Eléments de géodésie mathématiques

Marianne Greff

2007-2008

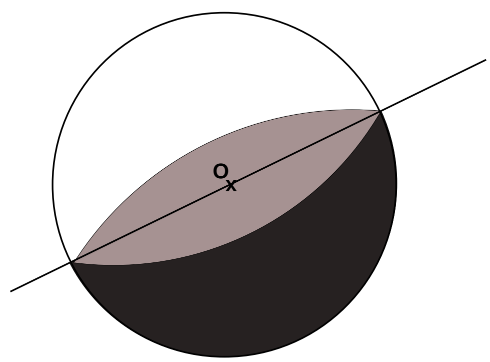
Chapitre 1

Eléments de géodésie mathématiques

1.1 Quelques rappels

1.1.1 Le Grand cercle

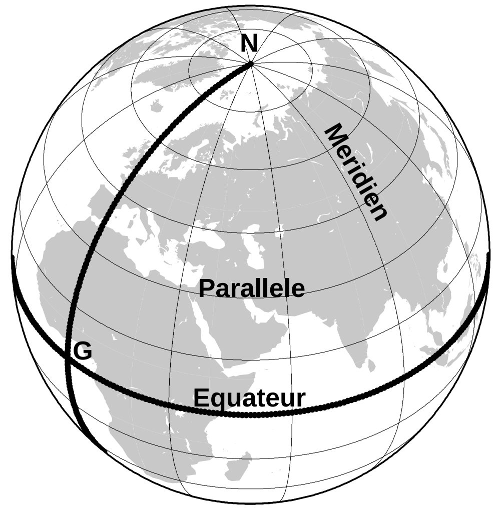
- Un grand cercle est un cercle tracé à la surface d'une sphère qui a le même diamètre qu'elle et qui la divise en deux hémisphères égaux.
- Ou encore, un grand cercle est un cercle sur la sphère ayant le même centre qu'elle
- ou enfin, l'intersection de cette sphère avec tout plan passant par son centre.



Un grand cercle est le plus grand cercle que l'on puisse tracer à la surface d'une sphère.

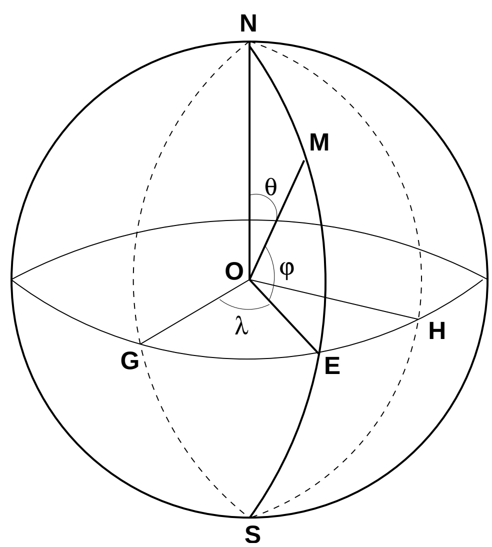
1.1.2 Parallèles, méridiens et pôles géographiques

L'un des grands cercles joue un rôle particulier : il partage la Terre en l'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud : on l'appelle l'Equateur.
Tout cercle tracé sur la sphère et qui se trouve dans un plan parallèle à celui qui contient l'équateur s'appelle un parallèle.
Une sphère possède deux pôles géographiques, situés à 90^o de son équateur, de part et d'autre de celui-ci : il y a un pôle Nord (point N) et un pôle Sud (point S).
La droite qui passe par les pôles est la perpendiculaire au plan équatorial qui passe par le centre de la Terre : on l'appelle Axe des pôles.
Les demi-cercles tracés sur la sphère qui ont pour extrémités les deux pôles sont des méridiens : ce sont des moitiés de grands cercles. L'un d'eux, celui qui passe par Greenwich (près de Londres en Angleterre), sert d'origine : c'est la méridien zéro : il coupe l'équateur en un point G.



1.1.3 Latitude et longitude

Tout point M de la Terre se trouve sur un méridien qui coupe l'équateur en un point E : l'angle (GOE) est appelé longitude du point M, comptée positivement vers l'Est. On le notera λ.
Les longitudes sont comprises entre 0^o et 360^o, ces deux extrêmes représentant le même méridien origine.

