L2 - Corrigé de l'exercice 1
du TD N°4

Vendredi 2 mars 2007

Exercice 1 : Force de Lorentz

Un proton ($q = 1.60\,10^{-19}$ C, $m = 1.67\,10^{-27}$ kg) se trouve dans un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 0.5$ T. On appelle x l'axe qui pointe dans la direction de ce champ. A $t = 0$, le proton a une vitesse v, avec $v_x = 1.5\,10^5$ m/s, $v_y = 0$, $v_z = 2.0\,10^5$ m/s.

1) Force et accélération du proton à $t = 0$, donc dans le cas où le champ magnétique est porté uniquement sur x et la vitesse sur x et z seulement : on constate que les 2 sont dirigés suivant l'axe y et s'expriment uniquement en fonction de v_z (et non v_x) : $\overrightarrow{F_B} = m\,\overrightarrow{a} = qv_zB\,\overrightarrow{e_y}$.

Au temps $t = 0$, cette force (cette accélération) est perpendiculaire à la vitesse, donc on va probablement parler de mouvement circulaire, au moins localement.

2) Pour $t > 0$, on ne connait pas la vitesse, mais comme $a_y \neq 0$ a priori, v_y ne va probablement pas rester nul, et nous allons écrire le cas général où $\overrightarrow{v}$ a 3 composantes non nulles, et $\overrightarrow{B}$ en revanche est toujours uniforme, constant, orienté suivant x.

D'après la formule de la force de Lorentz, $\overrightarrow{F_B} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$, la force sera toujours perpendiculaire à la vitesse, donc pas de modification de norme de vitesse (force ne travaille pas, énergie cinétique ne varie pas, etc.). Donc on parlera de mouvement uniforme.

De plus la vitesse a une composante parallèle à $\overrightarrow{B}$ (celle sur x) et une perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$ (celle dans le plan yz). On peut aborder le mouvement comme une décomposition de ces dans ces 2 sous-espaces.

- Le premier cas engendre un mouvement rectiligne uniforme selon l'axe x (la force de Lorentz associée est nulle, donc accélération nulle). La vitesse de ce mouvement, pour tout t serait donc $v_x(t) = v_x^0$.
- Le second cas ($\overrightarrow{v}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$) engendrerait un mouvement circulaire uniforme dans le plan yz, cf DM. Rayon de ce cercle dans le plan xy : $R = \dfrac{m\,v_z^0}{|q|\,B} = 4.2$ mm ; et centre à définir (on n'a pas parlé de l'origine du repère).
  Attention ! Dans le plan, on pourrait passer en coordonnées polaires par exemple, avec une vitesse selon le vecteur tangent, et une accélération selon le vecteur radial uniquement. Si on reste en cartésien (avec z et y), comme la vitesse tourne, les composantes de v_z et v_y varient, il faut donc écrire les équations avec les 2 composantes non nulles.

A ce stade, vous pouvez donc dire que le mouvement combiné est donc une trajectoire hélicoïdale de rayon R et de pas (qu'est-ce que le pas d'une hélice ? ? ? c'est la distance Π parcourue suivant l'axe de l'hélice, x ici, lorsque qu'un tour de cercle est fait, c'est-à-dire le décalage entre trajectoire sur l'hélice et trajectoire sur le cercle plan). A ce stade, faites un dessin ! ! !

Il y a différentes façons de voir Π par exemple on peut écrire $\Pi = x(T) - x(0) = v_x \times T$ où T est la période. Ainsi, $T = 2\pi\omega = \dfrac{2\pi m}{|q|B}$ et donc $\Pi = v_xT = v_x \times \dfrac{2\pi\,m}{|q|B} = 19.7$ mm, soit environ 5 fois le rayon (votre dessin de la trajectoire est-il proportionné ?).

Les méthodes de calcul analytique Si vous n'etes pas convaincus (tout les calculs nécessaires sont dans le corrigé du DM), ou si vous voulez une autre méthode, voici un exemple de résolution pour les équations différentielles en cartésien dans ce cas. Avant de se lancer dans ces calculs , l'étape précédente est indispensable, pour savoir déjà plus ou moins ce qu'on va trouver (quelque part un cercle, et quelque part une trajectoire rectiligne, dans les 2 cas uniformes...)

