L2 - Physique pour les Sciences de l'Univers

28 mars 2006

1 Calcul vectoriel : TD 1 et 2

- Pour un champ scalaire ou vecteur, on peut definir les quantités suivantes ; grad, div, rot, laplacien. Attention : Lesquelles s'appliquent auxquels ?
Selon le type de coordonnées choisies, le résultat ne varie pas mais les calculs peuvent devenir plus ou moins laborieux.

- Les notions de **produit scalaire** et **produit vectoriel** doivent être bien comprises et sans confusion entre les deux.

- Circulation sur un ligne, flux à travers une surface, lien avec les div, les grad et les rot (dans quels cas les calculs sont-ils simplifiés ?)

- Avez-vous regardé le QCM que je vous avais donné (2x 10 questions) : trouvez-vous ces questions évidentes ? (je peux vous rédiger un corrigé si besoin)

- A ce stade, l'exercice 4 du TD 2 peut-etre considéré comme une application mathématique (sauf la dernière question 5) sans notion d'électrostatique. L'avez-vous fait ? est-il difficile ou plutôt facile ?

2 Champ électrique : TD 3 et 4

- Engendré par une charge (ou deux). En utilisant uniquement l'expression de la force de Coulomb et le principe de superposition, vous pouvez faire tous les exercices du TD 3. Si c'est déjà fini je peux vous en trouver d'autres.

- Principe de superposition pour une distribution continue de charge : calcul intégral.

- Théorème de Gauss : TRES IMPORTANT pour les calculs de champs. Ces deux derniers points feront l'objet du TD 4.

3 Correction de l'ex.4 du TD2

Vous avez déjà eu en ligne un corrigé pour les exercices 1 et 2 qu'on n'avait pas pu terminer en cours. Est-ce que ces 2 exercices sont clairs ou est-il besoin de revenir dessus ? ?

Vous avez aussi des éléments de réponse pour l'exercice 4. Je vous mets ici un corrigé rapide, essayer de réfléchir dessus, et si vous avez besoin de davantage de précision n'hésitez pas à demander. Dans un premier temps, je vais considérer une approche uniquement mathématique et calculatoire sans me poser de questions physiques ; je ferai le lien avec un dipôle électrostatique dans un deuxième temps seulement.

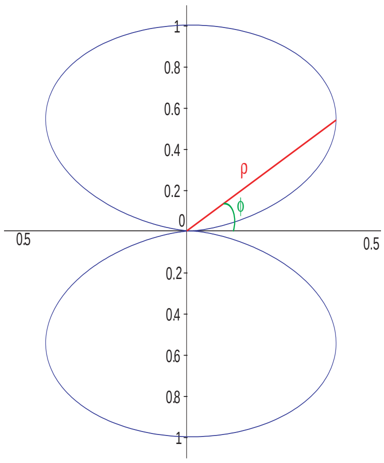
1) *On demande les lignes de champ en coordonnées polaires + dessin.*
Il faut comprendre ici qu'on est en 2D , donc quel système de coordonnées utiliser ? Soit cartésien, (x, y) sans z, soit polaires, c'est-à-dire cylindriques mais sans dimension z, ou sphériques sans deuxième angle. Dans ces 2 cas, il reste donc une distance r ou ρ et un angle θ ou ϕ...On reviendra plus tard sur cette notion. Essayons pour l'instant de faire uniquement les calculs demandés, en polaires donc.

Un déplacement élémentaire sur une ligne de champ, notons-le $\overrightarrow{dl}$, doit être parallèle au champ en ce point, par définition, comme une petite tangente. Comment exprime-t-on le fait que $\overrightarrow{dl}$ et $\overrightarrow{E}$ sont parallèles ?

- Leur produit vectoriel est nul (en 3D). Dans ce cas-là il est porté uniquement sur la troisième composante "fictive", par définition d'un produit vectoriel, Et on trouve $E_\phi \, d\rho - E_\rho \, \rho d\phi = 0$.
- Ils sont colinéaires (donc proportionnels) : alors $\overrightarrow{dl} = \lambda \overrightarrow{E}$. On élimine λ en écrivant que $\lambda = d\rho / E_\rho = \rho d\phi / E_\phi$.

Dans les 2 cas on a l'équation suivante : $E_\phi \, d\rho = E_\rho \, \rho d\phi$. On remplace par les valeurs de $\overrightarrow{E}$, on intègre et on trouve que $\rho = A \sin^2 \phi$.