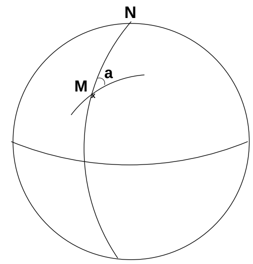


L'angle (EOM) est appelée latitude du point M et notée φ. Si M est dans l'hémisphère Nord, elle est comptée positivement et on parle de latitude Nord ; sinon, on parlera de latitude Sud et elle sera comptée négativement. Les latitudes varient entre -90^o au pôle Sud et $+90$ au pôle Nord en passant par 0^o en tout point de l'équateur.
L'angle (NOM) entre la direction du pôle Nord et le zénith (direction de la verticale ascendante) du point M est appelé colatitude ; il est égal au complémentaire de la latitude : on le notera $\theta = 90^o - \varphi$.
La colatitude varie de 0^o, au pôle Nord, à 180^o, au pôle Sud, en passant par 90^o à l'équateur.

1.1.4 Azimut

L'azimut est l'angle horizontal (c'est-à-dire dans le plan tangent à la sphère au point M) entre la direction d'un objet et une direction de référence. En géodésie, cette référence est le nord géographique. L'azimut est mesuré depuis le nord en degré dans le sens rétrograde (sens des aiguilles d'une montre) :

ainsi l'Est est au 90^o, le sud au 180^o et l'Ouest au 270^o.



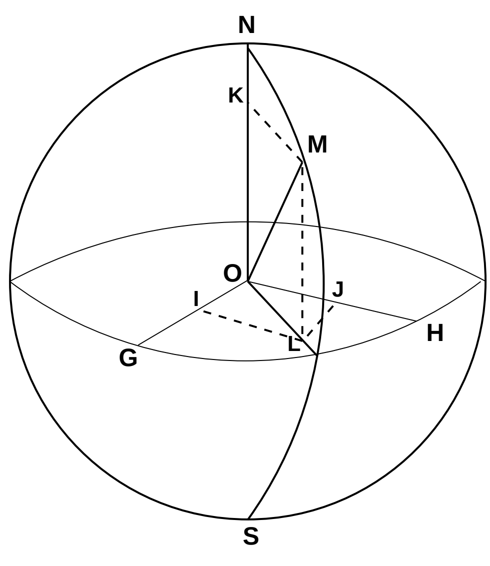
Attention : en astronomie, on compte les azimuts à partir du sud.

1.1.5 Distance zénithale

La distance zénithale d'une direction en un point donné est l'angle de cette direction avec la verticale locale. C'est ainsi que la colatitude est la distance zénithale du pôle Nord.

1.2 Coordonnées sphériques

Afin de repérer de manière cartésienne les points de la sphère de rayon r, prenons un repère d'origine O, d'axe des abscisses la droite OG, d'axe des ordonnées la droite (OH), d'axe des cotes la droite ON, où O est le centre de la sphère, G le point du méridien zéro qui se trouve à l'équateur et H le point de l'équateur de longitude 90^o. Ces axes sont orientés de telle sorte que :
G a pour coordonnées $(r, 0, 0)$
H a pour coordonnées $(0, r, 0)$
N a pour coordonnées $(0, 0, r)$
Pour obtenir les coordonnées d'un point M à la surface d'une sphère de rayon r, connaissant sa colatitude et sa longitude, on projette le point M sur le plan GOH parallèlement à ON : on obtient le point L tel que $OL = r \sin\theta$. On projette ensuite le point L sur l'axe OG obtenant un point I de coordonnée $(r \sin\theta \cos\lambda, 0, 0)$, et le point L sur l'axe OH obtenant le point J de coordonnées $(0, r \sin\theta \sin\lambda)$. En projettant le point M sur l'axe ON parallèlement au plan (GOH), on obtient un point K de coordonnées $(0, 0, r \cos\theta)$.



