Résumé des TD de MATHS (*)

16, 17, 18, 19 Sept 2007.

I. Polynômes du second degré
II. Polynômes du troisième degré.
III. Calcul Matriciel
IV. Analyse Vectorielle
V. Equations différentielles.

I. Polynômes du second degré. (classique)

1) vu en TD : * définitions : degré, racines, formes développée, factorisée, canonique
* méthodes : racines évidentes, somme / produit des racines, discriminant...
* redémonstration formule générale.
* rappels sur les nombres complexes

2) réponses : les P_i sous forme factorisée :

$$P_1(x) = (x-1)(x-3)$$
$$P_2(x) = (x+1)(x-3)$$
$$P_3(x) = (x+1)(x+1/2)$$
$$P_4(x) = (x-i)(x+i) \quad (\text{dans } \mathbb{C} \text{ !!})$$

(*) QUESTIONS ⟶ mail : Lebrat@ipgp.jussieu.fr.

(II) Polynômes du troisième degré.

A) 1) vu en TD : rappels d'analyse et propriétés des fonctions polynômiales.

→ parité, extremum, pt inflexion, lim.

→ continuité et théorème des valeurs int.

$$\lim_{\pm\infty} P = \pm \operatorname{sign}(a) \times \infty .$$

P étant continue, P s'annule <u>au moins</u> 1 fois

2) 3) $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

On résoud $P'(x) = 0$ par la méthode redémontrée en (I).

$a > 0$

x	$-\infty$		x_M		x_m		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	↗	$P(x_M)$	↘	$P(x_m)$	↗	$+\infty$

- Le polynôme admettra <u>une seule</u> racine réelle si ses extrema $P(x_M)$ et $P(x_m)$ sont de même signe.

B) 1) En procédant par <u>identification</u> (2 polynômes sont égaux ssi tous les coef sont égaux) on obtient

$$h = -\frac{b}{3a} \qquad x \to X + h .$$

2) Partant de $P(X) = X^3 + pX + q$, on cherche une solution réelle de $P(X) = 0$

Posons $X = u + v$ avec u et v éventuellement complexes, solution de $P(X) = P(u+v) = 0$. Remplaçons :

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0$$

Nous obtenons, une équation présentant deux inconnues u et v. Supposons :

$u^3 + v^3 = q$, alors :

$(u+v)$ étant non nul, $3uv + p = 0$

soit finalement :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3v^3 = \dfrac{-p^3}{27} \end{cases}.$$

3) u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré en t :

$G(t) = 0 = t^2 - St + P$ avec $S = q$ et $P = -\dfrac{p^3}{27}$

les solutions se trouve par la méthode démontrée en I.

rappel : soit t_1 et t_2 deux solutions.

$G(t_1) = G(t_2) = 0$ et $G = (t - t_1)(t - t_2)$

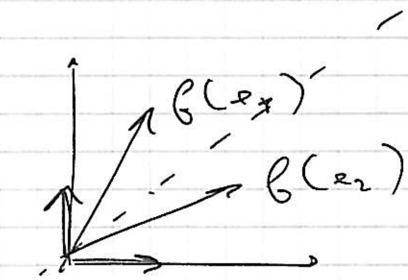
développons $t^2 - \underbrace{(t_1 + t_2)}_{S} t + \underbrace{t_1 t_2}_{P} = G$.

somme produit.

III. Calcul Matriciel

1) Soit f_A l'application linéaire associée à A :
$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique.
$f(\hat{e}_1)$ et $f(\hat{e}_2)$ les images de cette base

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} f_A(\hat{e}_1) = \hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 \\ f_A(\hat{e}_2) = 2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 \end{cases}$$



* On remarque :
$f_A(\hat{e}_1) + f_A(\hat{e}_2) = 3\,\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2$
d'où $f_A(\vec{X}) = 3\,\vec{X}$
avec $\vec{X} = \hat{e}_1 + \hat{e}_2$ par linéarité de f_A
$\vec{X}$ est le vect propre associé à la vp 3.

* on peut aussi procéder pédestrement en utilisant la méthode habituelle :

$$P_A(X) = \det(A - X I) = (1-X)^2 - 4$$
$$X = \{3, -1\}.$$

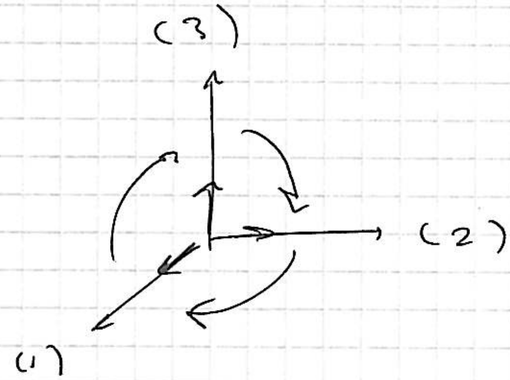
$\rightarrow$ $AX = 3X \iff \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases} \qquad x = y = 1.$

$\rightarrow$ $AX = -X \iff \qquad x = -1$ et $y = 1$.

Les 2 vecteurs propres sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

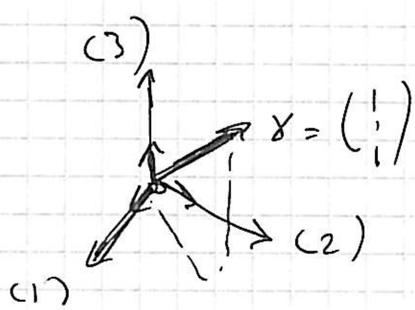
rq : on vérifie qu'ils sont <u>orthogonaux</u>.

Dans la base canonique $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$



on remarque que :
B transforme
$\hat{e}_1 \to \hat{e}_3$
$\hat{e}_3 \to \hat{e}_2$
$\hat{e}_2 \to \hat{e}_1$

* Il est clair que le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \vec{X}$ est un invariant par B. en cherchant les symétries.



Sinon on peut vérifier que $BX = B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = X$

$\vec{X}$ a pour valeur p. 1.

* On peut remarquer par ailleurs que
$B^3 = I_3$. (en appliquant 3 fois B, on retombe sur le vecteur initial)

Puisque $B^3 = I_3$ l'ensemble des valeurs propres et vecteurs propres (λ, X) vérifient :
$$\begin{cases} 1 - \lambda^3 = 0 \\ BX = \lambda X \end{cases}$$

Les v.p sont les racines cubiques de l'unité.

$$\lambda = \{1, j, j^2\} \quad \text{avec } j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Ex Résolution de $P = X^3 + 9X - 26 = 0$

remarquer la racine évidente $X = 2$

factoriser $P = (X-2)(\quad ? \quad)$

en identifiant terme à terme :

$$P = (X-2)(X^2 + 2X + 13)$$

raison : poursuivre la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.

3) Par le théorème de Caley-Hamilton $P_A(A) = 0$.

4) u n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

IV Analyse vectorielle.

- redémonstration des formules du cours.
- voir poly joint pour démonstration par calcul indiciel

V. Equations différentielles.

corrigé en préparation.

NB : Calcul d'un déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$