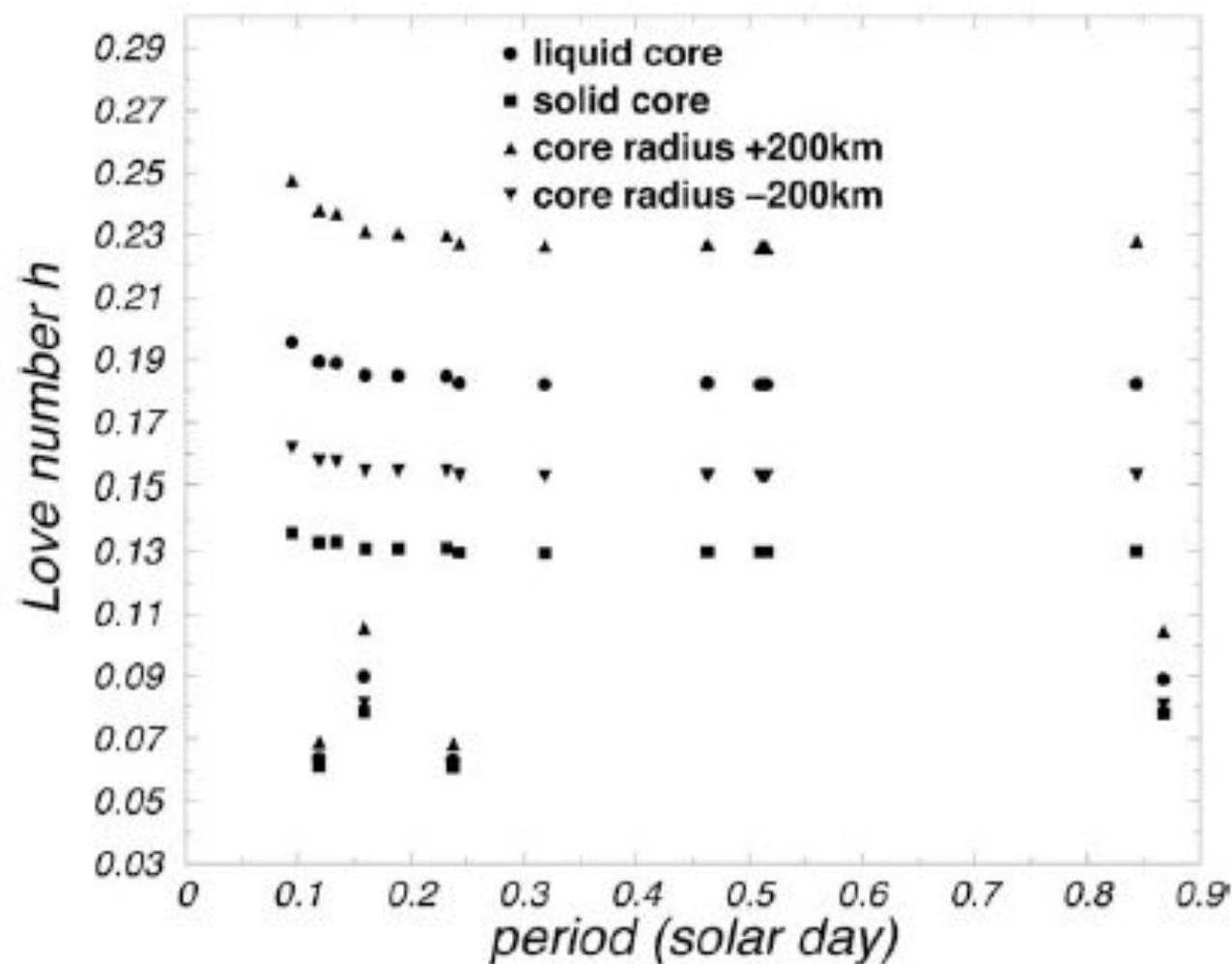
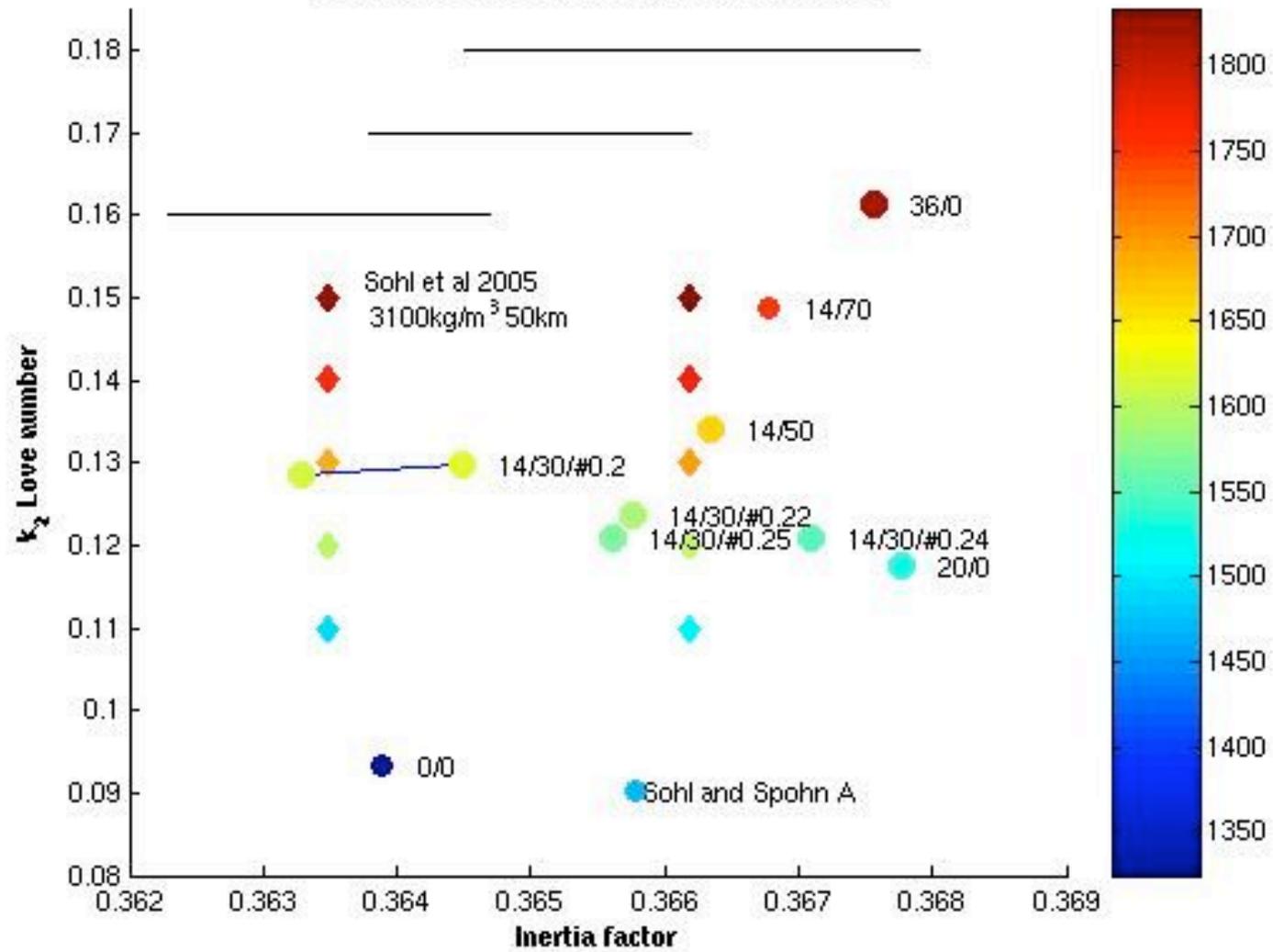


Fig. 5. Love number $h^{(0)}$ for subdiurnal tides. Values of about 0.09 and about 0.06 are found for Love numbers of degree 3 and degree 4, respectively. All other values are for degree 2.

Mars Models versus Geophysical constraints



Equation de la trajectoire

Potentiel et attraction de la planète déformée sur le Satellite

$$\phi_{gravi} = -u_0 g k_2 \left(\frac{a}{D} \right)^3 P_2(\cos \theta)$$

par continuité et en raison de $n=2$ et où

$$u_0 = \frac{a^2 G m_s}{g D^3}$$

Conservation du moment cinétique

$$L = I\Omega + \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} D^2 n$$

d'où

$$\dot{L} = 0 = I\dot{\Omega} + \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} \frac{d}{dt}(D^2 n) = I\dot{\Omega} + \frac{1}{2} \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} D \dot{D} n$$

en utilisant la 3eme relation de Kepler

$$n^2 D^3 = G(m_p + m_s)$$

Evolution du moment cinétique

$$\frac{m_s m_p}{m_s + m_p} \frac{d(D^2 n)}{dt} = \Gamma = |\vec{r} \times \vec{F}| = -m_s D \frac{1}{D} \frac{\partial \phi_{gravi}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=-\varepsilon} = \frac{3}{2} k_2 \frac{G m_s^2}{D^6} a^5 \sin(2\varepsilon)$$

Evolution

Evolution de l'énergie mécanique

$$E = \frac{1}{2} I \Omega^2 - G \frac{m_p m_s}{2D}$$

d'où

$$\dot{E} = I \Omega \dot{\Omega} + G \frac{m_p m_s}{2D^2} \dot{D} = - \frac{1}{2} \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} n D \dot{D} (\Omega - n)$$

$$E = \frac{1}{2} I \Omega^2 - G \frac{m_p m_s}{2D}$$

Comme il y a perte d'énergie par frottement de marée, on a donc

$$\text{signe}(\dot{D}) = \text{signe}(\Omega - n)$$

- les satellites sur des orbites progrades plus loin que l'orbite planéto-synchrone vont s'éloigner
- les satellites sur des orbites progrades plus loins que l'orbite planeto-synchrone vont se rapprocher
- les satellites sur des orbites retrogrades vont se rapprocher.