L'abscisse de I, l'ordonnée de J et la cote de K sont respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote du point M. On a donc

$$OM = [x, y, z] \quad \text{avec} \quad x = r \sin\theta \cos\lambda; \quad y = r \sin\theta \sin\lambda; \quad z = r \cos\theta \tag{1.1}$$

L' équation (1.1) peut se résoudre en r, θ, λ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}; \quad \lambda = \arctan \frac{y}{x} \tag{1.2}$$

$$\text{avec} \qquad 0 \leq r \leq \infty; \qquad 0 \leq \theta \leq \pi; \qquad 0 \leq \lambda \leq 2\pi \tag{1.3}$$

La restriction (1.3) assure l'unicité de la correspondance entre (x, y, z) et (r, θ, λ).
Les ensembles d' équations (1.1) ou (1.2) définissent un changement de coordonnées. La position d'un point M peut être spécifié soit par (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes soit par (r, θ, λ) ses coordonnées sphériques.

1.2.1 Coordonnées sphériques orthogonales

Les surfaces $r = cste$ (coquille), $\theta = cste$ (parallèle) et $\lambda = cste$ (méridien) se coupent chacune deux à deux suivant des courbes appelées *courbes ou droite de coordonnées*. Les courbes de coordonnées r, θ, λ sont analogues aux axes de coordonnées x, y, z d'un repère rectangulaire. Les surfaces de coordonnées se coupent en formant des angles droits : le système de coordonnées sphériques est orthogonal.

1.2.2 Vecteurs unités dans le système de coordonnées sphériques

Soit la base cartésienne orthonormée de vecteurs unitaires $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ et $\boldsymbol{e}_z$.
A partir des vecteurs normaux aux surfaces de coordonnées, on peut définir une base *dite naturelle* $\boldsymbol{E}_r$, $\boldsymbol{E}_\theta$ et $\boldsymbol{E}_\lambda$ telle que :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \\ \boldsymbol{E}_\theta = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \\ \boldsymbol{E}_\lambda = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \lambda} \end{pmatrix}$$

Cette base est orthogonale mais non normée : On note

$$h_r = \sqrt{\boldsymbol{E}_r.\boldsymbol{E}_r}; \quad h_\theta = \sqrt{\boldsymbol{E}_\theta.\boldsymbol{E}_\theta}; \qquad h_\lambda = \sqrt{\boldsymbol{E}_\lambda.\boldsymbol{E}_\lambda}$$

Les quantités h_r, h_θ et h_λ s'appellent les facteurs de proportionnalité :

$$h_r = 1; \quad h_\theta = r; \quad h_\lambda = r \sin \theta$$

On peut définir une base physique orthonormée :

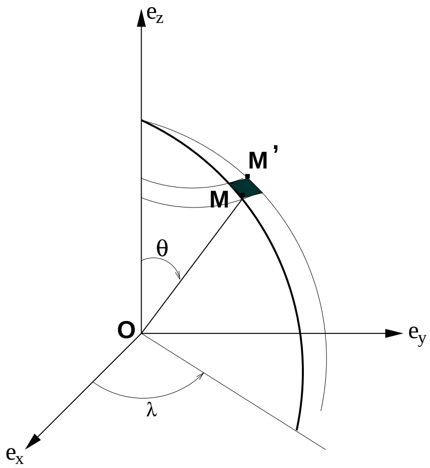
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \\ \boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \\ \boldsymbol{e}_\lambda = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

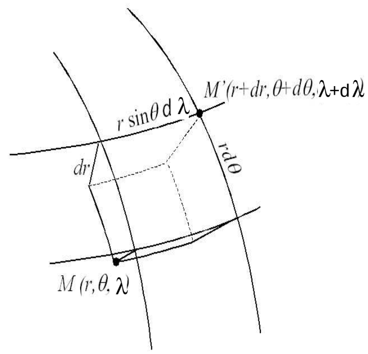
On a alors :

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \lambda \\ \sin \theta \sin \lambda \\ \cos \theta \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z} \qquad \boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z} \qquad \boldsymbol{e}_\lambda = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z} \tag{1.5}$$

1.2.3 Eléments d'arc et de volume

Soit un point M' proche du point M de coordonnées cartésiennes $[x + dx, y + dy, z + dz]$ et sphériques $[r + dr, \theta + d\theta, \lambda + d\lambda]$. Alors que les éléments de longueurs de $\overrightarrow{MM'}$ projetés sur $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ seront $[dx, dy, dz]$, ceux projetés dans les directions $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\lambda$ seront $dr, rd\theta, r \sin \theta d\lambda$.





