Licence STEP L2 Module Physique pour les géosciences S4

Mécanique des solides et des planètes

MS5: Exercices du 10 mars 2008

2008MS5E1 :

A l'équilibre, le moment de tous les poids par rapport au fléau de la balance est nul. Comptons positivement les moments des forces tendant à faire tourner dans le sens trigonométrique (vecteur perpendiculaire à la feuille pointant vers le lecteur) et négatif le sens opposé (vecteur perpendiculaire à la feuille pointant vers la page). La masse inconnue m (en kg) doit vérifier :

$$-0.5\mathrm{x}3+1\mathrm{x}2+2\mathrm{x}1+1\mathrm{x}1+m\mathrm{x}10\mathrm{x}2+1\mathrm{x}3=0, \quad (3)$$

soit:

$$m=325\mathrm{g} \quad (4)$$

Le moment des forces du bras gauche exerçant une action dans le sens trigonométrique est 4 Nm, et -1.5 Nm dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour le bras droit, le moment des forces exerçant une action dans le sens trigonométrique est 4 Nm, et -6.5 Nm dans le sens des aiguilles d'une montre.

2007MS5E2 :

Le moment cinétique σ_1 de la sphère en rotation avec une vitesse angulaire ω_1 autour d'un axe fixe (que nous supposerons passant par son centre) est $\sigma_1 = I_1\ \omega_1$ où I_1 est le moment d'inertie de la sphère par rapport à cet axe, soit $2/5MR^2$ où M est sa masse et R son rayon. La sphère s'aplatit en un disque de même rayon, donc de moment d'inertie $I_2=1/2MR^2$ par rapport au même axe. Pendant l'aplatissement, le moment cinétique est conservé puisqu'aucune force extérieure n'intervient. La vitesse angulaire de rotation après aplatissement doit donc vérifier $\sigma_1 = I_1\ \omega_1 = \sigma_2 = I_2\ \omega_2$ d'où $2/5MR^2\omega_1 = 1/2MR^2\omega_2$. On a donc $\omega_2=4/5\omega_1$. La vitesse angulaire diminue donc de 20 % après l'aplatissement de la sphère.

2007MS5E3 :

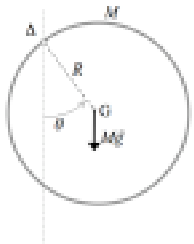
La période T des petites oscillations du pendule physique de masse M tournant librement autour d'un axe Δ situé à une distance d de son centre d'inertie est:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}, \quad (5)$$

où I_Δ est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe Δ.

Considérons un cerceau homogène de masse M et de rayon R pouvant tourner librement autour d'un axe perpendiculaire à son plan passant par sa circonférence. On connaît le moment d'inertie I_G de ce cerceau par rapport à un axe perpendiculaire à son plan passant par son centre, c'est $I_G=MR^2$. Le moment d'inertie I_Δ par rapport à l'axe Δ est donné par la règle de Steiner-Huygens:

$$I_\Delta = I_G + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2 \quad (6)$$

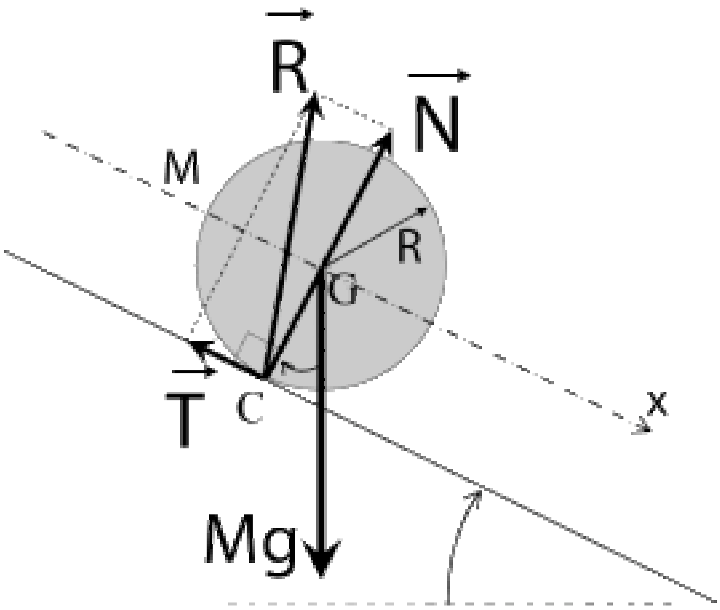


On a donc:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}. \qquad (7)$$

2007MS5E4 :

Considérons (ci-dessous) une sphère homogène, de masse M et de rayon R, qui roule sans glisser le long d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Dans cette hypothèse du roulement sans glissement, ce système ne possède qu'un seul degré de liberté. Soit x la coordonnée du centre d'inertie G le long d'un axe parallèle au plan incliné et orienté vers le bas. La vitesse instantanée de rotation ω autour du centre d'inertie est $\omega = \dot{x}/R$.