En résumé, on part de $\overrightarrow{a}$ = une formule fonction de $\overrightarrow{v}$ et des autres paramètres du problème, et on veut trouver $\overrightarrow{v}$ pour tout temps, voire mieux, la position pour tout temps.

A chaque temps t, on a donc $\overrightarrow{a} = \frac{q}{m}\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$, donc

$$\left\{ \begin{array}{lcc} \dot{v_x} & = & 0 \\ \dot{v_y} & = & q/mv_zB \\ \dot{v_z} & = & -q/mv_yB \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_x & = & cste = v_x^0 \text{ en intégrant, pour tout temps } t \\ \ddot{v_y} & = & q/m\,\dot{v_z}B = q/m\,B \times (-q/m\,v_yB) \text{ en dérivant} \\ \ddot{v_z} & = & -q/m\,\dot{v_y}B = -q/m\,B \times (q/m\,v_zB) \end{array} \right.$$

Ainsi le cas de x est réglé, et on a réussi à exprimer la dérivée (seconde) de v_z en fonction de v_z (au lieu de v_y) et pareil pour y.

On obtient donc $x(t) = v_x^0\, t + cste$ et on peut choisir la constante nulle si on part de $x = 0$ à $t = 0$.

Restent y et z.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{v_y} & = & -(q/m\,B)^2\, v_y = -\Omega^2 v_y \\ \ddot{v_z} & = & -(q/m\,B)^2\, v_z = -\Omega^2 v_z \end{array} \right.$$

NB : Si on note $\overrightarrow{\Omega} = -\frac{q}{m}\overrightarrow{B}$, alors $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$, on ne doit pas être surpris de trouver une trajectoire circulaire de vecteur rotation $vect\Omega$ ...

Bref on doit résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{v_y} + \Omega^2 v_y & = & 0 \\ \ddot{v_z} + \Omega^2 v_z & = & 0 \end{array} \right.$$

La solution générale d'une équation de ce style ($\ddot{v} + \Omega^2 v = 0$) s'écrit $v(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$ où les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales : $A = v(t = 0)$ et $B = \dot{v}(t = 0)/\Omega$ (à vous de le retrouver). Donc ici en se rappelant que $v_y(t = 0) = 0$ et en appliquant les valeurs pour $t = 0$ de $\dot{v_y}$ et $\dot{v_z}$ on trouve que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_y & = & \dot{v_y}(t = 0)/\Omega\ \sin\Omega t = v_z^0 \sin\Omega t \\ v_z & = & v_z(t = 0)\ \cos\Omega t = v_z^0 \cos\Omega t \end{array} \right.$$

Maintenant on sait que la vitesse tourne, à la vitesse $\Omega = |q|B/m$, on peut éventuellement trouver la position du point, en intégrant, mais attention aux constantes d'intégration (conditions initiales).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y(t) & = & -v_z^0/\Omega\ \cos\Omega t + cste \\ z(t) & = & v_z^0/\Omega\ \sin\Omega t + cste \end{array} \right.$$

Selon que vous prenez le point 0 pour centre du cercle ou comme point de départ au temps 0, on aura des constantes différentes. Supposons que à $t = 0$ on soit au point (0,0) Alors $y(t = 0) = -v_z^0/\Omega + cste = 0 \rightarrow cste = v_z^0/\Omega$ et $z(t = 0) = cste = 0$. On note alors $R = v_z^0/\Omega$ et cela donne en fin de compte :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y(t) & = & R\,(1 - \cos\Omega t) \\ z(t) & = & R\ \sin\Omega t \end{array} \right.$$

On a donc une trajectoire circulaire (uniforme) de rayon R et de centre le point $(R/2, 0)$ (attention au dessin !), de vitesse $V = v_z^0$ donné dans l'énoncé.

On peut donc combiner les deux mouvements (rectiligne et circulaire) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & v_x^0\, t \\ y(t) & = & R\,(1 - \cos\Omega t) \\ z(t) & = & R\ \sin\Omega t \end{array} \right.$$

Et on reconnait (? ?) une hélice qui a pour axe la droite parallèle à x d'équation ($z = 0$; $y = R/2$), pour rayon R et de pas $v_x^0\,\frac{2\pi}{\Omega}$: dessin.