

**TDGE3: Corrigé des exercices pour le 22 mars 2007****TDGE3E1:**

L'arbre, dont la hauteur peut être estimée à une dizaine de mètres (c'est un petit arbre), est vu avec une ouverture angulaire d'environ  $3^\circ$  soit 50 mradians. Il est donc situé à une distance approximative de  $10/0.05=200$  m.

**TDGE3E2:**

On peut estimer la masse volumique de déchets organiques et plastiques à environ  $1500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , soit un contraste de masse volumique avec l'encaissant d'environ  $\Delta\rho=1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Le pic de l'anomalie gravimétrique sera donc (cf chapitre 4 équation 4.9):

$$\Delta g_c = 2\pi G \Delta\rho \frac{R^2}{z} = 2\pi \times 6.67 \times 10^{-3} \times 10^3 \frac{1}{10} = 4 \mu\text{Gal}. \quad (1)$$

Une telle anomalie, avec une largeur à mi-hauteur de 20 m, n'est pas détectable avec les critères habituels. Il est donc inutile d'entreprendre des profils gravimétriques.

**TDGE3E3:**

La résistivité apparente d'une configuration Schlumberger est donnée par:

$$\rho_{app} = \frac{\pi(a^2 - m^2)V}{2m I}. \quad (2)$$

et le calcul des résistivités apparentes pour le profil considéré est effectué dans le tableau ci-dessous.

$a=AB/2$ (m)	$m=MN/2$ (m)	$I$ (mA)	$V$ (mV)	$\frac{\pi(a^2 - m^2)}{2m}$	$\rho_{app}$ ( $\Omega\cdot\text{m}$ )
1	0.2	50	1280	7.54	193
1.2	0.2	100	1532	11.0	168
1.5	0.2	100	761	17.4	132
2	0.2	150	491	31.1	102
2.5	0.2	150	243	48.8	79.1
2.5	0.4	150	487	23.9	77.6
3	0.4	150	264	34.7	61.1
3.5	0.4	150	161	47.5	51.0
4	0.4	100	71.8	62.2	44.7
4.5	0.4	150	79.0	78.9	41.6
5	0.4	150	61.1	97.6	39.8
5.5	0.4	150	49.9	118	39.3
6	0.4	200	56.5	141	39.8
7	0.4	200	41.6	192	39.9
8	0.4	150	23.5	251	39.3
8	0.8	150	45.5	124	37.6
9	0.8	150	35.6	158	37.5
10	0.8	150	28.1	195	36.5
11	0.8	150	22.8	236	35.9
12	0.8	150	18.8	281	35.2
13	0.8	150	15.8	330	34.8
15	0.8	150	11.5	441	33.8
20	0.8	150	7.5	784	39.2

On constate que les valeurs de résistivité apparente pour le même  $a$  quand deux valeurs de  $m$  sont disponibles (raccordements) sont en bon accord. Si on inverse des résultats de

résistivité apparente en fonction de  $a$  avec le logiciel RESIST87, on obtient un bon accord pour un modèle à deux couches avec une couche superficielle de résistivité  $205 \Omega \cdot m$  et d'épaisseur 1 m au dessus d'un substratum de résistivité  $35 \Omega \cdot m$ . Il est peu vraisemblable que cette couche conductrice si proche de la surface soit la nappe phréatique. Il s'agit plutôt d'une couche argileuse. Des forages en cet endroit révèlent d'ailleurs que la nappe se trouve à une profondeur de 7 m. On constate que les signaux de potentiels sont déjà faibles à une distance  $a$  de 20 m. La présence de la couche conductrice au voisinage de la surface handicape fortement l'utilisation de méthodes électriques sur ce site.

