

MASTER STEP Institut de Physique du Globe de Paris
Géophysique de l'Environnement

GE2008 TD3

Corrigé des exercices pour le 29 avril 2008

E1:

Utilisons la deuxième formule de Cagniard:

$$\rho = \frac{1}{5} T \left(\frac{E}{B} \right)^2, \quad (1)$$

où ρ est la résistivité en $\Omega \cdot m$, T est la période en secondes, E l'amplitude de la variation du champ électrique en mV/km et B l'amplitude de la variation du champ magnétique en nT. On a donc ici:

$$\rho = \frac{1}{5} T \left(\frac{E}{B} \right)^2 = \frac{1}{5} \times 300 \times \left(\frac{0.5}{50 \times 10^{-3}} \right)^2 = 60 \Omega \cdot m. \quad (2)$$

La longueur de pénétration est alors donnée par la première formule de Cagniard:

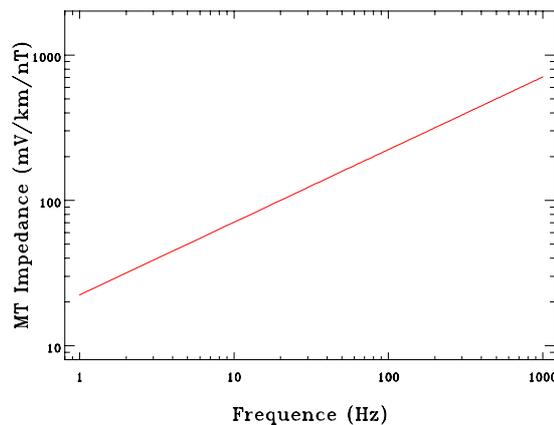
$$\lambda = 500 \sqrt{\rho T} = 500 \sqrt{60 \times 300} = 67 \text{ km}. \quad (3)$$

E2:

L'impédance en $mV \cdot km^{-1} \cdot nT^{-1}$ est donnée par la deuxième formule de Cagniard:

$$Z = \left| \frac{E}{B} \right| = \sqrt{5} \sqrt{\frac{\rho}{T}} = \sqrt{5 \rho f}, \quad (1)$$

où ρ est la résistivité en $\Omega \cdot m$ et f la fréquence. La gamme de fréquence de l'audio-magnéto-tellurique est du Hz au kHz. On peut donc prédire le comportement donnée par la courbe si dessous:



E3:

En utilisant la première formule de Cagniard, on obtient une longueur de pénétration de:

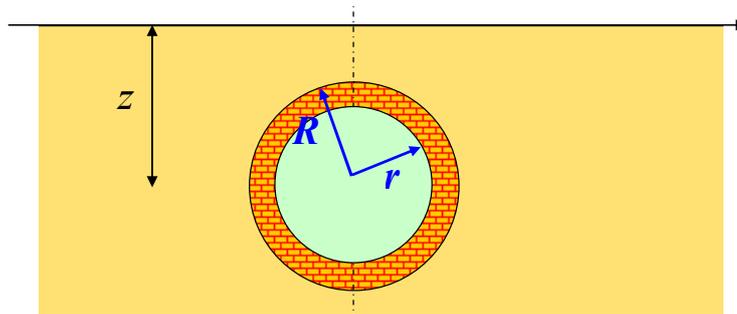
$$\lambda = 500\sqrt{\rho T} = 500\sqrt{\frac{100}{800 \times 10^6}} = 20 \text{ cm.} \quad (1)$$

Avec la formule de propagation de l'onde géoradar, on trouve une pénétration de:

$$\delta_{GPR} = 2\rho\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = 200 \times \sqrt{\frac{5 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}{4\pi \times 10^{-7}}} = 1 \text{ m.} \quad (2)$$

On voit que le géoradar 800 MHz est parfaitement inutile dans ce milieu conducteur pour détecter une interface à 4 m de profondeur.

E4:



Le tunnel du dictateur est proche de la surface et donc facile à détecter par microgravimétrie. Par contre, il peut ranger son or de telle façon que l'anomalie positive due à l'or compense l'anomalie négative due au tunnel. Pour cela, il peut par exemple empiler les lingos d'or sur une couronne cylindrique tout autour du tunnel de rayon intérieur r et extérieur R . L'or est caractérisé par un contraste de masse volumique $\Delta\rho_{Au} = 19\,300 - 2\,500 = 16\,800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ tandis que la cavité est caractérisée par un contraste de masse volumique $\Delta\rho_0 = -2\,500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. On peut montrer, en suivant le même raisonnement que pour le cylindre homogène, que l'anomalie due à une couronne cylindrique est égale à l'anomalie d'un déficit linéique de masse concentré sur l'axe du cylindre.