• Evolution de la trajectoire

Comme

$$\dot{E} = -\Gamma(\Omega - n)$$

nous avons

$$\dot{D} = \text{signe}(\Omega - n) 3k_2 \frac{m_s}{m_p} \left(\frac{a}{D}\right)^5 n D \sin(2\varepsilon) = \text{signe}(\Omega - n) 3k_2 \frac{m_s}{m_p} a^5 \frac{\sqrt{G(m_s + m_p)}}{Q_p D^{11/2}}$$

Pour la Terre, $2 \varepsilon = 1/350 = 1/Q_p$ et $da/dt = 10^{-9} \text{ ms}^{-1}$

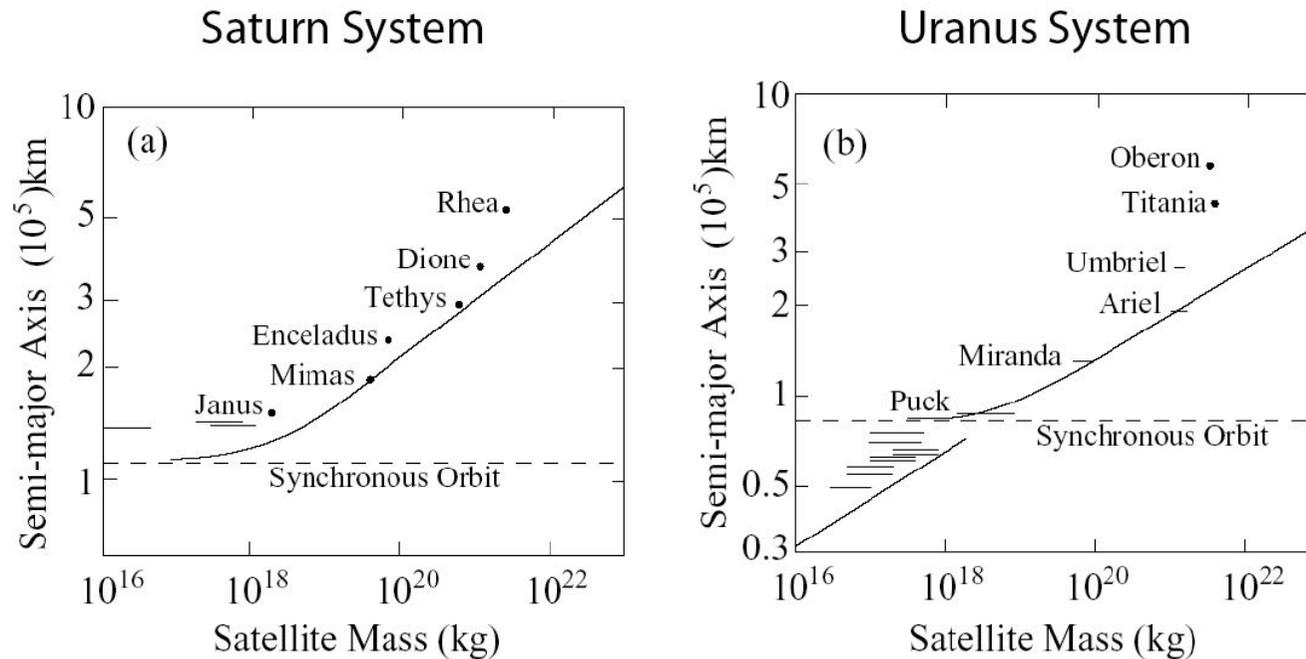
Evolution

L'intégration de l'équation donne alors, pour un satellite au cours du temps

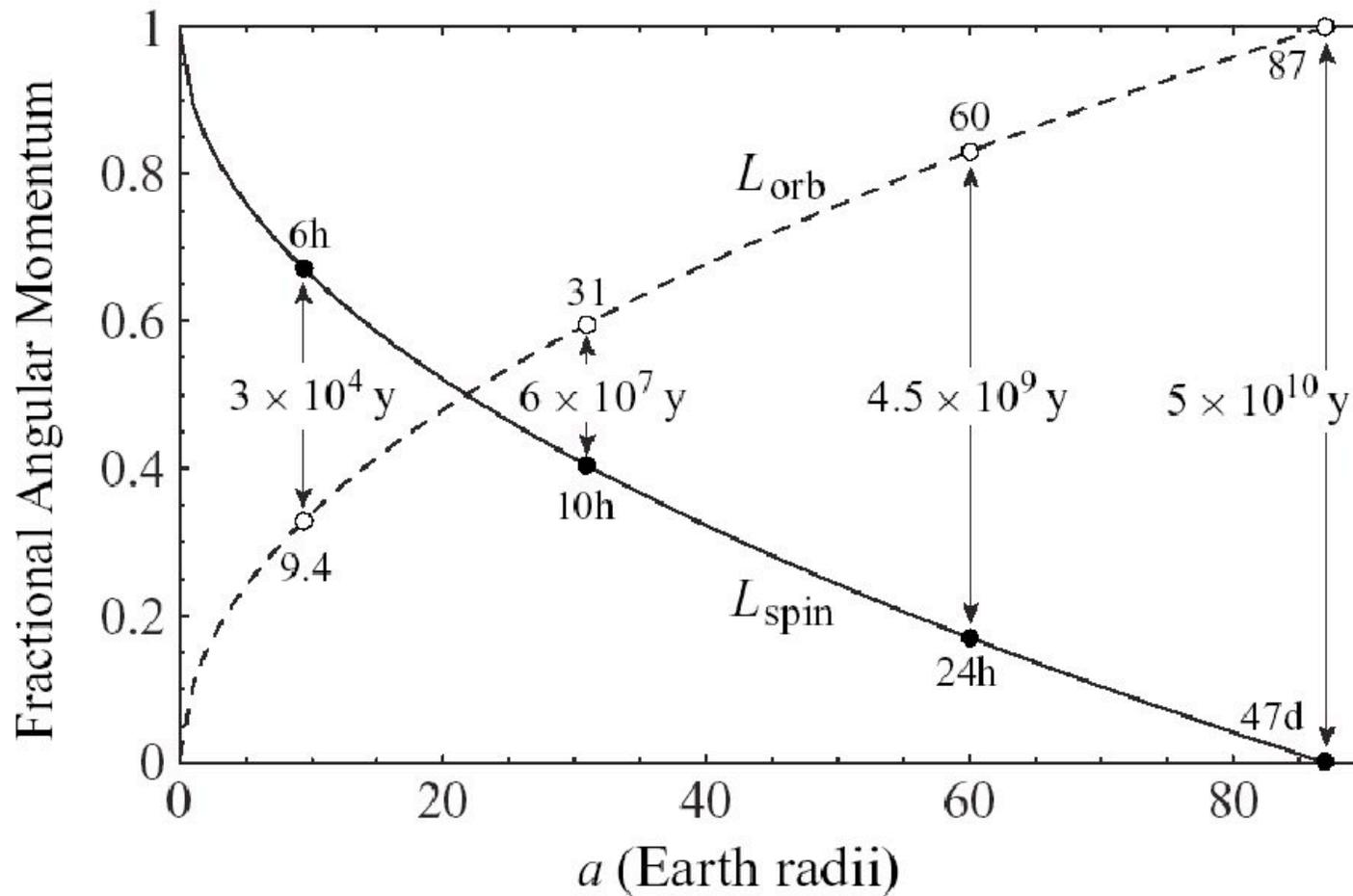
$$\frac{2}{13} a_0^{13/2} \left(1 - \left(\frac{a_i}{a_0} \right)^{13/2} \right) \approx \frac{2}{13} a_0^{13/2} = \frac{3k_2}{Q_p} \frac{m_s}{m_p} a^5 \sqrt{G(m_s + m_p)} t$$

Pour un instant donné et plusieurs satellites, nous avons par contre :

$$\log a_0 = \frac{2}{13} \log m_s + cte$$



Evolution lunaire



Lune: ordre de grandeur

Observation de la durée du jour

400 \pm 7 jours il y a 650 millions d'années

443 jours avec les valeurs actuelles de l'atténuation
variation actuelle de 2.4 ms/siècle