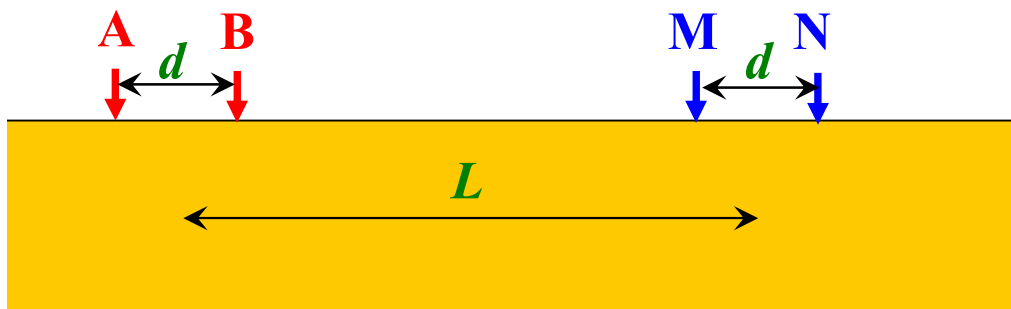
#### **TDGE3E4:**

Pour  $m$ ,  $I$ ,  $V$  et  $\rho$  donnés, la demi-longueur d'injection en sondage Schlumberger est donnée (cf équation 1) par:

$$a = \sqrt{m^2 + \frac{2mI\rho}{\pi V}} = \sqrt{20^2 + \frac{2 \times 20 \times 10 \times 400}{\pi}} \cong 230 \text{ m.} \quad (2)$$

La longueur d'injection maximale est donc **460 m**.

#### **TDGE3E5:**



Le potentiel électrique  $V$  est donné par:

$$\begin{aligned} V &= \frac{I\rho}{2\pi} \left[ \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} \right] = \frac{I\rho}{2\pi} \left[ \frac{1}{L} - \frac{1}{L+d} - \frac{1}{L-d} + \frac{1}{L} \right] \\ &= \frac{I\rho}{2\pi} \frac{2L^2 - 2d^2 - L(L-d) - L(L+d)}{L(L^2 - d^2)} = -\frac{I\rho}{\pi} \frac{d^2}{L(L^2 - d^2)} \end{aligned} \quad (3)$$

et on obtient donc:

$$\rho_{app} = -\frac{V}{I} \frac{\pi L(L^2 - d^2)}{d^2}. \quad (4)$$

On constate que le potentiel décroît comme l'inverse de la distance  $L$  au cube. Il sera très difficile d'utiliser cette méthode dans les zones de faibles résistivités.

#### **TDGE3E6:**

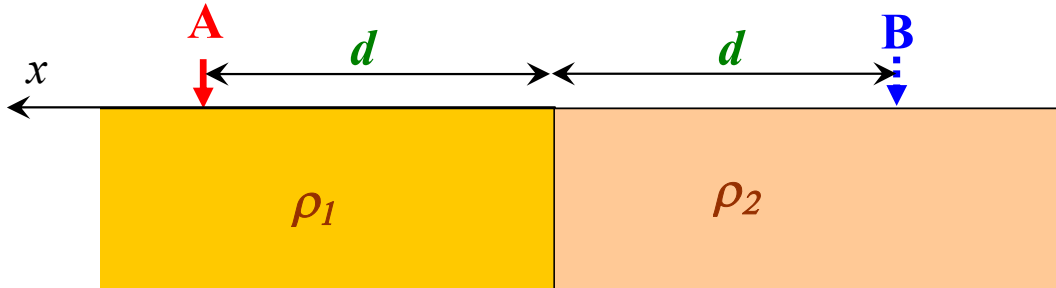
Soit A le point d'injection dans le milieu 1 de résistivité  $\rho_1$ . Soit B l'image, dans le milieu 2 de résistivité  $\rho_2$ , du point A à travers le plan de contact. Cherchons une solution pour le potentiel  $V_1$  en tout point M du le milieu 1 sous la forme:

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[ \frac{1}{AM} + \frac{a}{BM} \right], \quad (5)$$

et dans le milieu 2:

$$V_2 = \frac{I\rho_2}{2\pi} \frac{b}{AM}, \quad (6)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Cette solution existe si on parvient à trouver les valeurs des constantes pour que les conditions aux limites soient vérifiées. Au voisinage du point d'injection, le potentiel  $V_1$  sera bien identique au potentiel produit par une injection ponctuelle dans un demi-espace infini. Le potentiel électrique doit être continu sur la faille et la composante normale du courant doit être conservée à travers la faille.