Pour que les anomalies du trou et de l'or se compensent, conformément à l'équation (4.9), il faut et il suffit que:

$$\Delta\rho_{Au}(R^2 - r^2) + \Delta\rho_0 r^2 = 0, \quad (1)$$

soit:

$$r = R \sqrt{\frac{\Delta\rho_{Au}}{\Delta\rho_{Au} - \Delta\rho_0}}. \quad (2)$$

Pour un tunnel de 1 m de rayon, il faudra le remplir d'or jusqu'à un rayon intérieur $r = \sqrt{\frac{16800}{19300}} = 0.93 \text{ m}$, ce qui ne laisse que 7 cm pour les lingos. Il vaudrait mieux envisager un tunnel de 2 m de rayon.

Si le dictateur veut protéger son trésor d'une prospection électromagnétique, il peut aussi enterrer au voisinage de la surface des grillages ou des fils tirés aléatoirement, ce qui empêchera tout sondage VLF ou géoradar.

E5:

Commençons par estimer la résistivité électrique de cette aquifère. La résistivité de l'eau de mer est $0.3 \text{ }\Omega\cdot\text{m}$. Prenons une porosité typique de 20 % pour le sable, le facteur de

formation est alors $1/0.2^2=25$. La résistivité de la roche saturée est donc approximativement $7.5 \Omega\cdot\text{m}$. La longueur de pénétration de l'onde VLF, de fréquence approximative $f=20 \text{ kHz}$, est donnée par la première formule de Cagniard:

$$\lambda = 500 \sqrt{\frac{\rho}{f}} = 500 \sqrt{\frac{7.5}{20 \times 10^3}} = 9.6 \text{ m.} \quad (1)$$

E6:

On peut estimer la hauteur de la nappe à partir de la valeur de la conductivité hydraulique, en prenant une valeur d'infiltration moyenne, comme 16 mm par an pour une zone de montagne. On obtient:

$$h = \sqrt{\frac{a}{K} \frac{L}{2}} = \sqrt{\frac{16 \times 10^{-3}}{3 \times 10^7 \times 10^{-6}}} \times 10^3 = 23 \text{ m.} \quad (1)$$

La nappe phréatique est donc largement à plus de 250 m de profondeur du chalet du personnage. C'est beaucoup trop profond pour être atteint par VLF ou tomographie de résistivité électrique. Un forage aussi profond coûterait de toute façon très cher.

Il est préférable de laisser tomber l'idée de forage au chalet ainsi que les prospections géophysiques, et envisager de ramener l'eau par pompage depuis la source.

E7:

On considère habituellement que la résolution attendue en mode propagatif est le quart de la longueur d'onde.

La longueur d'onde du radar de fréquence f dans un milieu de perméabilité magnétique relative μ_r et de permittivité relative ε_r est :

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r} f}, \quad (1)$$

où c est la vitesse de la lumière. La résolution du radar 50 MHz est donc :

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{30}} \frac{1}{50 \times 10^6} = 27 \text{ cm.} \quad (2)$$

Pour le radar 800 MHz, on obtient :

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{30}} \frac{1}{800 \times 10^6} = 1.7 \text{ cm.} \quad (3)$$

E8:

Pour les ondes électromagnétiques basse fréquence, on utilise la formule de Cagniard:

$$\lambda = 500 \sqrt{\frac{\rho}{f}} = 500 \sqrt{\frac{500}{f}}, \quad (1)$$

et on obtient:

- EM31 (9.8 kHz): $\lambda \approx 113 \text{ m.}$
- EM34 (0.4 kHz à 6.4 kHz): $\lambda \approx 560 \text{ à } 140 \text{ m.}$
- VLF (20 kHz): $\lambda \approx 79 \text{ m.}$
- RMT (20 kHz à 300 kHz): $\lambda \approx 79 \text{ à } 20 \text{ m.}$

Dans le cas du géoradar (50 MHz ici mais la fréquence importe peu), on applique la formule empirique:

$$\delta_{GPR} \cong \frac{\rho}{190} \sqrt{\varepsilon_r} , \quad (2)$$

et on obtient: $\delta_{GPR} \cong 14 \text{ m}$.