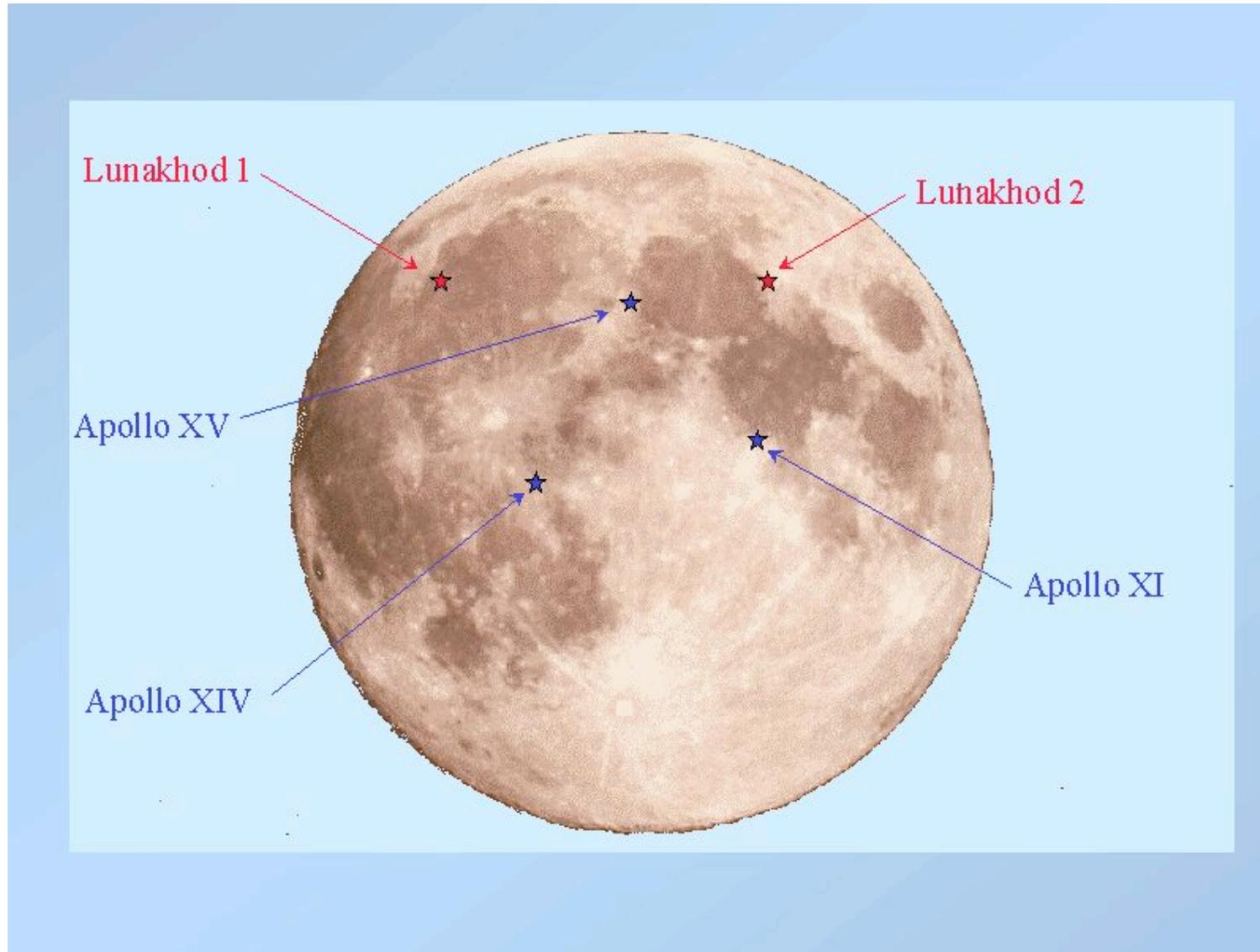
Mesure pour la Lune



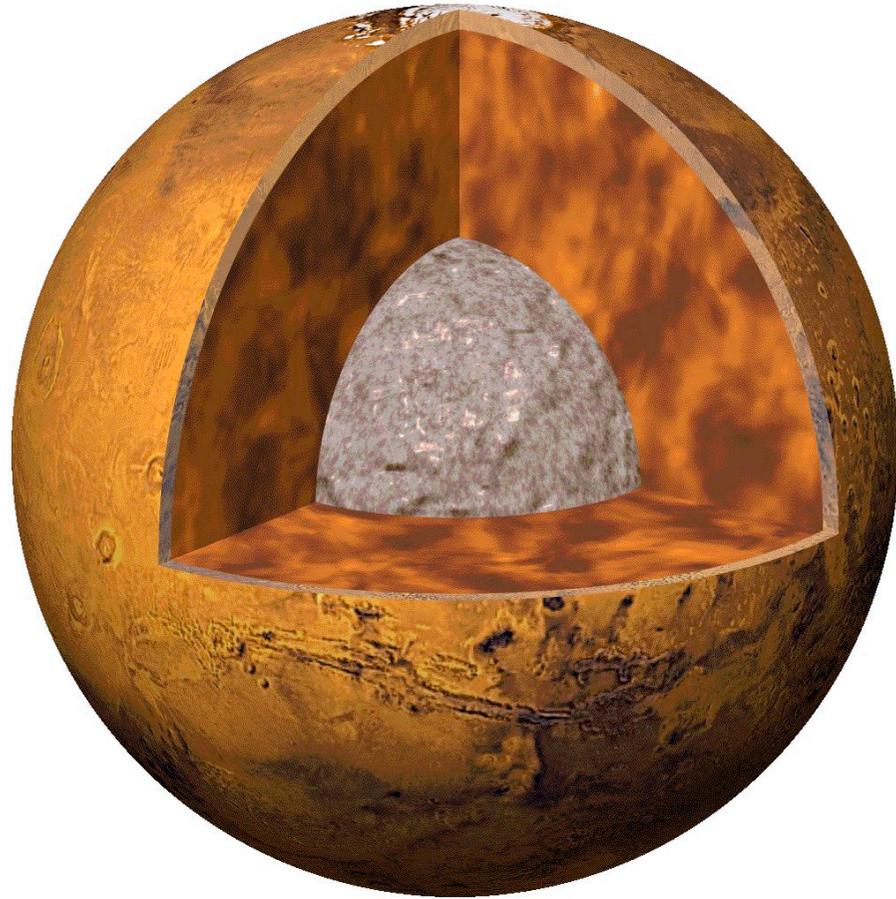
- $C/Ma2 = 0.3932 \pm 0.0002$



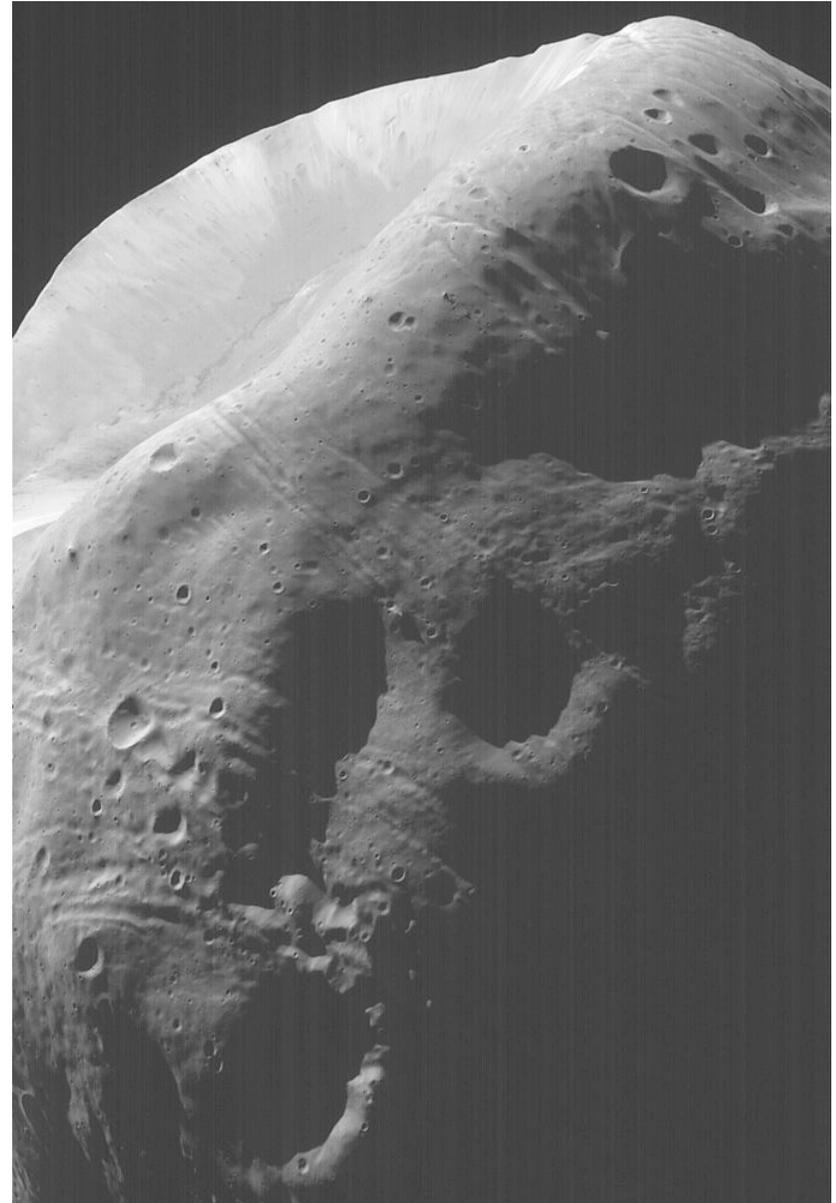
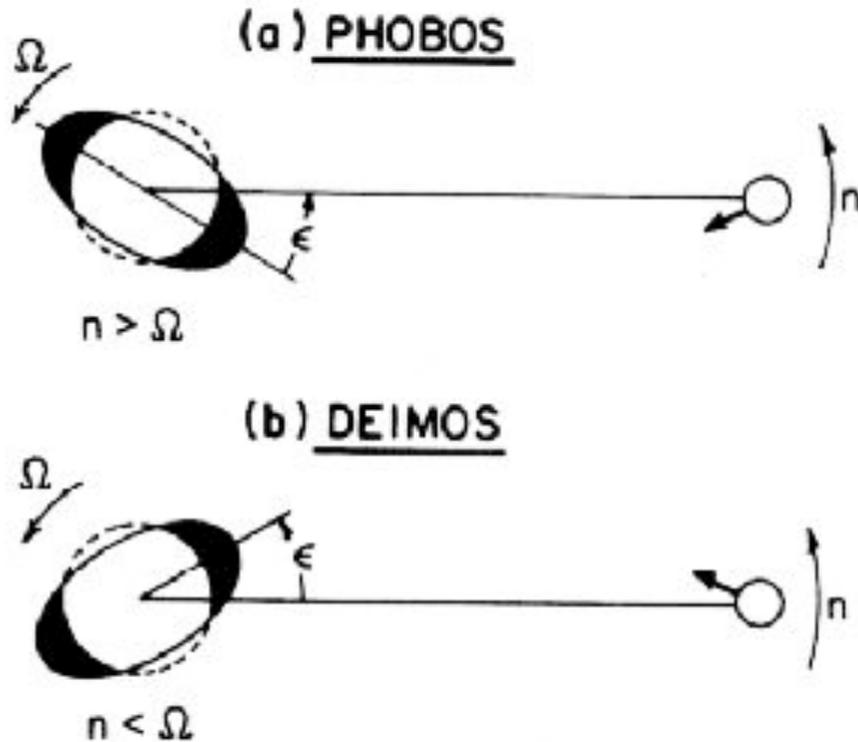
Position des réflecteurs sur la Lune



Mars



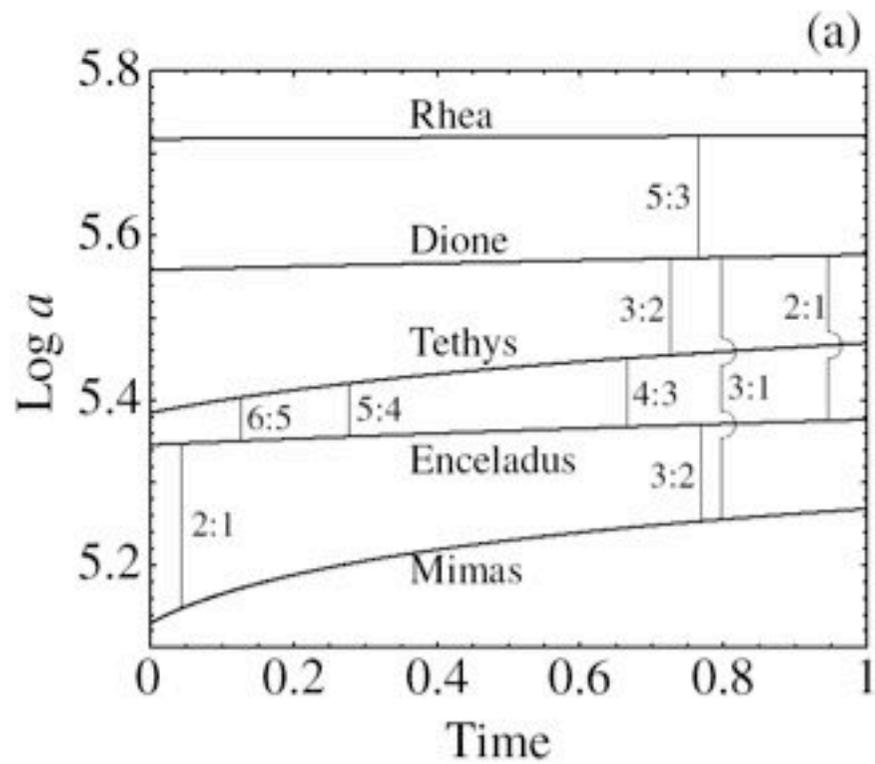
Accélération séculaire de Phobos



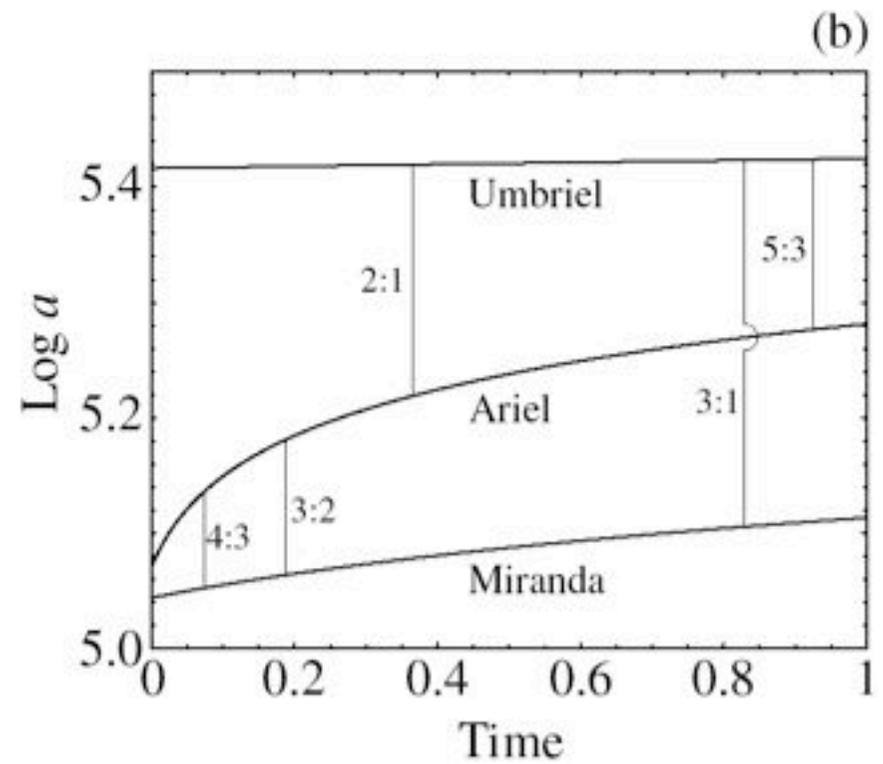
- éloignement lent de Deimos
- chute de Phobos d'ici 20-30 millions d'années