La condition de continuité du potentiel implique:

$$\rho_1(1+a) = \rho_2 b. \quad (7)$$

Pour écrire la conservation de la composante normale du courant, il faut écrire l'expression du champ électrique. Si on utilise un repère Oxyz tel que que le point d'injection est à  $x=d$  et  $y=0$  avec l'axe Oz dirigé vers le bas, alors on a dans le milieu 1:

$$E_x = -\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{I\rho_1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{AM^2} \frac{\partial AM}{\partial x} - \frac{a}{BM^2} \frac{\partial BM}{\partial x} \right]. \quad (8)$$

Mais on a:

$$\begin{cases} AM^2 = (x-d)^2 + y^2 + z^2 \\ BM^2 = (x+d)^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \quad (9)$$

ce qui implique:

$$\begin{cases} 2AM \frac{\partial AM}{\partial x} = 2(x-d) \\ 2BM \frac{\partial BM}{\partial x} = 2(x+d) \end{cases}. \quad (10)$$

On obtient donc pour  $x=0$ :

$$E_x \Big|_1 = -\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{I\rho_1}{2\pi AM^3} [-d + da] = \frac{I\rho_1 d}{2\pi AM^3} [1-a]. \quad (11)$$

De même, la composant horizontale du champ électrique dans le milieu 2 en  $x=0$  s'écrit:

$$E_x \Big|_2 = -\frac{\partial V_2}{\partial x} = -\frac{I\rho_2 d}{2\pi AM^3} b. \quad (12)$$

L'égalité des densités de courant au plan de contact s'écrit alors:

$$\frac{1}{\rho_1} E_x \Big|_1 = \frac{1}{\rho_2} E_x \Big|_2, \quad (13)$$

qui implique:

$$1-a = b. \quad (14)$$

En combinant avec la condition (7), on obtient:

$$\rho_1(1+a) = \rho_2(1-a), \quad (15)$$

d'où:

$$\begin{cases} a = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \\ b = \frac{2\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \end{cases} \quad (16)$$

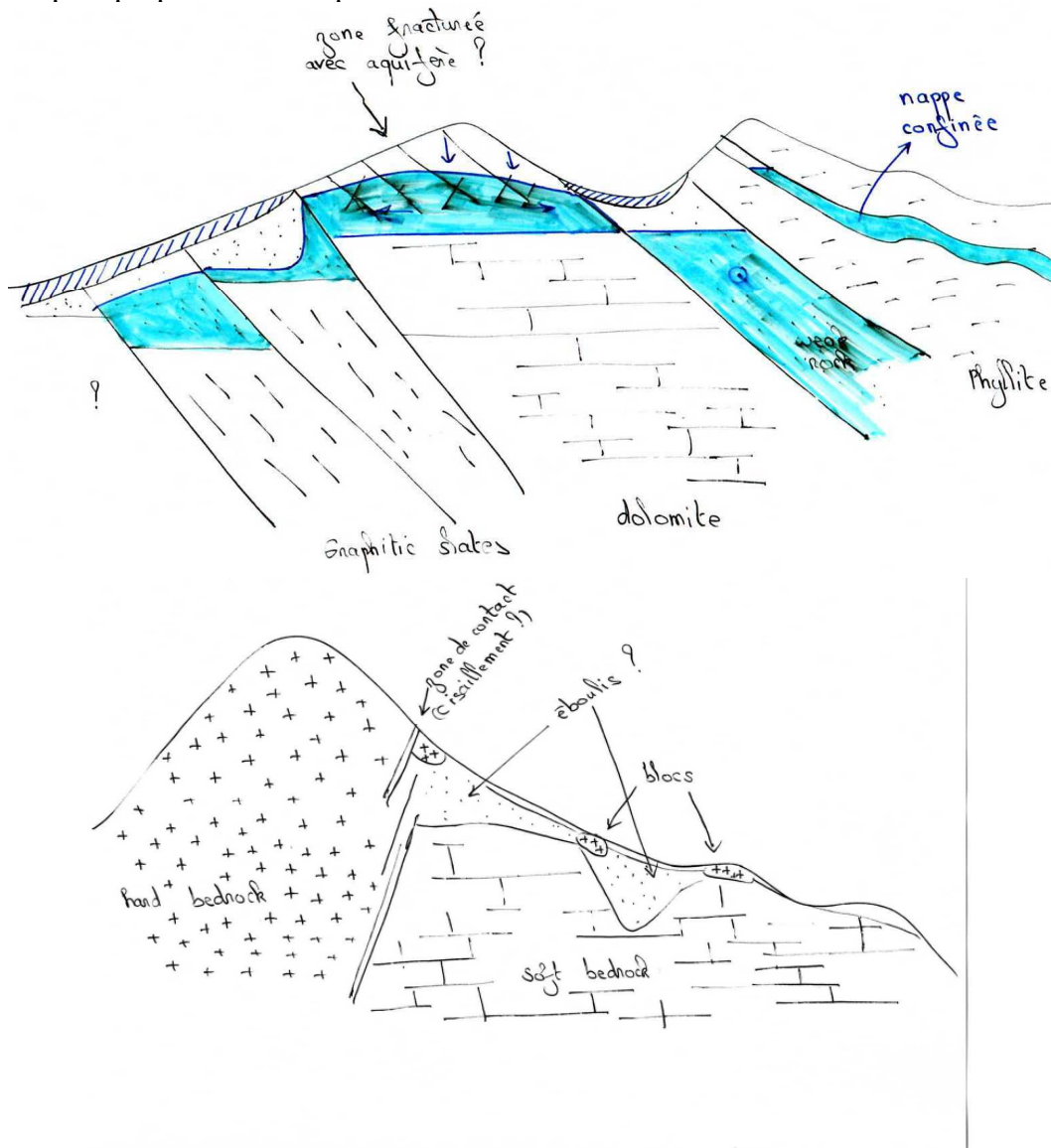
On a donc l'expression du potentiel électrique en tout point de l'espace:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ V_2 = \frac{I}{\pi} \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} \end{cases} \quad (17)$$