Dessin : avec constante $A = 1$. Vous pouvez repasser par $x = \rho \cos\phi$ et $y = \rho \sin\phi$ et ca vous donne une courbe paramétrée par ϕ. Vous devez obtenir le dessin suivant (attention on n'a pas les mêmes échelles pour les axes x et y) :



2) *Trouver le potentiel U dont dérive ce champ.*

On cherche U tel que $E =$ - grad U : on écrit donc l'équation pour chaque composante.

$$-\frac{\partial U}{\partial \rho} = E_\rho = \frac{2k\cos\phi}{\rho^3} \quad \longrightarrow U = \frac{k\cos\phi}{\rho^2} + f(\phi).$$

Puis $-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \phi} = E_\phi = \dfrac{k\sin\phi}{\rho^3}$ or $-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \phi} = \dfrac{k\sin\phi}{\rho^3} + f'(\phi) = \dfrac{k\sin\phi}{\rho^3}$.

Donc $f'(\phi) = 0$ et en conclusion $U = \dfrac{k\cos\phi}{\rho^2}+$ constante.

Si on veut que $\lim\limits_{\rho \to 0} U = 0$, pour des considérations physiques ultérieures, alors on choisira souvent une constante nulle.

Retenir donc la forme $U = \dfrac{k\cos\phi}{\rho^2}$.

3) *Exprimer U et $\overrightarrow{E}$ en coordonnées cartésiennes. Ici on veut vous convaincre que les coordonnées polaires sont définitivement meilleures (plus condensées et plus simples d'utilisation).*

Je vous laisse faire les calculs ; vous devez trouver

$$U = \frac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{k(2x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = \frac{3kxy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

4) *On se place maintenant en coordonnées sphériques* (ρ, ϕ, θ) *. Imaginez notre dessin des lignes de champ dans le plan vertical (*ϕ*= 0) et on a en fait une invariance d'angle* ϕ*. Si on tourne notre plan d'un angle* ϕ *quelconque, on garde la même chose. Vous pourriez vérifier que le potentiel dont dérive ce champ s'écrit de la même façon* $U = \dfrac{k\cos\phi}{\theta^2} +$ *constante.*

On demande de calculer le flux du champ à travers une sphère de rayon R *centrée en* O*.*

On utilise les coordonnées sphériques pour écrire son vecteur surface $\overrightarrow{d\sigma}$ qui est perpendiculaire à la surface, tourné vers l'extérieur de la sphère, et de norme "un petit élément de surface" donc :

$$\overrightarrow{d\sigma} = R^2 \ \sin\theta \ d\theta \ d\phi \ \overrightarrow{e_\rho}$$

Et on peut maintenant parfaitement calculer le flux Φ à travers la sphère Σ,

$$\Phi = \iint_\Sigma \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} E_\rho \ d\sigma = 2\pi \ \frac{2k}{R} \ \int_{\theta=0}^{\pi} \cos\theta \ \sin\theta \ d\theta = 2\pi \ \frac{2k}{R} \ \frac{1}{2}[\sin^2\theta]_0^\pi = 0\,!\,!$$

NB : a posteriori, cela donne envie de calculer div $\vec{E}$ ou ΔU pour voir si l'on aurait trouvé 0. En l'occurence, vous pouvez le faire : oui ce champ est à flux conservatif. Donc le flux à travers toute surface fermée sera nul.

5) *Retour à la physique du problème : on se propose de retrouver les résultats du dipôle. Ce raisonnement sera détaillé dans le cours et dans les TD suivants.*

En 2 mots : un champ dipolaire est la somme des champs engendrés par 2 charges opposées relativement (voire infiniment) proches. Et comme on peut séparer l'intégrale du flux, en somme de 2 intégrales, on va calculer les 2 flux séparément et les additionner ensuite.

Je vous passe le détail du calcul mais au final on trouve que le flux pour un champ engendré par une charge q à travers une sphère autour de q vaut : q/ε_0 (remarques ? ? il ne dépend ni de R ni de où q se trouve exactement dans la sphère ...) Comme dans notre cas les 2 particules sont de charges opposées, la somme des 2 flux sera donc nulle. On retrouve le même résultat.

Pour aller plus loin : refaites cet exercice en utilisant ce que vous aurez appris sur le moment dipolaire et le théorème de Gauss, vous verrez que le résultat (flux = 0) est immédiat. Pour ce qui est du calcul du champ et du potentiel, le TD 3 vous demande de calculer la même chose dans des cas particuliers.