E9:

La constante diélectrique ε_r de la roche s'exprime en fonction de la porosité de la saturation de la façon suivante:

$$\sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{\varepsilon_m} (1 - \phi) + \sqrt{\varepsilon_w} \phi S_w + \phi (1 - S_w), \quad (1)$$

où ϕ est la porosité, ε_m est la constante diélectrique moyenne de la matrice minérale et ε_w est la permittivité électrique de l'eau (~ 80). Pour la roche sèche, on a donc:

$$\sqrt{\varepsilon_{\text{sec}}} = \sqrt{12} \times (1 - 0.3) + 0.3 \cong 2.7, \quad (2)$$

et pour la roche saturée en eau:

$$\sqrt{\varepsilon_{\text{sat}}} = \sqrt{12} \times (1 - 0.3) + \sqrt{80} \times 0.3 \cong 5.1. \quad (3)$$

La vitesse d'onde électromagnétique V_{em} dans la roche est donnée par:

$$V_{em} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}, \quad (4)$$

où c est la vitesse de la lumière. On a donc, pour la roche sèche $V_{em} \cong 30/2.7 \cong 11 \text{ cm/ns}$ et, pour la roche saturée, $V_{em} \cong 30/5.1 \cong 5.9 \text{ cm/ns}$.

E10:

On peut relier la vitesse d'onde électromagnétique V_{em} dans la roche à la porosité ϕ par:

$$\frac{c}{V_{em}} = \sqrt{\varepsilon_m} (1 - \phi) + \sqrt{\varepsilon_w} \phi, \quad (1)$$

où ε_m est la constante diélectrique moyenne de la matrice minérale et ε_w est la permittivité électrique de l'eau (~ 80), qu'on peut écrire aussi:

$$\frac{c}{V_{em}} = \sqrt{\varepsilon_m} + (\sqrt{\varepsilon_w} - \sqrt{\varepsilon_m}) \phi. \quad (2)$$

La résistivité de la roche est liée à la porosité par la relation:

$$\frac{1}{\rho_r} = \sigma_s + \sigma_w \phi^2, \quad (3)$$

où σ_s est la conductivité de surface et σ_w la conductivité de l'eau des pores. On peut donc écrire:

$$\left(\frac{c}{V_{em}} - \sqrt{\varepsilon_m} \right)^2 = (\sqrt{\varepsilon_w} - \sqrt{\varepsilon_m})^2 \frac{\rho_r - \sigma_s}{\sigma_w}. \quad (4)$$

Notons que pour être utile en pratique, par exemple en utilisant des mesures expérimentales obtenues sur une zone de porosités variées (comme par exemple les calcaires du Lutétien à Vincennes), il faudrait connaître la permittivité du minéral et représenté la

quantité $\left(\frac{c}{V_{em}} - \sqrt{\varepsilon_m} \right)^2$ en fonction de $\frac{1}{\rho_r}$.

E11:

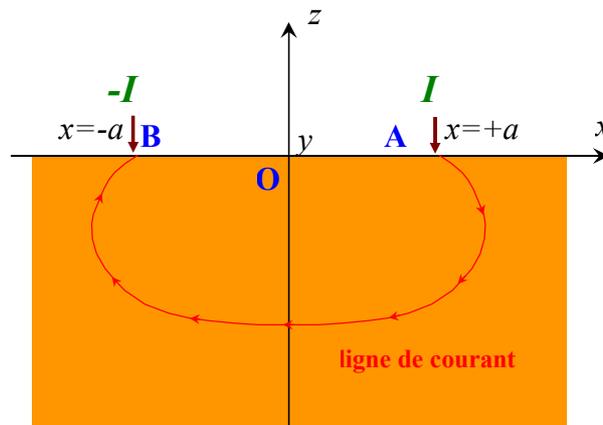
On considère que la longueur du profil ERT doit être **8 fois** la profondeur cible, soit ici 500 m. Si on a 64 électrodes, l'intervalle doit être $500/64 \cong 8$ m.

E12:

Considérons un point M du demi-espace, de coordonnées x, y, z selon les axes Ox, Oy et Oz, O étant le milieu de AB (voir figure ci-dessous). Le potentiel en ce point est donné par:

$$V = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right), \quad (1)$$

où ρ est la résistivité du demi-espace homogène, $r_{A,B}$ les distances aux points A et B, respectivement.