Cette solution vérifie les équations générales du champ et les conditions aux limites, c'est donc la solution du problème.

**TDGE3E7:**

On peut proposer les interprétations suivantes :



**TDGE3E8:**

Les composantes radiale  $B_r$  et orthoradiale  $B_\theta$  du champ magnétique d'un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{m}$  en un point, de rayon vecteur  $\vec{r}$  faisant un angle  $\theta$  avec le moment magnétique, sont données par:

$$\begin{cases} B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos\theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin\theta}{r^3} \end{cases} \quad (18)$$

Soyons conservateur et faisons l'hypothèse que nous observons la composante orthoradiale du dipôle. On aura alors:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} = 10^{-7} \frac{m}{r^3} = 4 \times 10^{-9} \quad (19)$$

On a donc:

$$r = (25m)^{\frac{1}{3}} \quad (20)$$

Pour dix fûts de 200 litres, en supposant qu'ils sont arrangés régulièrement et polarisés dans le même sens parallèle au champ magnétique terrestre, on aura  $m=100 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ , soit une profondeur de **14 m**.

Le char sera détectable jusqu'à une profondeur de **37 m**! Quant au mur de briques, si encore on fait l'hypothèse que les moments magnétiques des briques sont alignés, l'ordre de grandeur du champ magnétique produit en surface sera:

$$B \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} = 10^{-7} \times 40 \times 0.2 = 8 \times 10^{-7} \text{ T} = 800 \text{ nT} \quad (21)$$

Une telle anomalie sera aisément détectable. Si les moments magnétiques ne sont pas alignés, on pourra éventuellement descendre à une anomalie de l'ordre de 40 nT, ce qui reste significatif.

**TDGE3E9:**

Utilisons la deuxième formule de Cagniard:

$$\rho = \frac{1}{5} T \left( \frac{E}{B} \right)^2 \quad (22)$$

où  $\rho$  est la résistivité en  $\Omega\cdot\text{m}$ ,  $T$  est la période en secondes,  $E$  l'amplitude de la variation du champ électrique en mV/km et  $B$  l'amplitude de la variation du champ magnétique en nT. On a donc ici:

$$\rho = \frac{1}{5} T \left( \frac{E}{B} \right)^2 = \frac{1}{5} \times 300 \times \left( \frac{0.5}{\frac{50 \times 10^{-3}}{10}} \right)^2 = \mathbf{60 \Omega\cdot m} \quad (23)$$

