L2 - Physique pour les sciences de l'univers
Corrigé et commentaires sur le TD N°2

Jeudi 23 février 2006

Il est toujours possible qu'il y ait des erreurs ou des coquilles : si vous ne comprenez pas quelque chose n'hésitez pas à demander ! !

Exercice 1 : Calculs de base

5) Soit un champ vectoriel qui à un point de l'espace $M(x,y,z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u} = (xz, y, \phi(z))$. Déterminer ϕ pour que div $\overrightarrow{u} = z$.

On calcule le div : $\text{div}\overrightarrow{u} = z + 1 + \phi'(z)$, en cartésien, ce qui parait le plus intuitif ici vu la forme du potentiel... On impose la condition div $= z$. Donc on a : $z = z + 1 + \phi'(z) \quad \rightarrow \phi'(z) = -1$. Ce qui donne une fonction ϕ de la forme : $\phi(z) = -z+$ constante.

6) Soit un champ scalaire $f(M) = xy + yz + xz$. On se place au point $A = (1,1,1)$: dans quelle direction la variation du champ est-elle la plus rapide ? Et au point $B = (1,2,3)$?

$f(M) = xy + yz + zx$. On sait que les variations du champ suivent les gradients (le gradient va dans le sens de la variation, en pointant vers les valeurs les plus fortes ; il est donc perpendiculaire aux lignes de niveau, qui elles, indiquent les lignes où le champ est constant). On va donc calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f$ aux points considérés, et regarder vers quelle direction il pointe, cela donnera la direction dans laquelle la variation du champ est la plus importante.

$\overrightarrow{\text{grad}} f = (y + z, x + z, x + y)$ (on est ici en coordonnées cartésiennes bien sûr). Au point $A(1,1,1)$ il vaut (2,2,2), donc il vaut $2\,\overrightarrow{OA}$, on peut dire qu'il pointe dans la direction radiale. Au point $B(1,2,3)$, il vaut (5,4,3), il pointe dans la direction $5\hat{x} + 4\hat{y} + 3\hat{z}$ (on ne peut pas dire grand chose de plus).

Exercice 2 : Produit vectoriel

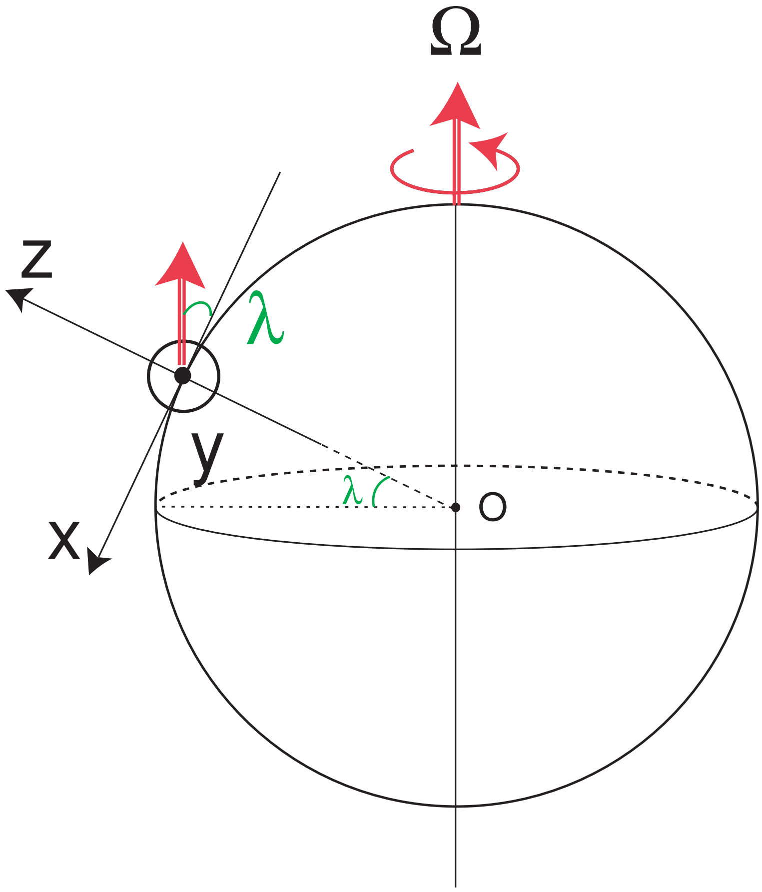
Rappel sur la force de Coriolis : un objet qui se déplace à une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un référentiel en rotation $\overrightarrow{\Omega}$ "ressent" une force de Coriolis $\overrightarrow{F_c} = 2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$.
On considère ici un point immobile à la surface de la Terre à une latitude λ.

1) Dans le repère cartésien associé à ce point, les axes (Ox), (Oy) représentent les directions Nord-Sud et Ouest-Est respectivement et (Oz) est l'axe vertical perpendiculaire à la surface. Comment exprime-t-on $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur de rotation de la Terre dans ce repère ? Quelle est sa norme ?

On choisit ici de se placer dans un repère cartésien associé au point posé à la surface de la Terre. L'axe (Ox) indique le Sud, l'axe (Oy) indique l'Est, l'axe (Oz) pointe vers la verticale (droit vers le ciel). On note λ la latitude (0 à l'équateur, 90 au pôle). Si vous voulez choisir un autre référentiel , cela ne pose pas de problème du moment qu'on retombe sur le même résultat...

Comment s'écrit $\overrightarrow{\Omega}$ dans ce repère ? Premièrement il est dans le plan de x et de z (pas de composante Est-Ouest) et ensuite, il dépend de l'angle λ. En faisant un dessin, et en essayant de retrouver les bons angles aux bons endroits, par de simples considérations de géométrie, on doit pouvoir trouver que : $\overrightarrow{\Omega} = (-\Omega\cos\lambda, 0, \Omega\sin\lambda)$.