Planètes géantes

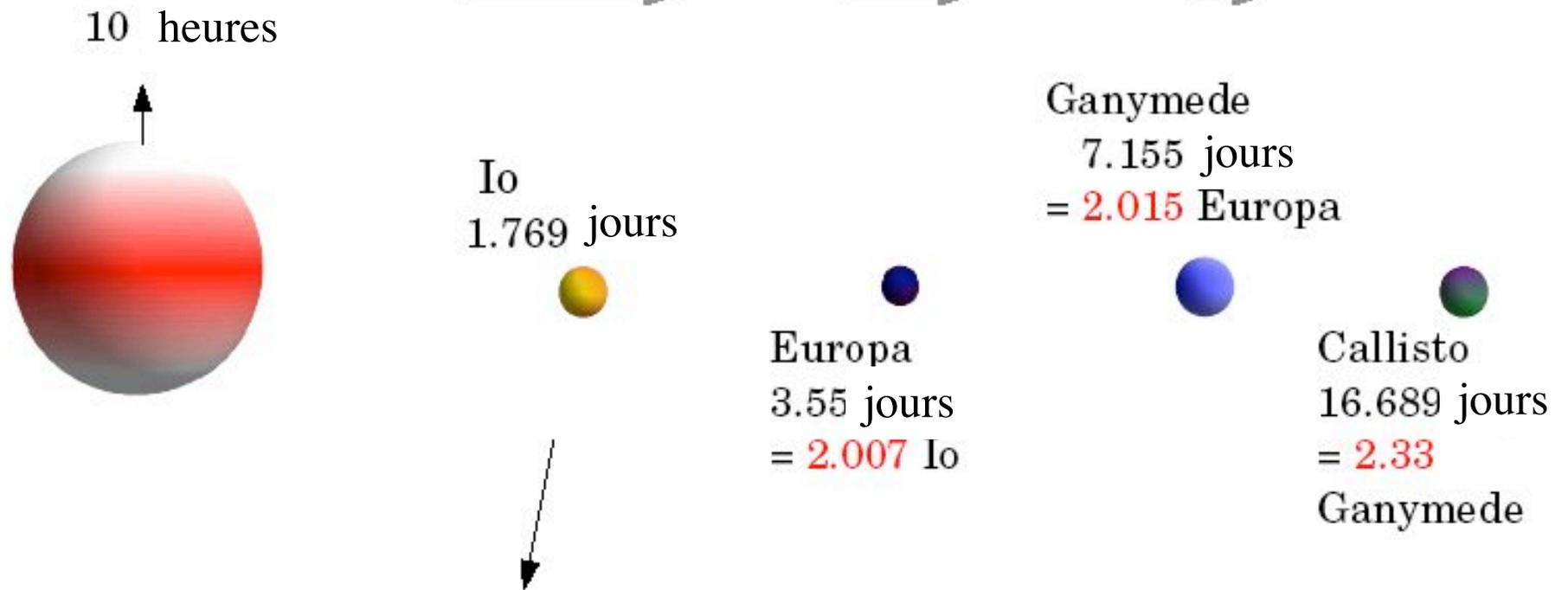
Saturn System



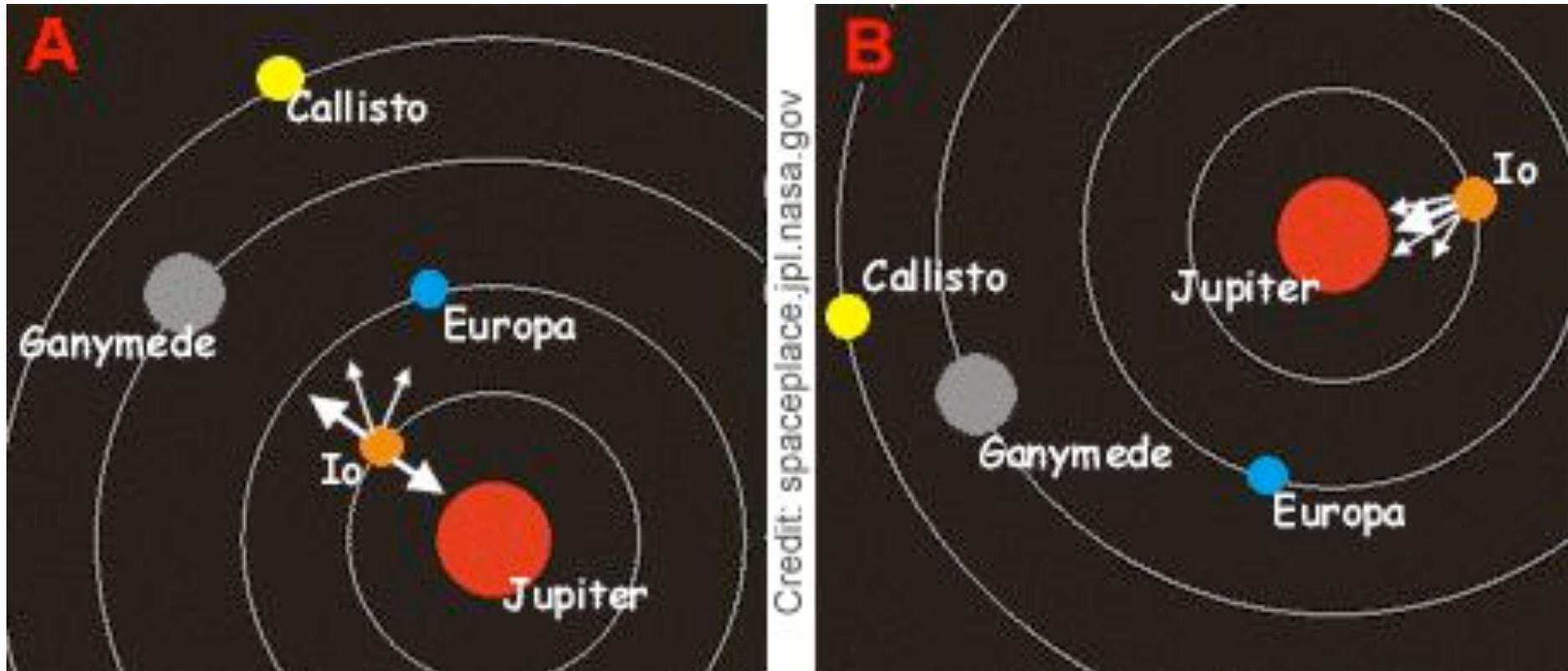
Uranus System

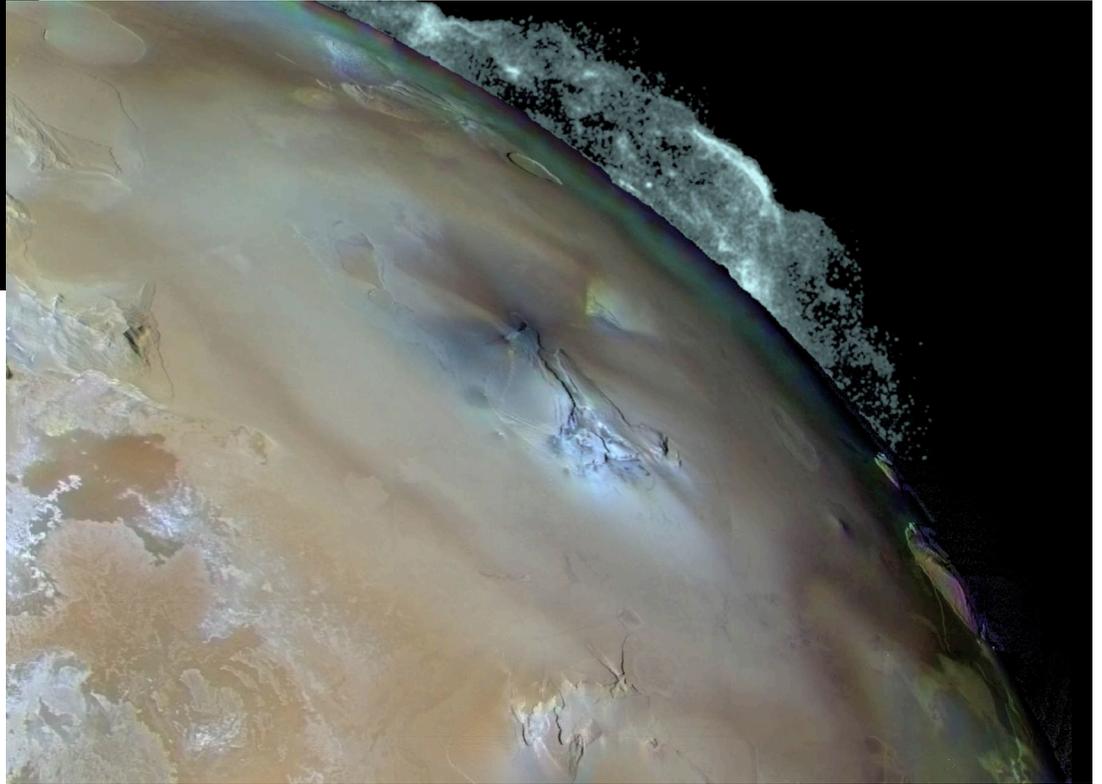


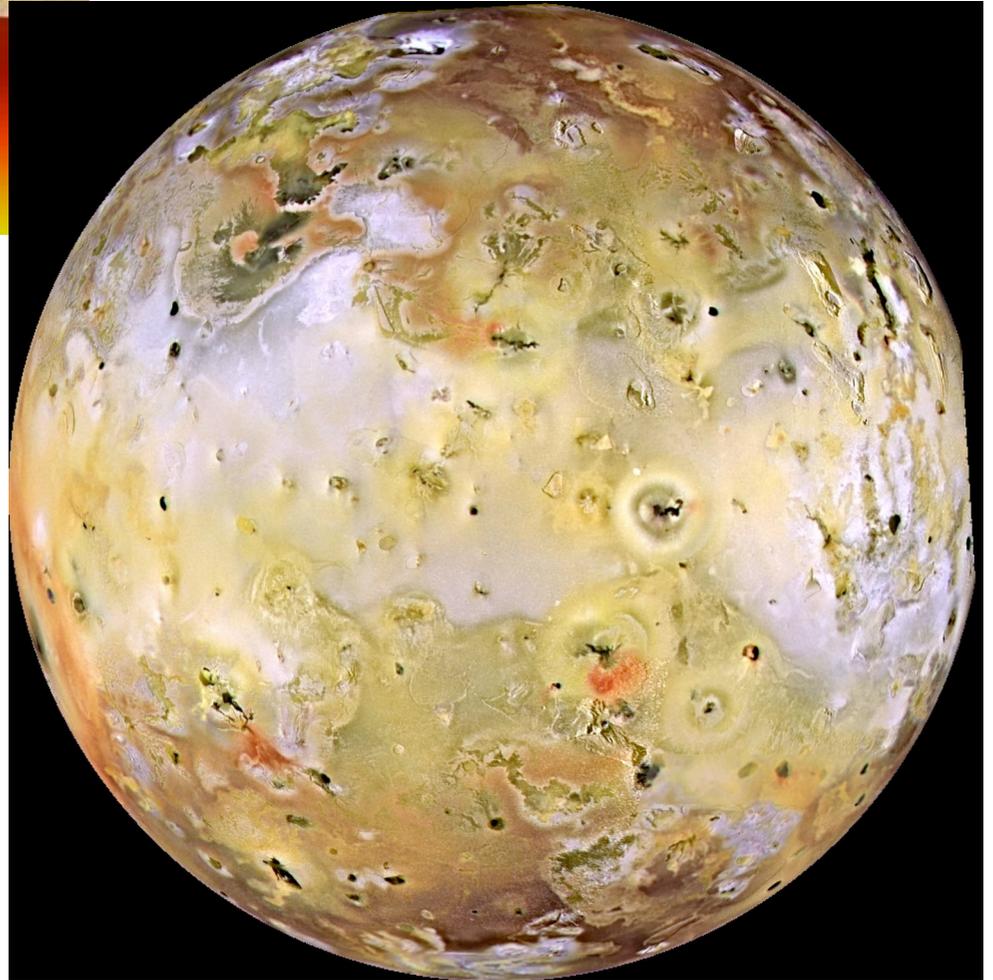
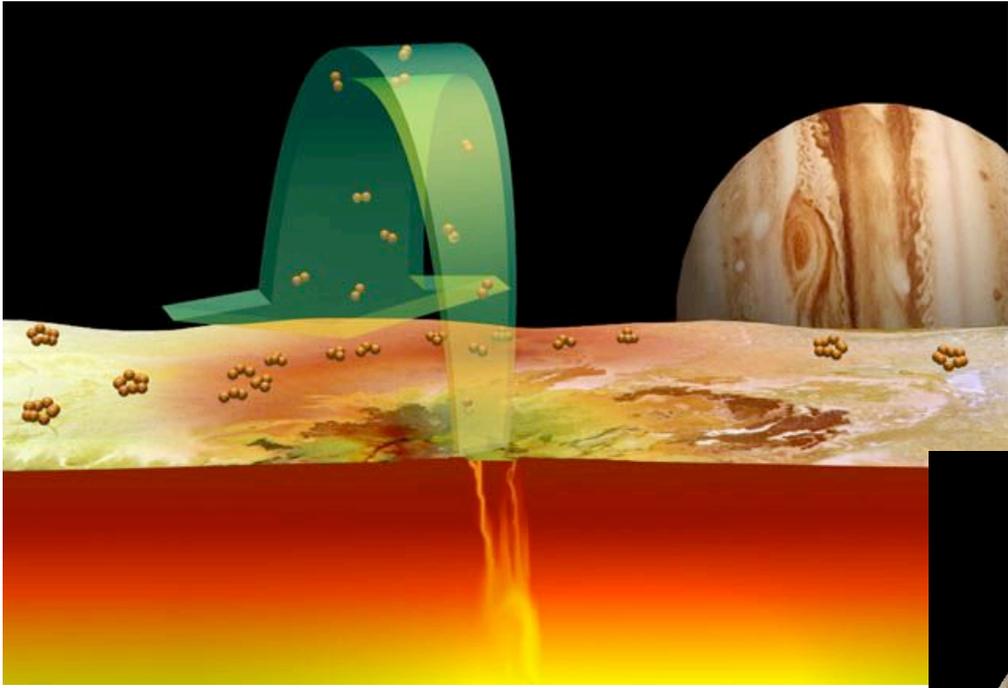
Io et Jupiter