La longueur de pénétration est alors donnée par la première formule de Cagniard:

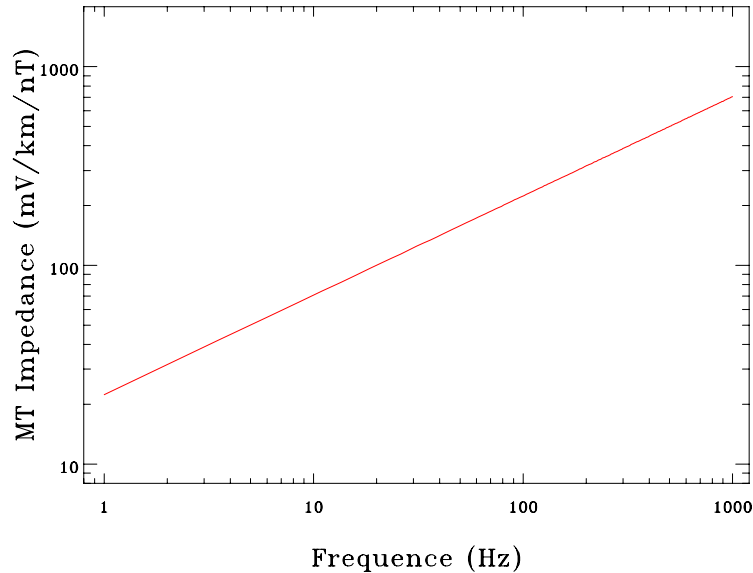
$$\lambda = 500 \sqrt{\rho T} = 500 \sqrt{60 \times 300} = \mathbf{67 \text{ km}} \quad (24)$$

**TDGE3E10:**

L'impédance en  $\text{mV}\cdot\text{km}^{-1} \cdot \text{nT}^{-1}$  est donnée par la deuxième formule de Cagniard:

$$Z = \left| \frac{E}{B} \right| = \sqrt{5} \sqrt{\frac{\rho}{T}} = \sqrt{5\rho f} , \quad (25)$$

où  $\rho$  est la résistivité en  $\Omega \cdot m$  et  $f$  la fréquence. La gamme de fréquence de l'audio-magnéto-tellurique est du Hz au kHz. On peut donc prédire le comportement donné par la courbe si dessous:



### TDGE3E11:

En utilisant la première formule de Cagniard, on obtient une longueur de pénétration de:

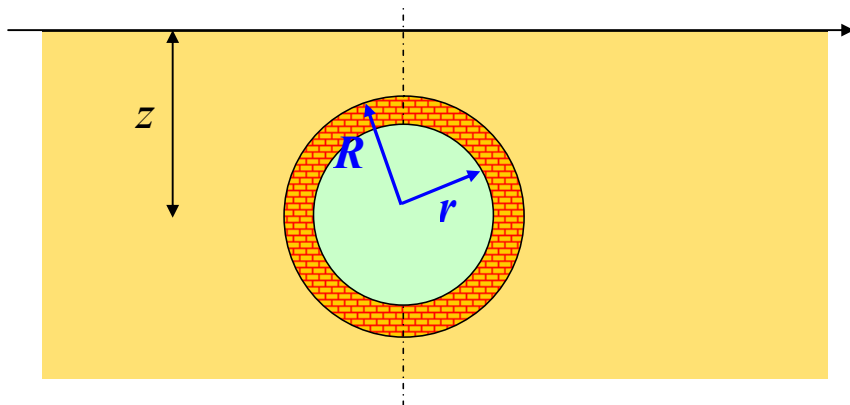
$$\lambda = 500\sqrt{\rho T} = 500\sqrt{\frac{100}{800 \times 10^6}} = 20 \text{ cm.} \quad (26)$$

Avec la formule de propagation de l'onde géoradar, on trouve une pénétration de:

$$\delta_{GPR} = 2\rho\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = 200 \times \sqrt{\frac{5 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}{4\pi \times 10^{-7}}} = 1 \text{ m.} \quad (26)$$

On voit que le géoradar 800 MHz est parfaitement inutile dans ce milieu conducteur pour détecter une interface à 4 m de profondeur.

