L2 - Physique pour les Sciences de l'univers
TD N°2

1er février 2007

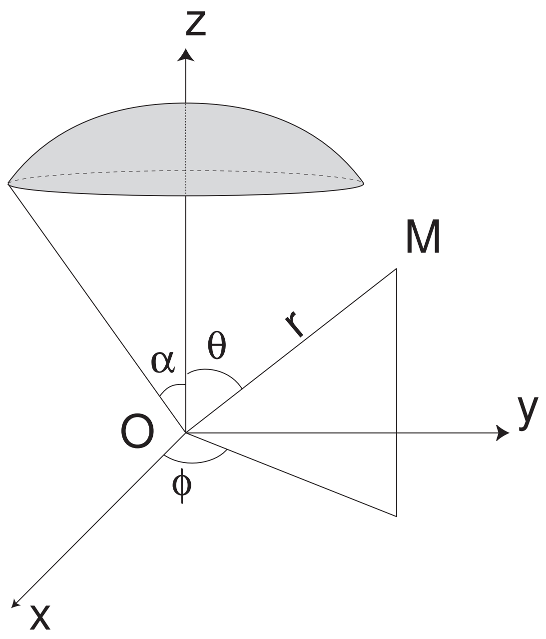
Exercice 1 : Champs et potentiels

Tout point $M(x, y, z)$ de l'espace est défini par sa position par rapport à un point fixe arbitraire O : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$. On note la distance au point O : $OM = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Chaque question est indépendante.

1) Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r})$. Calculer le divergent de ce champ si $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}) = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r}$, $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}) = f(r)\,\overrightarrow{r}$. Ces champs dérivent-ils d'un potentiel ? Si oui lequel ?
2) On considère le champ scalaire $f(M) = \dfrac{\ln r}{r}$. Déterminer le champ vectoriel $\overrightarrow{u}(M)$ dérivé de ce potentiel.
3) Soit un champ vectoriel qui à un point de l'espace $M(x, y, z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u} = (xz, y, \phi(z))$. Déterminer ϕ pour que div $\overrightarrow{u} = z$.
4) Soit un champ scalaire $f(M) = xy + yz + xz$. On se place au point $A = (1, 1, 1)$: dans quelle direction la variation du champ est-elle la plus rapide ? Et au point $B = (1, 2, 3)$?

Exercice 2 : Flux à travers une surface

1) Calculer la valeur du flux du champ (non conservatif ! rappeler pourquoi) vectoriel $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ à travers la surface d'un cylindre défini par $x^2 + y^2 = R^2$ et $0 \leq z \leq h$.
2) On se donne maintenant un potentiel $V(r, \theta, \phi) = \dfrac{k}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$, et on s'intéresse au champ dérivé $\overrightarrow{E}$. Calculer les composantes sphériques de ce champ. Est-il conservatif ?
3) Calculer le flux de ce champ à travers une calotte sphérique centrée à l'origine O de rayon R et de demi-angle au centre α.



Exercice 3 : Champ dipolaire

On commence par se placer dans un repère local polaire (cylindrique en 2-D, sans axe vertical) (ρ, ϕ) et on considère le champ de vecteurs défini par $E_\rho = \dfrac{2k\cos\phi}{\rho^3}$ et $E_\phi = \dfrac{k\sin\phi}{\rho^3}$.

1) Déterminer l'équation des lignes de champ en coordonnées polaires, et faire un dessin.
2) Déterminer le potentiel $U(\rho, \phi)$ dont dérive ce champ.
3) Exprimer U en coordonnées cartésiennes, et en déduire les composantes cartésiennes de $\overrightarrow{E}$.

On se place maintenant en 3-D en coordonnées sphériques. Le champ $\overrightarrow{E}$ a pour composantes :

$$E_\rho = \frac{2k\cos\theta}{\rho^3}, \quad E_\phi = 0, \quad E_\theta = \frac{k\sin\theta}{\rho^3}.$$

4) Calculer le flux de ce champ à travers la surface d'une sphère de rayon R centrée à l'origine.
5) Maintenant ce champ est en réalité celui d'un dipôle constitué d'une charge positive q et d'une charge négative $-q$ placées symétriquement par rapport à O et éloignées de $d \ll R$: retrouver simplement la même valeur de flux.