Résonnance d'Io

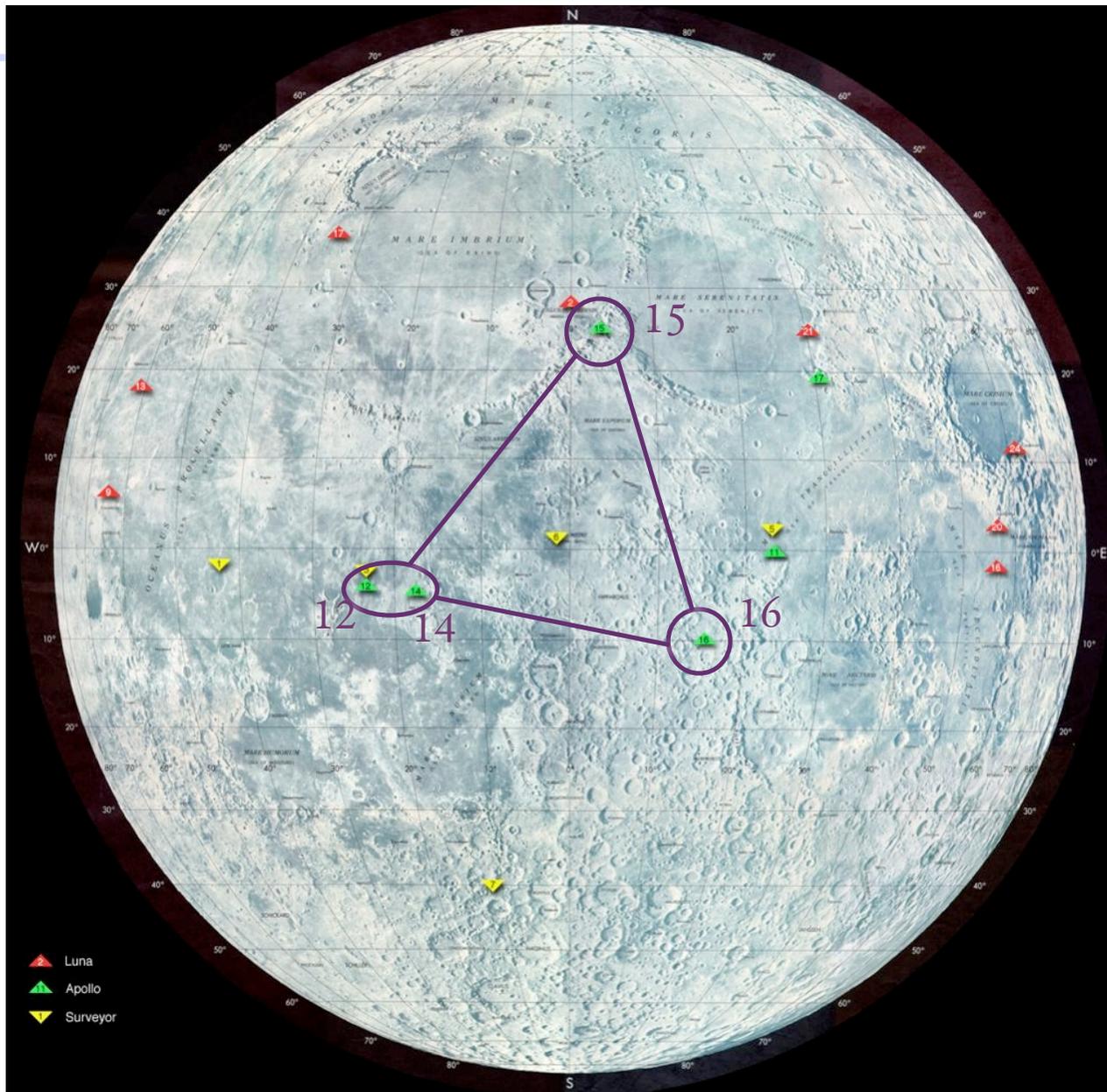






Séismes lunaires

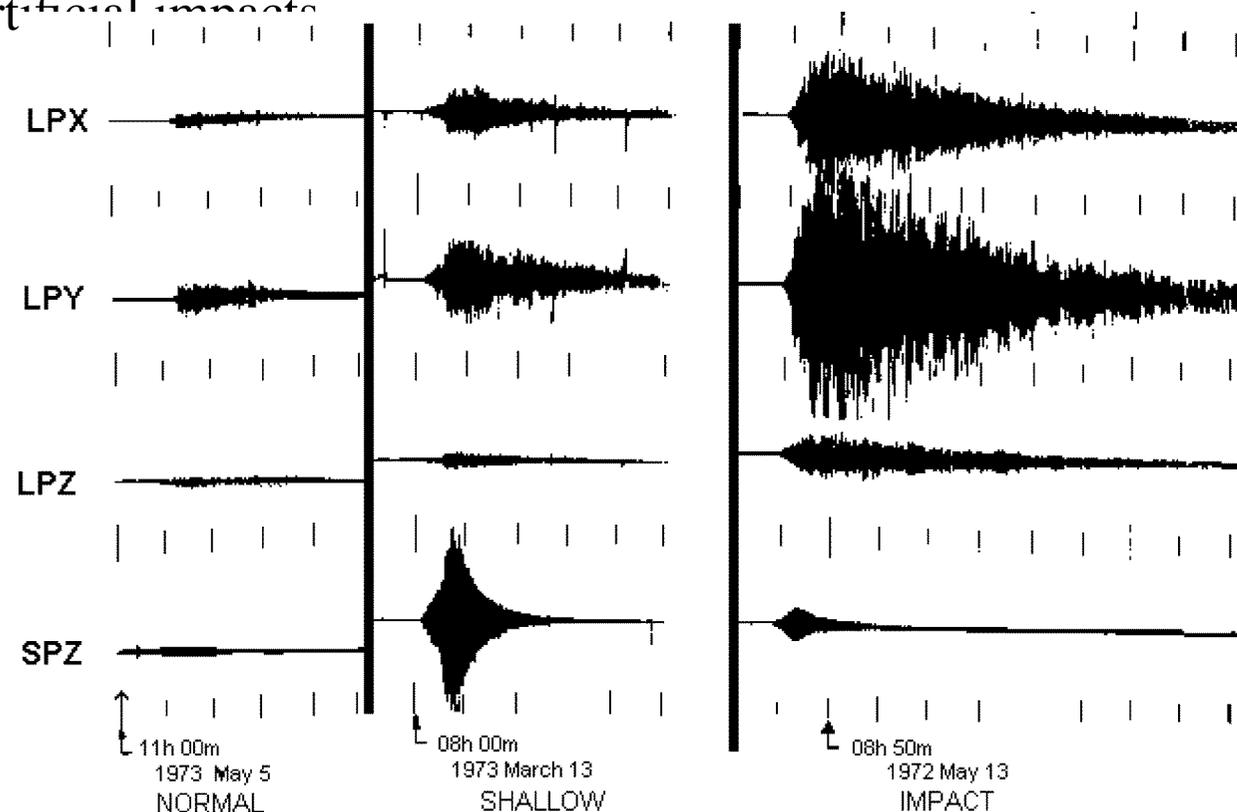
Apollo Seismic Network



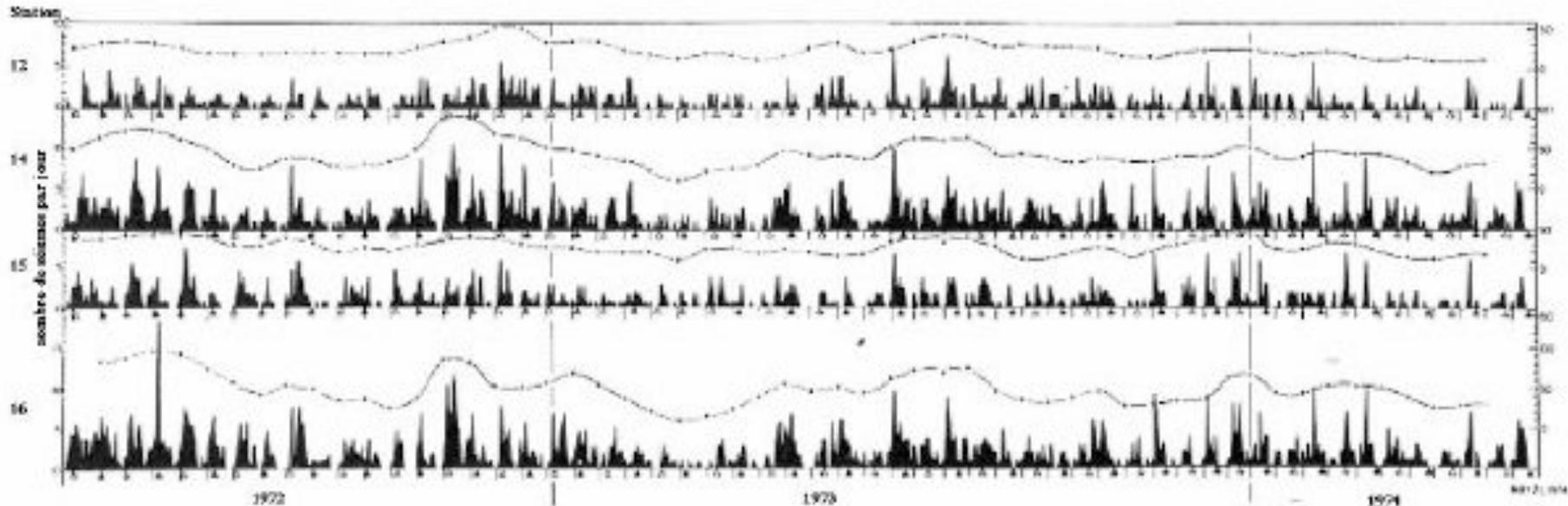
- 4 stations:
Apollo sites 12,
14, 15 and 16
- installed
between 1969
and 1972
- turned off in
1977

Moonquakes

- deep moonquakes
 - 700-1000 km depth, near just at the bottom of the elastic lithosphere of the Moon
 - Very small magnitudes quakes
 - Origin: accumulation of stress related to the thermoelastic cooling of the planet triggered by the Earth tide
 - Several faults identified where quakes occur repeatedly
- superficial moonquakes
- meteoroid & artificial impacts