Norme de $\overrightarrow{\Omega}$? $\Omega = 2\pi/T$ oû T est la période de rotation de la Terre, soit 1 jour. Attention aux unités : $T = 24\times3600$ secondes, donc $\Omega = 2\pi/86\,400 = 7.3\,10^{-5}$ rad/s.



2) Le point se déplace alors à une vitesse $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, 0)$. Déterminer l'accélération de Coriolis ressentie.

La vitesse s'écrit $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, 0)$ (pas de composante verticale, puisqu'on se déplace dans le plan de x et y). On applique la formule pour l'accélération de Coriolis qu'on notera γ_C.

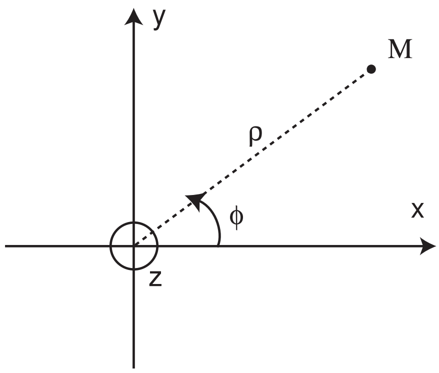
$$\gamma_C = 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v} = (-2\,\Omega\,v_y\sin\lambda, 2\,\Omega\,v_x\sin\lambda, -2\,\Omega\,v_y\cos\lambda).$$

3) Application numérique : $\lambda = 45°$, $v_x = 360$ km/h, $v_y = 0$. Comparer les valeurs de l'accélération de Coriolis et de l'accélération de la pesanteur g. Commenter ?

$\overrightarrow{v} = (v, 0, 0)$ et $v = 360$ km/h $= 100$ m/s (encore une fois , attention aux unités !)
$\overrightarrow{\gamma_C} = 2\,\Omega\,v\sin\lambda\,\overrightarrow{e_y}$. Ce qui donne $\gamma_C = 7.3\,10^{-3}$ m/s^2 $\simeq 10^{-2}$ m/s^2.
Pour comparer avec g, l'accélération de la pesanteur, il suffit de dire que γ_C vaut environ un millième de g, donc l'effet de cette force est négligeable, pour des vitesses de l'ordre de 100 km/h du moins, par rapport à l'effet de la gravité.

Exercice 4 : Quelques indications

On commence par se placer dans un repère local polaire (ρ, ϕ) : cylindrique mais en 2-D, c'est-à-dire sans déplacement dans l'axe vertical z, et on considère le champ de vecteurs défini par $E_\rho = \dfrac{2k\cos\phi}{\rho^3}$ et $E_\phi = \dfrac{k\sin\phi}{\rho^3}$.
1) Déterminer l'équation des lignes de champ en coordonnées polaires, et faire un dessin.



Pour cette question, dites-vous qu'on est en 2-D, donc le champ (et les lignes de champ) sont aussi dans le plan. Etudier les lignes de champ, c'est chercher les lignes qui sont parallèles au champ. On regarde donc les petits déplacements $\vec{dl}$ qui sont , point par point, parallèle à $\vec{E}$. Pour cela par exemple, on se dit que le produit vectoriel de $\vec{E}$ et de $\vec{dl}$ doit être nul. Comme le produit vectoriel de 2 vecteurs est orthogonal à ces 2 vecteurs, il est forcément dans la troisième direction, orthogonale au plan ; donc il reste "juste" a vérifier que cette troisième composante (le z des coordonnées cylindriques) est nulle. Cela donne une équation en $d\rho$ et $d\phi$, qu'on résout et on en déduit l'allure des lignes de champ (tracez-en qques unes, éventuellement avec une calculatrice ou matlab).

2) Déterminer le potentiel $U(\rho, \phi)$ dont dérive ce champ.

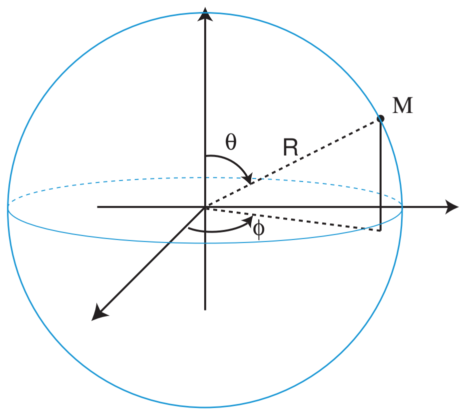
Même méthode que celles qu'on a vues précedemment en TD...

3) Exprimer U en coordonnées cartésiennes, et en déduire les composantes cartésiennes de $\vec{E}$.

Après avoir fait ces calculs, pensez-vous qu'il est plus simple d'utiliser les coordonnées cartésiennes dans ce cas-ci, ou les polaires ?

On se place maintenant en 3-D en coordonnées sphériques. Le champ $\vec{E}$ a pour composantes $E_\rho = \dfrac{2k\cos\theta}{\rho^3}$, $E_\phi = 0$, $E_\theta = \dfrac{k\sin\theta}{\rho^3}$.

4) Calculer le flux de ce champ à travers la surface d'une sphère de rayon R centrée à l'origine.



5) Maintenant ce champ est en réalité celui d'un dipôle constitué d'une charge positive q et d'une charge négative $-q$ placées symétriquement par rapport à O et éloignées de $d \ll R$: Pouvez-vous retrouver simplement la même valeur de flux ? faire le lien avec le potentiel engendré par de telles charges ?