On peut calculer l'abcisse curviligne $ds^2 = \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{MM'}$:

$$ds^2 = h_r^2 dr^2 + h_\theta^2 d\theta^2 + h_\lambda^2 d\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\lambda^2 \tag{1.6}$$

L'élément de volume pour le système de coordonnées sphériques est donné par :

$$dV = h_r h_\theta h_\lambda dr d\theta d\lambda \quad \Rightarrow \quad dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\lambda \tag{1.7}$$

Exercice :
Calculer par intégration, la surface et le volume d'une sphère de rayon R.

1.2.4 Changement de coordonnées

On peut exprimer les coordonnées cartésiennes $[A_x, A_y, A_z]$ d'un vecteur $\boldsymbol{A}$, en fonction de ses coordonnées sphériques $[A_r, A_\theta, A_\lambda]$ et vice-versa :

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = A_r \boldsymbol{e}_r + A_\theta \boldsymbol{e}_\theta + A_\lambda \boldsymbol{e}_\lambda$$

Ou encore en introduisant une matrice de passage :

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\lambda & \cos\theta\cos\lambda & -\sin\lambda \\ \sin\theta\sin\lambda & \cos\theta\sin\lambda & \cos\lambda \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\lambda \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Ou

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\lambda & \sin\theta\sin\lambda & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\lambda & \cos\theta\sin\lambda & -\sin\theta \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

1.2.5 Exercices

Exercice 1

Soit un ellipsoide de révolution, de demi-grand axe a et de demi petit-axe c. Sa surface est décrite , en cartésiennes, par l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Ecrire cette surface en utilisant les coordonnées sphériques. On exprimera le rayon r comme une fonction de θ, λ. On note $\frac{a-c}{a}=\alpha$ l'aplatissement de l'ellipsoide.

Exercice 2

Soit une rotation axiale, de vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}=[0,0,\Omega]$.
Ecrire le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}=\mathbf{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées sphériques. Vérifier avec les relations (1.8) et (1.9).

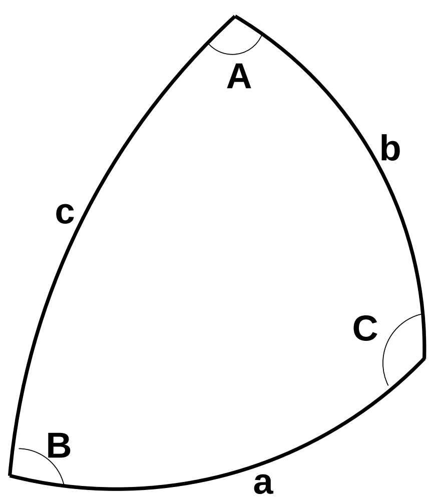
1.3 Trigonométrie sphérique

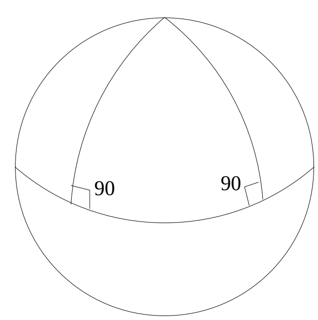
1.3.1 Grand cercle

- Sur une sphère de rayon R, un grand cercle est un cercle de rayon R dont le centre est celui de la sphère (ex : les méridiens sont des grands cercles)
- Sur la sphère, la **géodésique** ou **orthodromie** (le plus court chemin d'un point à un autre) est un grand cercle