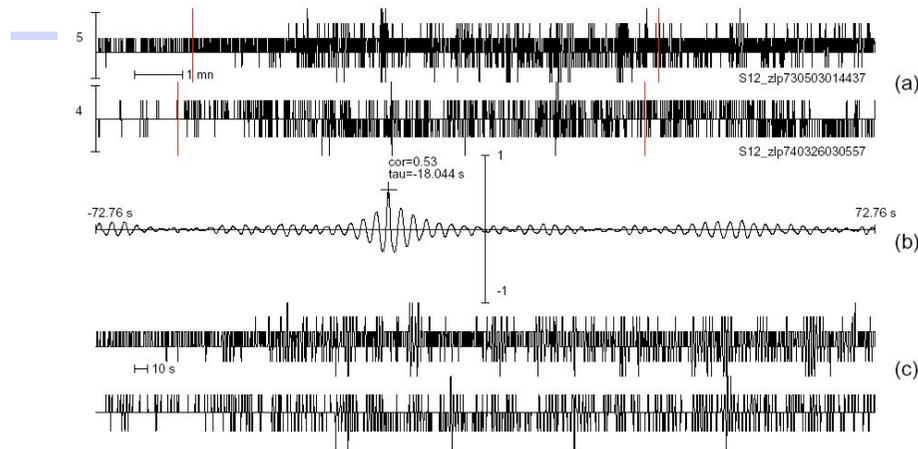


Deep moonquakes

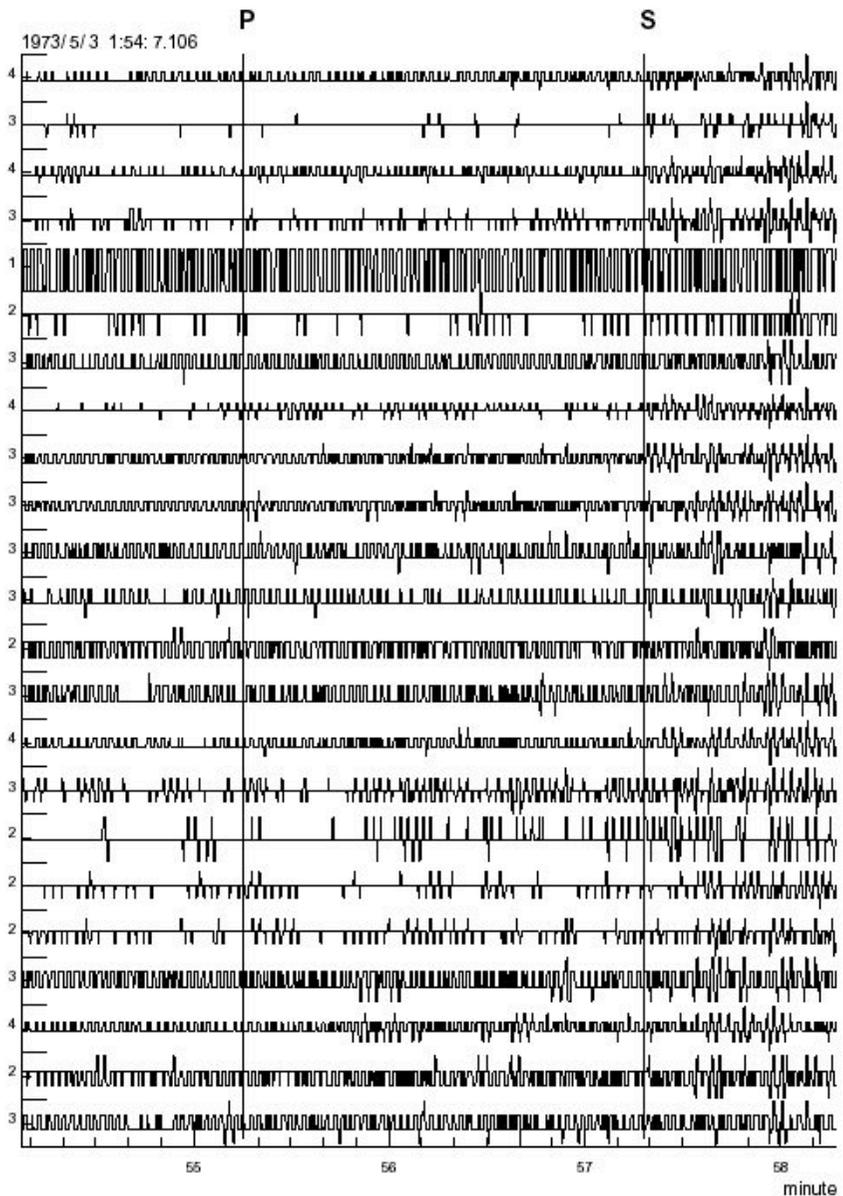


- Number and amplitude of quakes is related to the amplitude of tide
- About 50 active faults detected
- Quakes occur at the same fault regularly but with very low amplitudes, with ground displacement of a few Angströms at 2 sec ($0.5 \cdot 10^{-9} \text{ ms}^{-2}$ of ground acceleration)

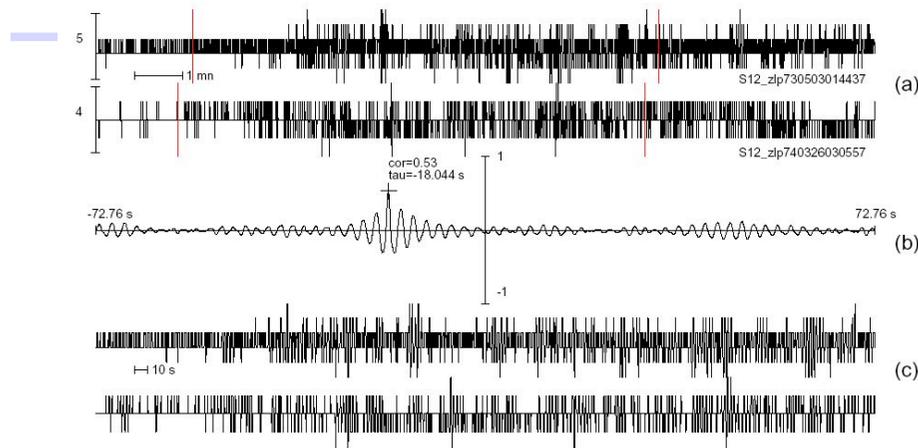
Deep Moonquake



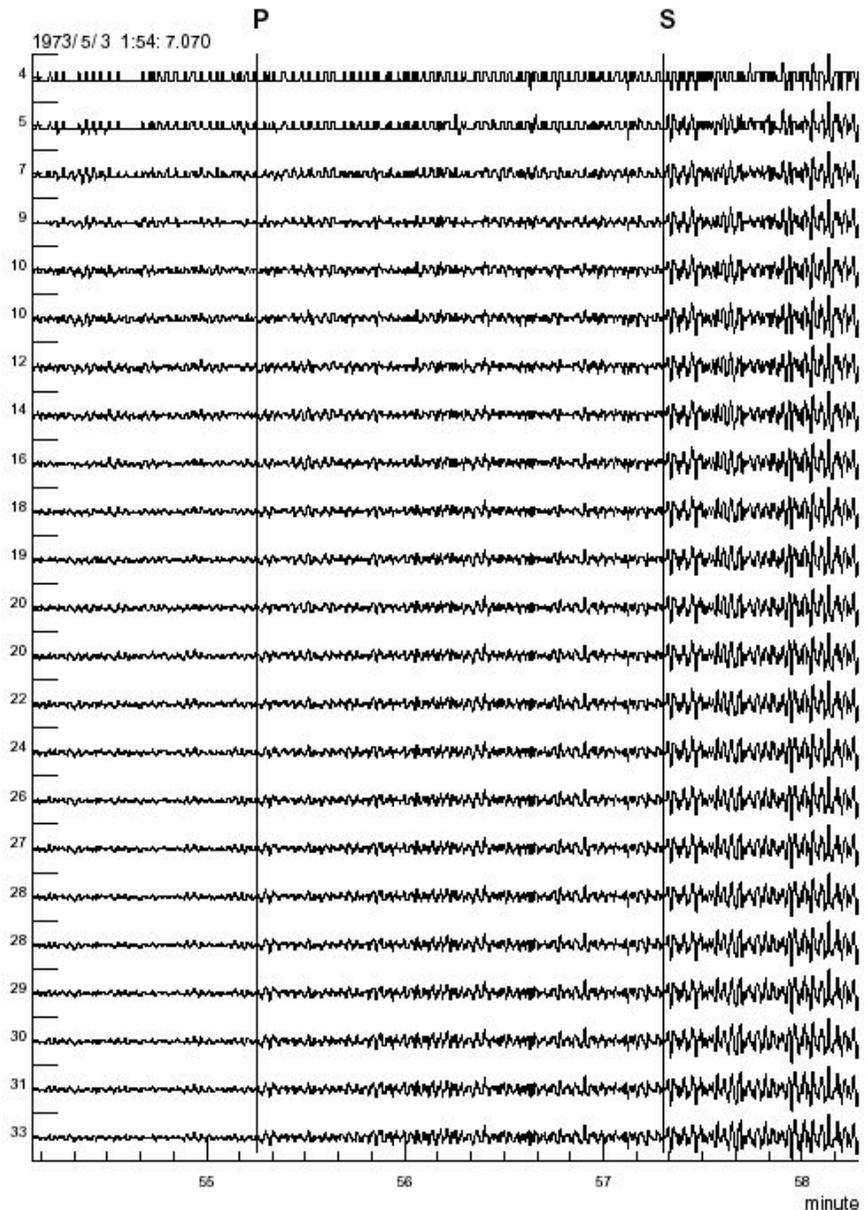
- example of two quakes from the same deep focus and their cross-correlation
- cross-correlation provides the time shift necessary to align the arrival times
- stacking can then be done