La densité de courant sur le plan Oyz est horizontale selon Ox, avec sa coordonnée j_x donnée par:

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{1}{\rho} E = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} V = -\frac{I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a/2)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a/2)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= -\frac{I}{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \frac{2(x-a/2)}{\left((x-a/2)^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{2(x+a/2)}{\left((x+a/2)^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{I}{2\pi} \left(\frac{(x-a/2)}{\left((x-a/2)^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x+a/2)}{\left((x+a/2)^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

et, sur l'axe Oz, soit pour $x=0$, on a:

$$j_x = -\frac{Ia}{2\pi} \left(\frac{a^2}{4} + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}}. \quad (3)$$

Intégrer d'abord sur y :

$$dI(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} j_x dy = -\frac{Ia}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{a^2}{4} + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}} dy, \quad (4)$$

et posons:

$$y = \left(\frac{a^2}{4} + z^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tan \theta. \quad (5)$$

On a alors:

$$dy = \left(\frac{a^2 + z^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \quad \text{et} \quad \frac{a^2}{4} + y^2 + z^2 = \left(\frac{a^2 + z^2}{4} \right) (1 + \tan^2 \theta) = \left(\frac{a^2 + z^2}{4} \right) \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad (6)$$

et on obtient:

$$\begin{aligned} dI(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} j_x dy = -\frac{Ia}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\frac{a^2 + z^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\cos^3 \theta} \left(\frac{a^2 + z^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= -\frac{Ia}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\frac{a^2 + z^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\cos^3 \theta} \left(\frac{a^2 + z^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{Ia}{2\pi} \frac{1}{\frac{a^2 + z^2}{4}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta. \quad (7) \\ &= -\frac{Ia}{\pi} \frac{1}{\frac{a^2}{4} + z^2} \end{aligned}$$

L'intégrale du courant I_z entre la surface et la profondeur z est alors:

$$I_z = \int_0^z dI(z) = -\frac{Ia}{\pi} \int_0^z \frac{1}{\frac{a^2}{4} + z^2} dz. \quad (8)$$

Posons:

$$z = \frac{a}{2} \tan u. \quad (9)$$

On a alors:

$$I_z = -\frac{Ia}{\pi} \int_0^{\text{atan}\left(\frac{2z}{a}\right)} \frac{1}{\frac{a^2}{4}} \frac{a}{2} \frac{du}{\cos^2 u} = -\frac{2I}{\pi} \int_0^{\text{atan}\left(\frac{2z}{a}\right)} du = -\frac{2I}{\pi} \text{atan}\left(\frac{2z}{a}\right), \quad (10)$$

et, inversement, la profondeur z fournissant l'intégrale I_z est:

$$z = \frac{a}{2} \tan \frac{I_z \pi}{I}. \quad (11)$$

On obtient donc:

$$z_{1/2} = \frac{a}{2} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{a}{2}, \quad (12)$$

et:

$$z_{90} = \frac{a}{2} \tan 0.9 \frac{\pi}{2} \cong 3a. \quad (13)$$

E13:

Dans le sondage Schlumberger, c'est en variant la longueur AB du profil qu'on accède à une information sur la profondeur. Dans le sondage magnétotellurique, c'est en variant la fréquence. Dans le sondage par résonance magnétique nucléaire, c'est en variant la durée de l'impulsion excitatrice (ou le moment, produit du courant par la durée).

E14:

S'il ne fait pas appel au géophysicien, mais tient absolument à obtenir de l'eau, alors le propriétaire devra dépenser en moyenne $20\,000 \text{ €}/0.2=100\,000 \text{ €}$. S'il fait d'abord un sondage avant de forer, il dépensera en moyenne $20\,000 \text{ €}+1000 \text{ €}/0.95$ soit en moyenne $21\,000 \text{ €}$! En réalité, cependant, les choses ne sont malheureusement pas aussi simples car bien d'autres considérations interviennent...

E15:

Une cave située sous la nappe conduit à la drainer partiellement. Il y a donc un régime d'écoulements permanents au toit. Cet écoulement d'eau vertical (puits) devrait conduire à une anomalie de potentiel électrique négative en surface.

E16:

Ces trois profils sont effectués à des fréquences différentes, plus faible pour le graphe du haut, plus haute pour le graphe du bas. La nappe correspond vraisemblablement à la zone où les échos s'évanouissent, pour une durée d'environ 140 ns (aller-retour), estimée sur le graphe du bas. Si on prend une vitesse de 0.1 m/ns , alors on a une profondeur d'environ $0.1 \times 140 \approx 14 \text{ m}$.

E17:

Prenons un modèle simple d'électrofiltration avec les puits donnant un potentiel négatif et les sorties un potentiel positif. Alors, on peut proposer un modèle d'écoulement avec infiltration verticale sous la forêt alimentant une nappe avec un exutoire au niveau du pic positif, ce qui correspond logiquement à la source. Les données suggèrent que les écoulements verticaux (infiltrations ou drainage d'une nappe perchée?) ne sont pas homogènes mais plus forts autour du pic négatif de potentiel. Il ne s'agit pas encore ici d'un modèle, mais une première idée qu'il faudra ensuite évaluer avec un calcul plus détaillé.