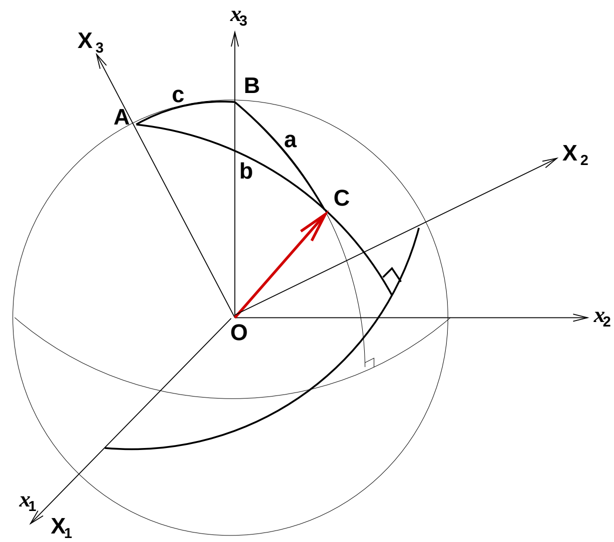
1.3.2 Le triangle sphérique

Un triangle sphérique est limité par des arcs de grands cercles.





- les côtés (a,b,c) d'un triangle sphérique s'expriment en unité d'angle.
- les angles dièdres (A,B,C) des plans (qui déterminent les grands cercles de rayon unité) s'expriment en unité d'angle.
- **Remarque** : la somme des angles d'un triangle sphérique diffère de 180^o.

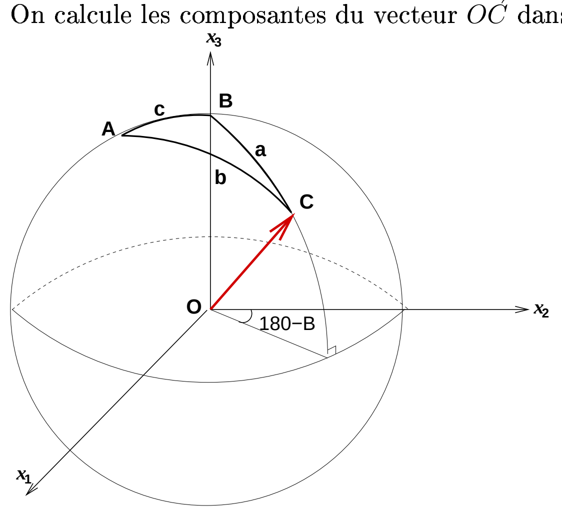


1.3.3 Relations entre les angles et les côtés d'un triangle sphérique

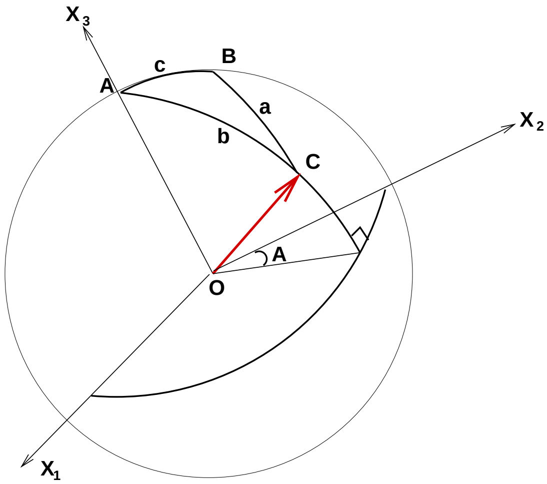
On introduit deux bases : (O, x_1, x_2, x_3) et $(O, x_1 X_2, X_3)$. On passe de l'une à l'autre par une rotation d' angle c autour de l'axe x_1.
On note $\underline{P}$ la matrice de passage de $(O, x_1 X_2, X_3) \rightarrow (O, x_1, x_2, x_3)$:

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & -\sin c \\ 0 & \sin c & \cos c \end{pmatrix}$$

On calcule les composantes du vecteur $\overrightarrow{OC}$ dans (O, x_1, x_2, x_3) puis dans $(O, X_1 X_2, X_3)$:



$$\overrightarrow{OC}_{(O,x_1,x_2,x_3)} = \begin{pmatrix} \sin a \sin B \\ -\sin a \cos B \\ \cos a \end{pmatrix}$$



$$\overrightarrow{OC}_{(O,X_1X_2,X_3)} = \begin{pmatrix} \sin b \sin A \\ \sin b \cos A \\ \cos b \end{pmatrix}$$