Cherchons les forces appliquées à notre sphère. Il y a d'abord son poids $M\overline{g}$. Il y a aussi la réaction $\overline{R}$ du plan que nous pouvons décomposer en une composante tangentielle $\overline{T}$ et une composante normale $\overline{N}$. Appliquons tout d'abord le théorème du moment cinétique. Si $\overline{a}$ est l'accélération du centre d'inertie, on a :

$$M\overline{a} = M\overline{g} + \overline{R}. \qquad (7)$$

Projetons cette relation sur l'axe Gx parallèle au plan incliné :

$$M\ddot{x} = Mg\sin(\theta) - T. \qquad (8)$$

Si on projette sur un axe perpendiculaire à Gx et au plan incliné :

$$0 = -Mg\cos(\theta) + N. \qquad (9)$$

Appliquons maintenant le théorème du moment cinétique par rapport au centre d'inertie G. Le moment de la force de réaction par rapport à G se limite à *RT*. Le moment du poids par rapport à G est nul. On a donc :

$$\frac{d}{dt}\sigma_\Delta = I_\Delta\dot{\omega} = I_\Delta\frac{\ddot{x}}{R} = \Gamma_\Delta = RT. \qquad (10)$$

Le moment d'inertie $I_?$ de la sphère homogène par rapport à tout axe passant par son centre est $I_\Delta=2/5MR^2$, ce qui fournit l'expression de la réaction tangentielle en fonction de l'accélération du centre d'inertie :

$$T = \frac{I_\Delta\ddot{x}}{R^2} = \frac{2}{5}M\ddot{x}. \qquad (11)$$

En injectant cette expression dans (10), on obtient :

$$M\ddot{x} = Mg\sin(\theta) - \frac{2}{5}M\ddot{x}, \qquad (12)$$

d'où :

$$\ddot{x} = \frac{5}{7}g\sin(\theta). \qquad (13)$$

On constate que la sphère ne se comporte pas comme un masse ponctuelle qui glisse sans frottement le long du plan incliné (*gsin(θ)*). Le roulement du cylindre a un effet : son accélération est 5/7 celle de la masse qui glisse sans frottement.

Pour que la condition de roulement sans glissement soit vérifiée, il faut que:

$$\frac{T}{N} \leq f_s, \qquad (14)$$

où f_s est le coefficient de friction statique de la sphère sur le plan.

On obtient *T* à partir de la relation (11) et *N* à partir de la relation (9). On obtient alors la condition :

$$\frac{2}{7}\tan(\theta) \leq f_s. \qquad (15)$$

Comment les choses seraient-elles changées si nous avions une balle de ping-pong, assimilable à une sphère creuse infiniment fine, au lieu d'une sphère homogène ? Le moment d'inertie I_Δ de la sphère creuse par rapport à tout axe passant par son centre est (voir exercice TD précédent) $I_\Delta=2/3MR^2$. On a alors :

$$T = \frac{I_\Delta\ddot{x}}{R^2} = \frac{2}{3}M\ddot{x}. \qquad (16)$$

En injectant cette expression dans (10), on obtient :

$$M\ddot{x} = Mg\sin(\theta) - \frac{2}{3}M\ddot{x}, \qquad (17)$$

d'où :

$$\ddot{x} = \frac{3}{5}g\sin(\theta). \qquad (18)$$

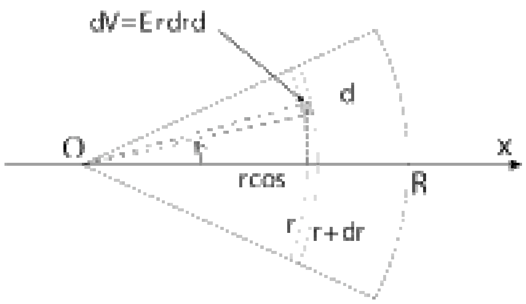
L'accélération de la balle de ping-pong sera donc inférieure à celle de la sphère creuse ! Quant à la condition de roulement sans glissement, elle s'écrit dans ce cas :

$$\frac{2}{5}\tan(\theta) \le f_s. \qquad (19)$$

Quand on augmente l'angle du plan incliné, la balle de ping-pong commencera à glisser avant la sphère.