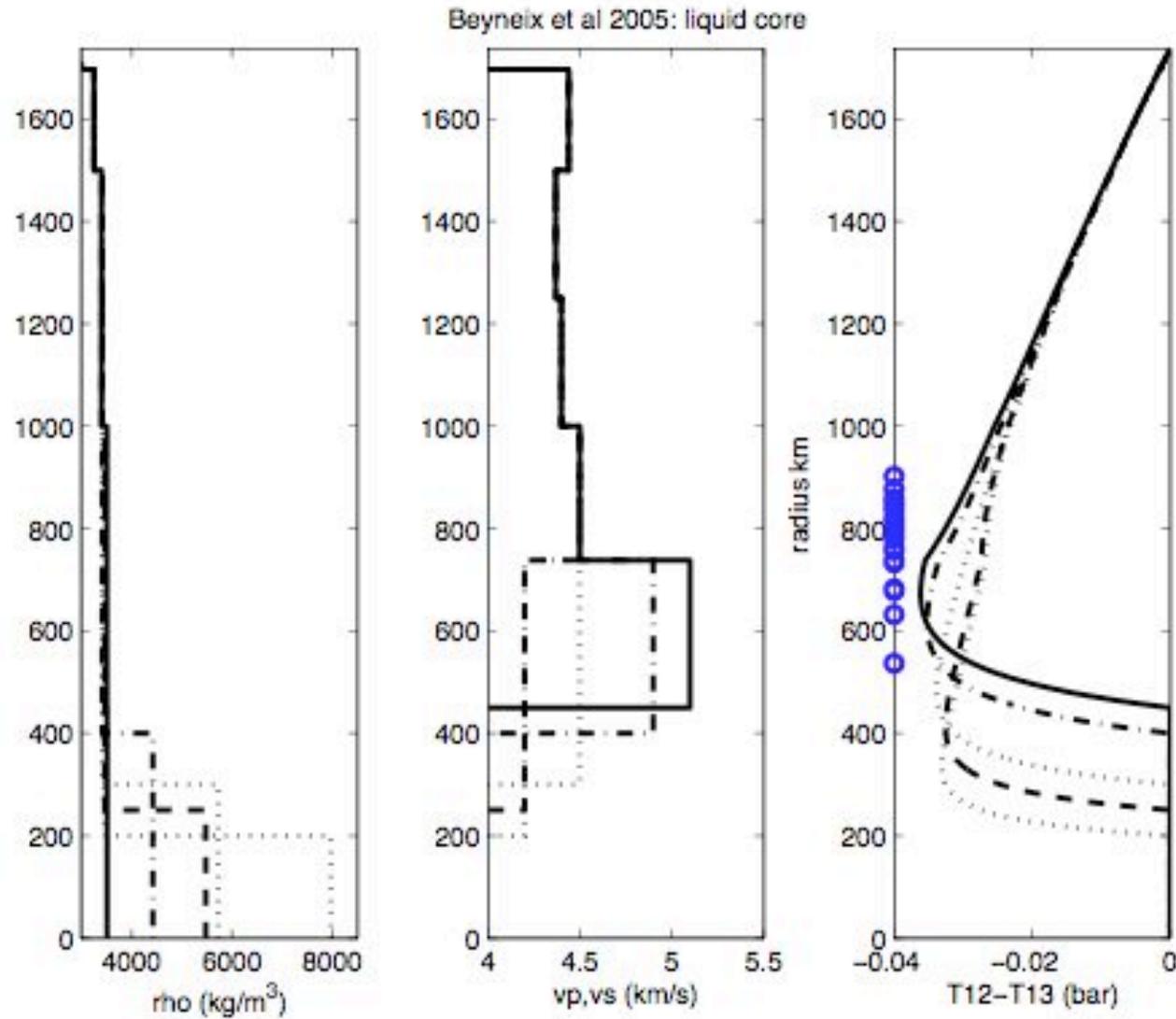
Deep Moonquake

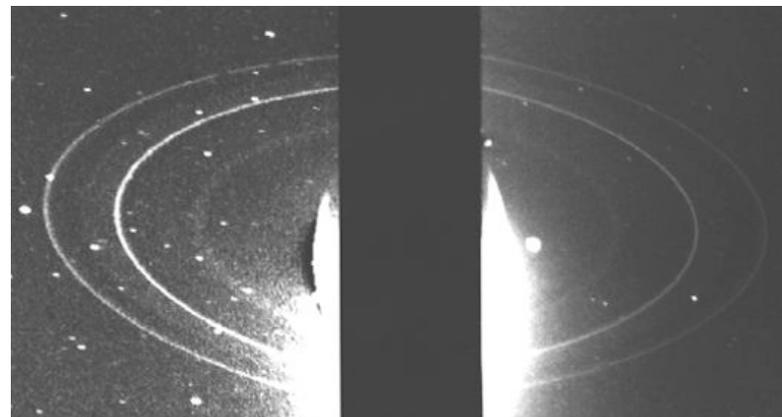
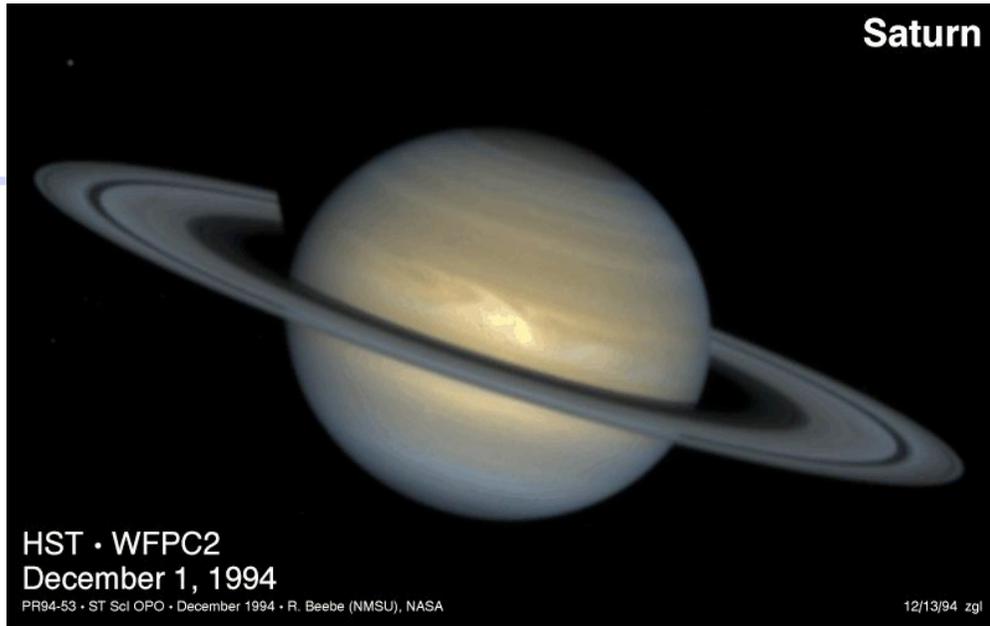


- example of two quakes from the same deep focus and their cross-correlation
- cross-correlation provides the time shift necessary to align the arrival times
- stacking can then be done