On a la relation :

$$\overrightarrow{OC}_{(O,x_1,x_2,x_3)} = \underline{P} \ . \ \overrightarrow{OC}_{(O,X_1X_2,X_3)}$$

On obtient alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sin b \sin A & = & \sin a \sin B \\ -\sin a \cos B & = & -\cos b \sin c + \sin b \cos c \cos A \\ \cos a & = & \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \end{array} \right. \tag{1.10}$$

D'où les formules :

- **Analogie des sinus** :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \tag{1.11}$$

- **Formule de Gauss** :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \tag{1.12}$$

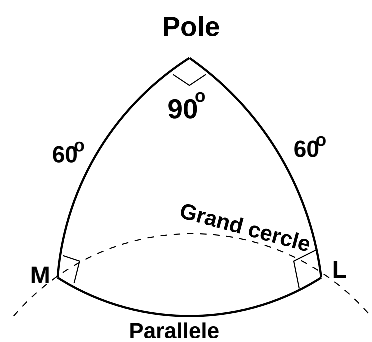
- **Formule des 4 éléments consécutifs** :
  En combinant les équations (1) et (3) du sytème 1.10, on obtient :

$$\sin A \ \ \mathrm{cotg} B = \mathrm{cotg} b \ \ \sin c - \cos c \cos A \tag{1.13}$$

1.3.4 Exemples

Exercice 1

On modélise la Terre par une sphère de rayon $R = 6371$ km.



Calculer Δ la longueur de la géodésique (ou encore la distance orthodromique) entre M et L.
Calculer δ la distance sur le cercle parallèle entre M et L.

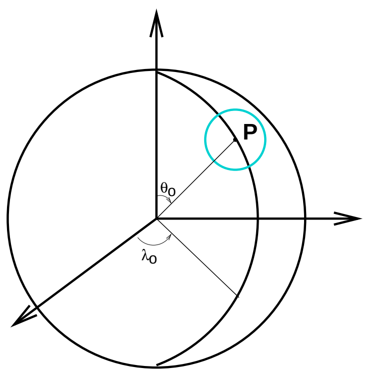
Exercice 2

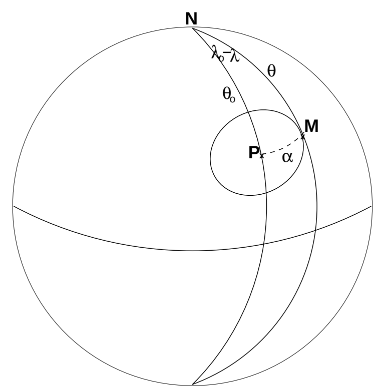
Calculer la distance entre Paris et Moscou

Paris : $\left\{\begin{array}{ll} \text{latitude} & \varphi_o = 48^o50'11.2" \\ \text{longitude} & \lambda_o = 2^o20'13.8" \end{array}\right.$ Moscou : $\left\{\begin{array}{ll} \text{latitude} & \varphi_1 = 55^o45'39.4" \\ \text{longitude} & \lambda_1 = 37^o39'53.1" \end{array}\right.$

1.3.5 Equation d'un petit cercle sur la sphère

Soit un petit cercle centré en P (de colatitude θ_o et de longitude λ_o) et d'angle α. Une courbe sur une sphère unité s' écrira : $f(\theta, \lambda) = 0$.





A partir de la formule de Gauss pour le triangle sphérique (NPM), on trouve l'équation vérifée par les coordonnées d'un point M appartenant au petit cercle, d'angle α, centré en P :

$$\cos\alpha = cos\theta \cos\theta_o + \sin\theta \sin\theta_o \cos(\lambda - \lambda_o) \tag{1.14}$$