2007MS5E1C :

Considérons un secteur homogène de rayon R et d'angle au sommet α :



Soit O le sommet du secteur et E son épaisseur. Son volume est donc $R^2E\alpha/2$ et la masse $M=\rho R^2E\alpha/2$, où ρ désigne la masse volumique. Par symétrie, le centre d'inertie G doit se placer dans le plan médian du secteur et sur la bissectrice Ox de l'angle au sommet. Sa position x_G est donnée par :

$$x_G = \frac{1}{M}\int x\rho dV. \qquad (24)$$

Utilisons des coordonnées polaires r, θ pour délimiter un petit élément de volume dV situé entre r et $r+dr$, θ et $\theta+d\theta$ (voir figure). On a $dV=Erdrd\theta$, d'où :

$$x_G = \frac{1}{M}\int_0^R \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} r\cos(\theta)\rho Er\,dr\,d\theta = \frac{\rho E}{M}\int_0^R r^2dr \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\cos(\theta)d\theta, \qquad (25)$$

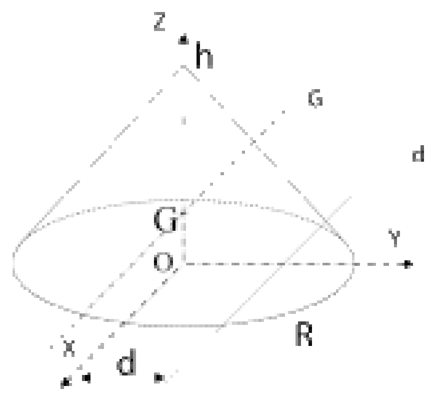
soit :

$$x_G = \frac{4}{3}\frac{R}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (26)$$

Pour $\alpha=\pi$, on obtient $x_G=4R/3\pi$; on retrouve bien le résultat obtenu lors d'un TD précédent (demi-disque homogène).

2007MS5E2C :

Considérons un cône droit homogène de masse M, de hauteur h et de base circulaire de rayon R:



Soit O le centre de la base et OXY le plan horizontal, l'axe OZ coïncide avec l'axe de symétrie de révolution du cône. Commençons par chercher le moment d'inertie du cône par rapport à un axe du plan de la base passant par le centre O, par exemple I_{XX}. Ce moment d'inertie peut s'exprimer comme la somme des moments d'inerties par rapport à deux plans perpendiculaires :

$$I_{XX} = I_{\Pi XY} + I_{\Pi XZ}. \qquad (27)$$

On peut facilement trouver l'expression de $I_{\Pi XZ}$. En effet, on connaît (voir exercice TD précédent) le moment d'inertie du cône par rapport à l'axe IZ. Or ce moment d'inertie lui aussi peut s'exprimer comme la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires :

$$I_{ZZ} = \frac{3}{10} MR^2 = I_{\Pi XZ} + I_{\Pi YZ}. \qquad (28)$$

Or, par symétrie, ces deux dernières quantités sont égales. On a donc :

$$I_{\Pi XZ} = \frac{3}{20} MR^2 = I_{\Pi YZ}. \qquad (29)$$

Il nous reste donc dans l'équation (27) à trouver l'expression du moment d'inertie $I_{\Pi XY}$ du cône par rapport au plan de sa base. Pour cela, on va découper le cône en petits disques élémentaires comme dans la figure suivante, situés entre Z et $Z+dZ$ et de rayon r. Le volume élémentaire est $dV=\pi r^2 dZ$. Mais on a une relation entre r et Z: $r=(h-Z)R/h$. On a donc :

$$I_{\Pi XY} = \int Z^2\, dm = \int_0^h \rho\pi \left(\frac{(h-Z)R}{h} \right)^2 Z^2 dZ, \qquad (30)$$

où $\rho=3M/\pi R^2 h$ désigne la masse volumique du cône.
On obtient donc :

$$I_{\Pi XY} = \frac{1}{10} Mh^2. \qquad (31)$$

En injectant (31) et (29) dans (27), on obtient :

$$I_{XX} = \frac{1}{10} Mh^2 + \frac{3}{20} MR^2. \qquad (32)$$

Nous pouvons maintenant considérer le moment d'inertie $I_{\Delta d}$ par rapport à un axe Δ_d quelconque du plan de la base. Soit d la distance entreΔ_d et l'axe parallèle passant par O, par exemple OX dans la première figure. Soit $I_{\Delta G}$ le moment d'inertie du cône par rapport à l'axe parallèle à OX et Δ_d passant par G. La règle de Steiner-Huygens dit que :

$$I_{XX} = I_{\Delta G} + M(OG)^2, \qquad (33)$$

et aussi :

$$I_{\Delta d} = I_{\Delta G} + M(OG^2 + d^2). \qquad (34)$$

Faisons la différence de ces deux relations et nous obtenons :

$$I_{\Delta d} = I_{XX} + Md^2. \tag{35}$$

Le moment d'inertie du cône par rapport à un axe quelconque du plan de sa base est donc:

$$I_{\Delta d} = \frac{1}{10}Mh^2 + \frac{3}{20}MR^2 + Md^2. \tag{36}$$