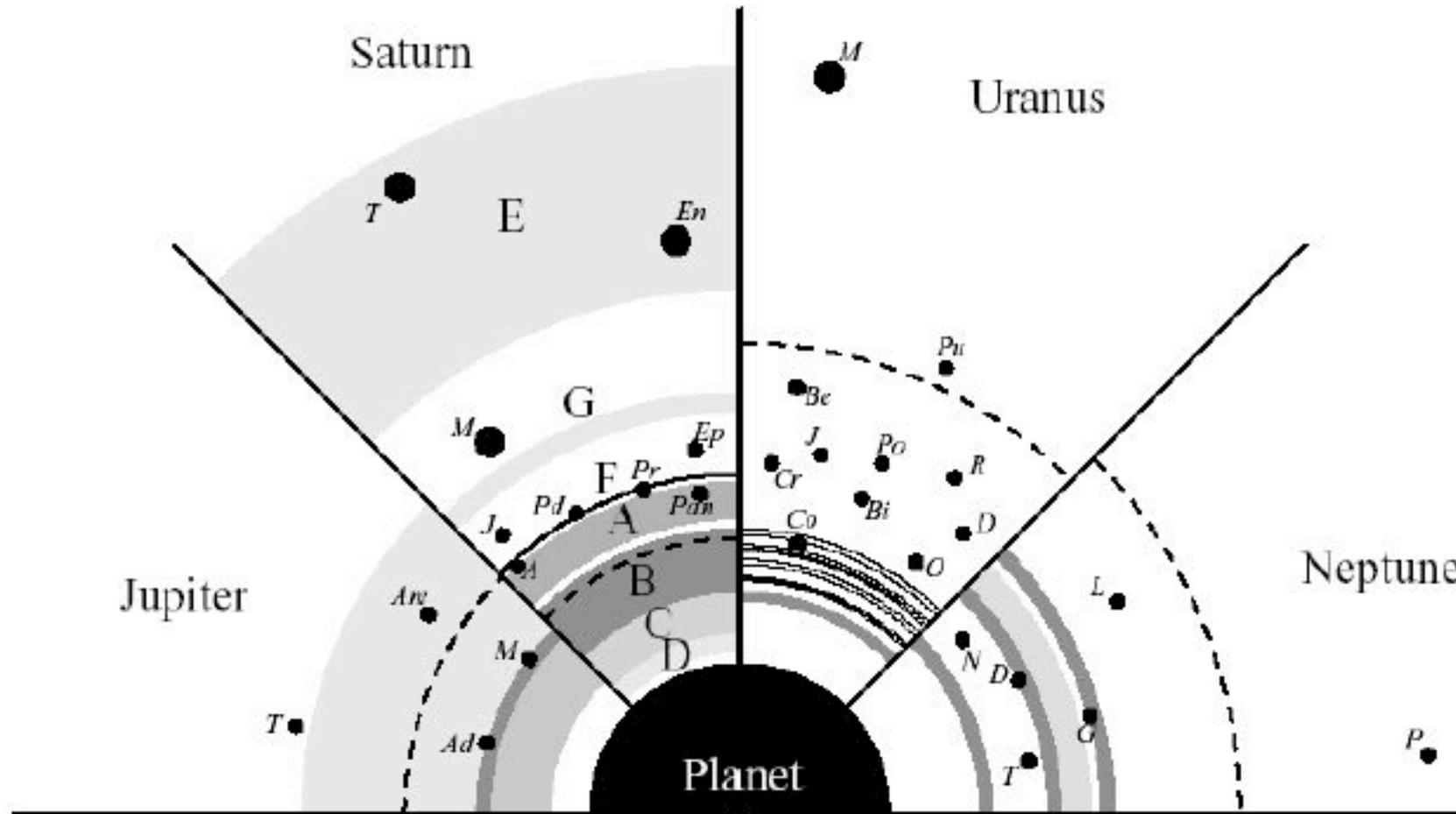


- Deep moonquakes and maximum of stress

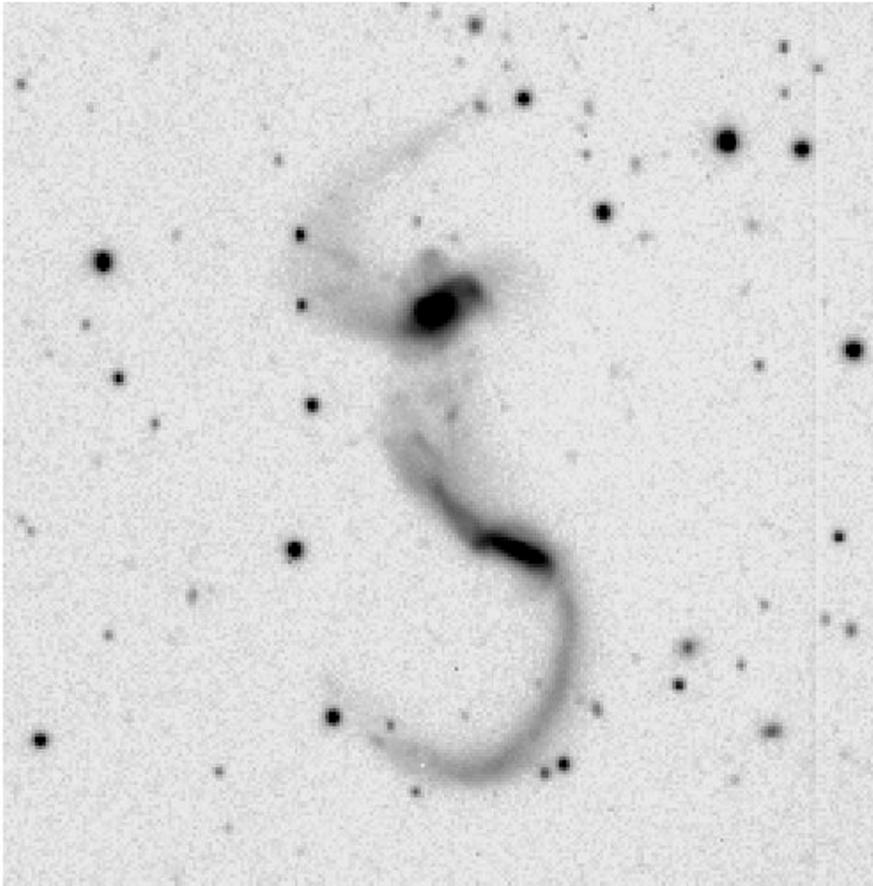




Anneaux et limite de Roche



Limite de Roche



Exemples de Galaxies
brisées par des effets de
Marées

Limite de Roche

- équilibre des forces

$$-\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\mathcal{G}m_p}{a^2} \right) R_s + n^2 R_s = \frac{\mathcal{G}m_s}{R_s^2}$$

$$\frac{3m_p}{m_s} = \left(\frac{a}{R_s} \right)^3$$

$$a_L(\text{spherical}) = \left(\frac{3m_p}{m_s} \right)^{1/3} R_s$$

Cas hydrostatique

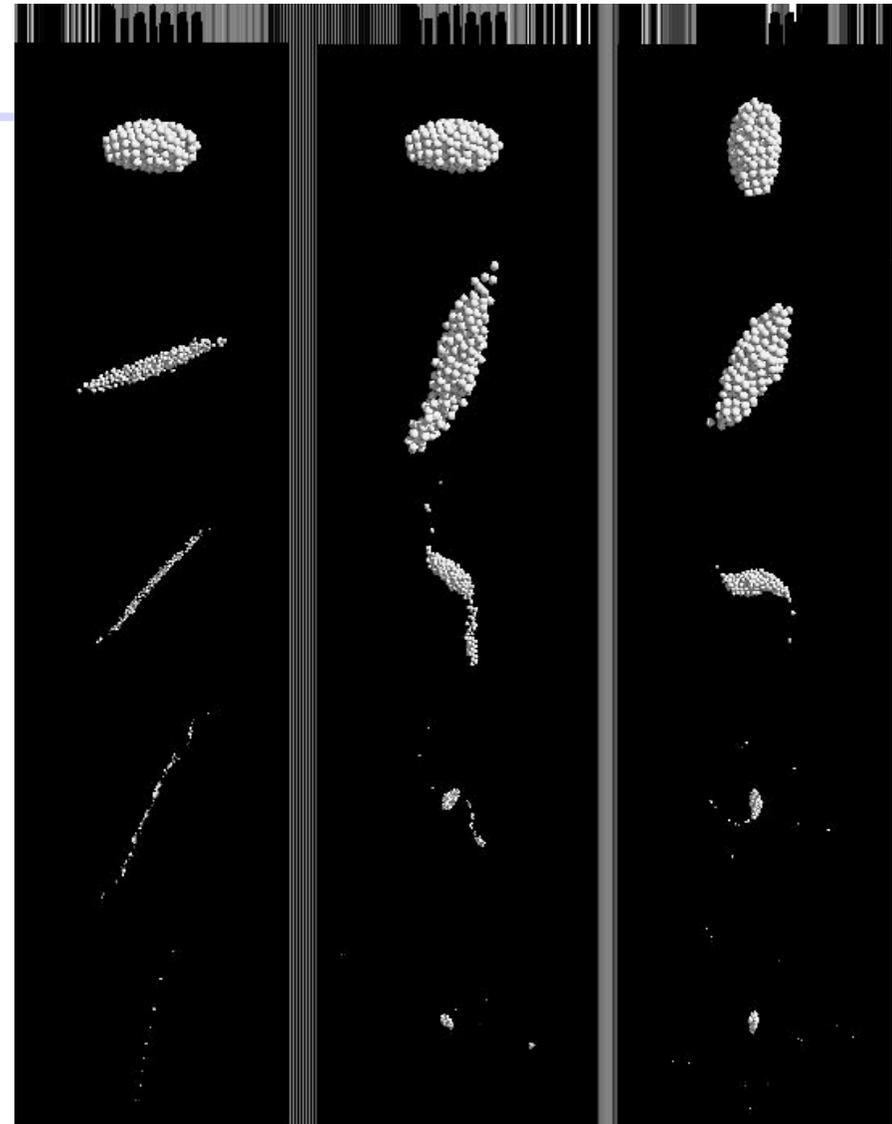
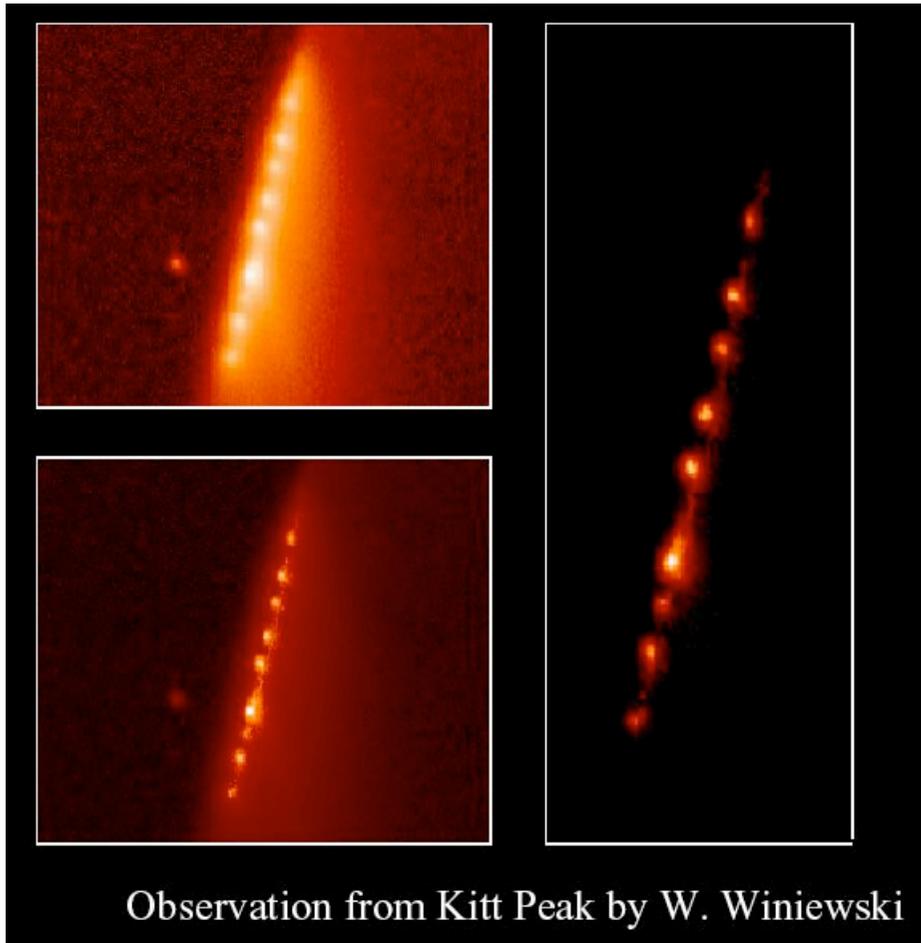
- On prend en compte la déformation de l'objet qui devient elliptique (calcul du potentiel de gravité d'un objet elliptique)

$$V_p - \frac{GM}{a - R_s} - \frac{1}{2} \omega^2 \left(\frac{M}{M+m} a - R_s \right)^2 = V_q - \frac{GM}{a} - \frac{1}{2} \omega^2 \left(\frac{M}{M+m} a \right)^2$$

- L'instabilité apparaît lorsque que de/dr devient infini

$$R = 2.42 R_s \left(\frac{m_p^*}{m_s} \right)^{1/3} = 2.42 R_p \left(\frac{\rho_p^*}{\rho_s} \right)^{1/3}$$

m^* est en première approximation la masse de la planète



Brisure par effet de Marée de la
comète
Shoemaker-Levy 9 après un
premier passage près de Jupiter