1.3.6 Equation d'un grand cercle sur la sphère

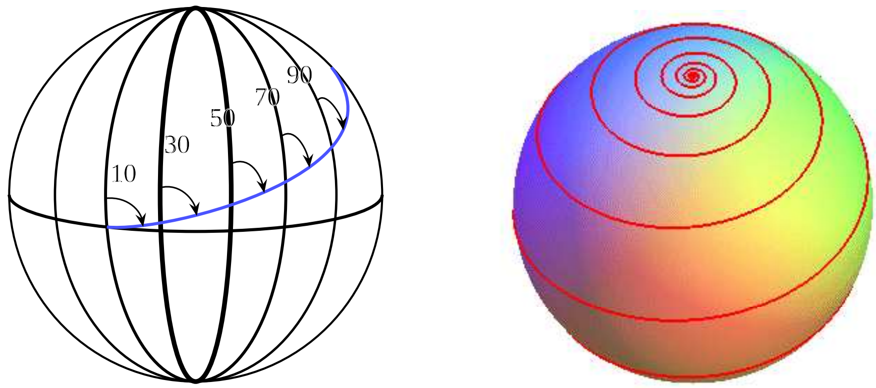
Pour trouver l' équation d'un grand cercle centré en $P(\theta_o, \lambda_o)$, on fait $\alpha = 90^o$ dans (1.14). D'où :

$$\cos(\lambda - \lambda_o) = -\text{cotg}\theta \ \ \text{cotg}\theta_o \tag{1.15}$$

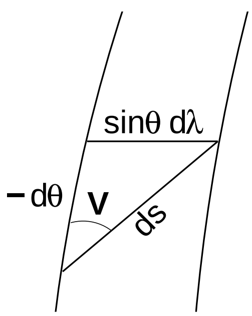
1.3.7 La Loxodromie

Une loxodromie (du grec lox(o)- et -dromie course oblique) est une courbe qui coupe les méridiens sous un angle constant. Une route loxodromique est représentée sur une carte marine ou aéronautique en projection de Mercator par une ligne droite mais ne représente pas la distance la plus courte entre deux points. En effet la route la plus courte est la route orthodromique.
La route loxodromique est une route á cap constant.

Loxodromie : route constante.
Trajectoire en spirale s'enroulant autour du pôle.



Exercice



• **Equation de la loxodromie.**
Exprimer $\tan V$ en fonction de $d\theta$, $d\lambda$ et θ. Intégrer cette équation pour trouver l'équation de la loxodromie.

$$\lambda - \lambda_o = \tan V \;\; \log\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

• **Longueur d'un morceau de loxodromie.**
Exprimer l'élément de longueur ds en fonction de $d\theta$, $d\lambda$ et θ. Intégrer pour trouver la longueur d'un morceau de loxodromie.
• **Application :** calculer la distance entre Brest et le Vénézuela sur la route loxdromique puis sur la route orthodromique.

$$\text{Brest :} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{colatitude} & \theta_o = 42^o \\ \text{longitude} & \lambda_o = -4^o \end{array} \right.$$

$$\text{Venezuela :} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{colatitude} & \theta_1 = 75^o \\ \text{longitude} & \lambda_1 = -60^o \end{array} \right.$$

1.3.8 Projection Mercator

Projection sur un cylindre tangent à l'équateur à la sphère :
- méridiens : lignes droites parallèles équidistantes
- parallèles : lignes droites parallèles non équidistante

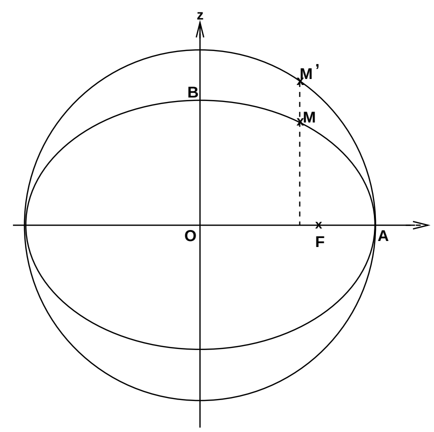
$$y = k \log[\tan(\frac{\Pi}{4} + \frac{\varphi}{2})]$$

où y est mesuré en cm depuis l'équateur et φ est la latitude.

1.4 Terre ellipsoïdale - Figure de référence

1.4.1 Eléments de géodésie mathématiques

Les premières indications que la Terre dans son ensemble est légèrement ellipsoïdale, sont à la fois de nature empirique et de nature théorique et datent du 17 siècle (observation de l'aplatissement de Jupiter par Cassini et travaux de Huyghens et Newton sur la pesanteur).
On peut alors représenter notre planète par un ellipsoïde de révolution par rapport à son axe de rotation (noté Oz).