### TDGE3E12:



Le tunnel du dictateur est proche de la surface et donc facile à détecter par microgravimétrie. Par contre, il peut ranger son or de telle façon que l'anomalie positive due à l'or compense l'anomalie négative due au tunnel. Pour cela, il peut par exemple empiler les lingos d'or sur une couronne cylindrique tout autour du tunnel de rayon intérieur  $r$  et extérieur  $R$ . L'or est caractérisé par un contraste de masse volumique  $\Delta\rho_{Au}=19\,300-2500=16\,800\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  tandis que la cavité est caractérisée par un contraste de masse volumique  $\Delta\rho_0=-2500\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . On peut montrer, en suivant le même raisonnement que pour le cylindre homogène, que l'anomalie due à une couronne cylindrique est égale à l'anomalie d'un déficit linéique de masse concentré sur l'axe du cylindre.

Pour que les anomalies du trou et de l'or se compensent, conformément à l'équation (4.9), il faut et il suffit que:

$$\Delta\rho_{Au}(R^2 - r^2) + \Delta\rho_0 r^2 = 0 , \quad (27)$$

soit:

$$r = R \sqrt{\frac{\Delta\rho_{Au}}{\Delta\rho_{Au} - \Delta\rho_0}} . \quad (28)$$

Pour un tunnel de 1 m de rayon, il faudra le remplir d'or jusqu'à un rayon intérieur  $r = \sqrt{\frac{16800}{19300}} = 0.93\text{ m}$ , ce qui ne laisse pas beaucoup de place pour les lingos. Il vaudrait mieux envisager un tunnel de 2 m de rayon.

Si le dictateur veut protéger son trésor d'une prospection électromagnétique, il peut aussi couvrir la surface de grillages ou de fils tirés aléatoirement, ce qui empêchera tout sondage VLF ou géoradar.

### **TDGE3E13:**

Commençons par estimer la résistivité électrique de cette aquifère. La résistivité de l'eau de mer est  $0.3\ \Omega\cdot\text{m}$ . Prenons une porosité typique de 20 % pour le sable, le facteur de formation est alors  $1/0.2^2=25$ . La résistivité de la roche saturée est donc approximativement  $7.5\ \Omega\cdot\text{m}$ . La longueur de pénétration de l'onde VLF, de fréquence approximative  $f=20\text{ kHz}$ , est donnée par la première formule de Cagniard:

$$\lambda = 500 \sqrt{\frac{\rho}{f}} = 500 \sqrt{\frac{7.5}{20 \times 10^3}} = 9.6\text{ m}. \quad (29)$$

### **TDGE3E14:**

On peut estimer la hauteur de la nappe à partir de la valeur de la conductivité hydraulique, en prenant une valeur d'infiltration moyenne, comme 16 mm par an pour une zone de montagne. On obtient:

$$h = \sqrt{\frac{a}{K} \frac{L}{2}} = \sqrt{\frac{16 \times 10^{-3}}{3 \times 10^7 \times 10^{-6}}} \times 10^3 = 23\text{ m}. \quad (30)$$

La nappe phréatique est donc largement à plus de 250 m de profondeur du chalet du personnage. C'est beaucoup trop profond pour être atteint par VLF ou tomographie de résistivité électrique. Un forage aussi profond coûterait de toute façon très cher.

Il est préférable de laisser tomber l'idée de forage au chalet ainsi que les prospections géophysiques, et envisager de ramener l'eau par pompage depuis la source.

**TDGE3E15:**

On peut considérer que la résolution attendue en mode propagatif est le quart de la longueur d'onde.

La longueur d'onde du radar de fréquence  $f$  dans un milieu de perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  et de permittivité relative  $\varepsilon_r$  est :

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r} f}, \quad (31)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière. La résolution du radar 50 MHz est donc :

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{30}} \frac{1}{50 \times 10^6} = 27 \text{ cm}. \quad (32)$$

Pour le radar 800 MHz, on obtient :

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{30}} \frac{1}{800 \times 10^6} = 1.7 \text{ cm}. \quad (33)$$