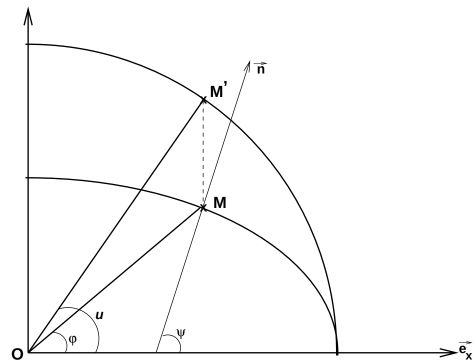
Quelques définitions

L'ellipsoïde se déduit d'un cercle, dit cercle principal, par une affinité parallèle à Oz :

$$\frac{M'P}{MP} = \frac{a}{b}$$

avec $\overline{OA} = a$ le demi-grand axe et $\overline{OB} = b$ le demi-petit axe. $a = 6378136$ m et $b = 6356751$ m.
Soit F le foyer de l'ellipsoïde. On notera c la distance $c = \overline{OF}$ telle que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
On appelle l'excentricité $e = \frac{c}{a}$ telle que $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$.
On appelle aplatissement géométrique le rapport $\alpha = \frac{a-b}{a}$.

En chacun des points de la surface de l'ellipsoïde on peut tracer une normale mathématique : elle rencontre par ailleurs l'axe de révolution. Si par extension, on assimile cette normale à la verticale d'une Terre idéale et l'axe de révolution à l'axe du monde, on pourra parler de latitude d'un point de la surface : ce sera l'angle de la normale en ce point avec la direction du plan équatorial. Le plan méridien sera défini par cette normale et l'axe du monde. La notion d'azimut et de distance zénithale se généralise également.



On définit différentes latitudes :
- $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{n}) = \Psi$ latitude géodésique
- $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{OM}) = \varphi$ latitude géocentrique
- $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{OM'}) = \mathbf{u}$ latitude réduite

1.4.2 Exercice

1 - Ecrire les relations entre $\tan u$, $\tan\Psi$, $\tan\varphi$, a et b.

2 - On peut montrer que, si $\tan y = p\tan x$, on a :

$$x - y = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ \frac{q^n}{n} \ \sin 2nx \qquad \text{avec} \quad q = \frac{1-p}{1+p} < 1$$

(On forme la quantité $\tan(x-y)$, on en déduit $e^{2i(x-y)}$ puis on fait un développement limité du logarithme de cette dernière expression).
En déduire l'expression de la latitude géocentrique φ et réduite u en fonction de la latitude géodésique Ψ, au premier ordre en α.
Application numérique : à Paris, $\Psi = 48^o50'11,2$".

3 - Montrer que $\cos^2 u = \dfrac{\cos^2\Psi}{1-e^2\sin^2\Psi}$ et $\sin^2 u = \dfrac{(1-e^2)\sin^2\Psi}{1-e^2\sin^2\Psi}$.

En déduire l'équation de l'ellipsoïde :

$$r = a\frac{\sqrt{1+(e^4-2e^2)\sin^2\Psi}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\Psi}}$$

Application numérique : calculer la distance de Paris au centre de la Terre.

4 - Ecrire l'équation de l'ellipsoïde en coordonnées polaires (i.e. latitude géocentrique).

5 - Montrer que l'élément de longueur $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ sur un méridien s'ecrit :

$$ds = a \frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2\Psi)^{3/2}}\ d\Psi$$

Application numérique :

Afin de terminer la querelle sur l'aplatissement de la Terre qui dura de 1723 à 1737, l'Académie des Sciences de Paris organisa deux missions afin de mesurer un degré de méridien : l'une au Nord (dans le golfe de Botnie), l'autre au Pérou.
La première expédition obtint un degré de méridien de 57438 toises à la latitude moyenne de $66^o20'$.
La seconde produit des résultats assez dispersés, de moyenne 56746 toises à la latitude de $-1^o30'$.
Calculer l'aplatissement terrestre obtenu à l'époque.

Rappel : 1 toise=6 pieds et le pied de Paris =0.3248 m