Licence STEP L2

Module Physique pour les géosciences S4

Mécanique des solides et des planètes

Examen écrit du 29 mai 2006 suivi du corrigé

Documents autorisés: néant, calculette : tolérée. Veillez à soigner la rédaction. Durée : 4 heures

<table>
<tr><td>n°1

(2 pt)</td><td>

Qu'est-ce que la règle de Steiner-Huygens? La démontrer et donner un exemple d'application.

</td></tr>
<tr><td>n°2

(4 pt)</td><td>

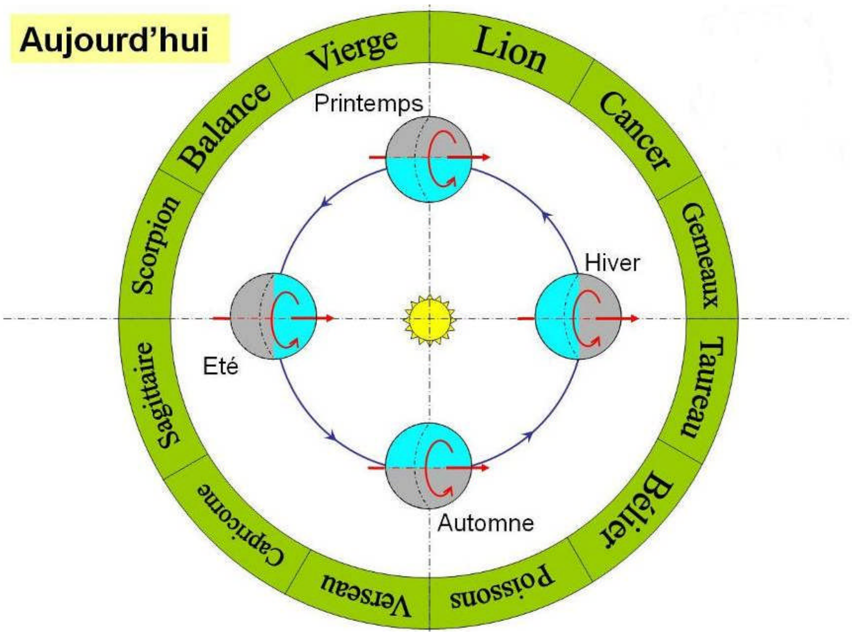
Le schéma ci-dessous présente la configuration actuelle de l'axe de rotation de la Terre par rapport aux constellations du zodiaque.

1) Qu'est-ce que la ligne vernale?

2) Qu'appelle-t-on précession des équinoxes?

3) Comment l'expliquer physiquement? Faire qualitativement une analogie avec le mouvement de la toupie autour d'un point fixe.

4) Quelles étaient les positions de la ligne vernale et de l'axe de rotation de la Terre il y a treize mille ans?



</td></tr>
<tr><td>n°3

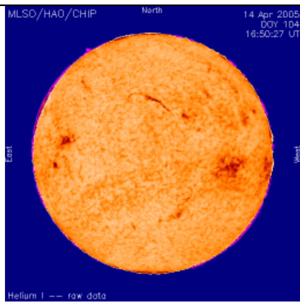
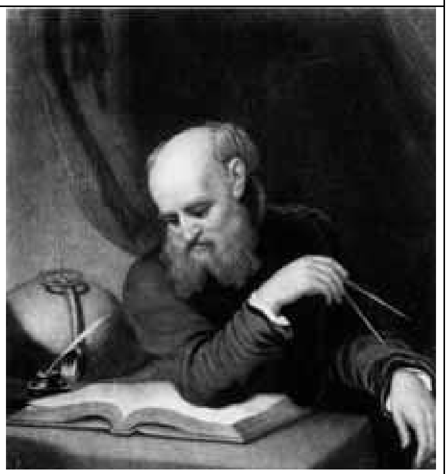
(4 pt)</td><td>

En 1787, William Herschel découvrait Uranus et deux de ses satellites, Titania et Obéron. Le rayon de l'orbite de Titania est 436 300 km et sa période de révolution est 8.707 jours. Le rayon de l'orbite d'Obéron est 583 500 km et sa période de révolution est 13.46 jours.

1) Ces deux satellites vérifient-ils la Troisième Loi de Kepler? Redémontrer simplement cette loi dans le cas d'une orbite circulaire.

2) Pouvez-vous déduire des paramètres de Titania et Obéron une valeur de la masse d'Uranus? Comparer avec la masse de la Terre.

</td></tr>
</table>

n°4 (2 pt)	 Le soleil tourne sur lui-même en approximativement 27 jours. 1) Qui a découvert cette rotation et par quelle observation? 2) Quel est le moment cinétique de rotation du soleil sur lui-même? 3) Quelle est l'énergie cinétique de cette rotation? 4) Que pouvez-vous dire sur la rotation du soleil quand il deviendra une Géante Rouge? La masse du soleil est 2 10^{30} kg, son rayon est 700 000 km et on prendra le rayon de l'orbite terrestre comme rayon de la Géante Rouge.
N°5 (4 pt)	Considérons un disque de masse M et de rayon R placé verticalement et qui peut osciller librement autour d'un axe horizontal passant par un point de la circonférence. On ne sait pas comment la matière est répartie dans le disque mais on sait que le centre d'inertie est au centre du disque. On ajoute une masse M au point diamétralement opposé à l'axe et on constate que la période des petites oscillations autour de l'axe est multipliée par $\sqrt{5/3}$. 1) Que pouvez-vous en déduire sur la répartition de matière dans le disque? 2) Comment la période aurait-elle été changée si le disque était composé d'un disque homogène comprenant un trou centré de diamètre $R/2$?
n°6 (4 pt)	Considérons une sphère et un cylindre homogènes roulant sans glisser sur un plan incliné de longueur 1 m et faisant un angle de 30° avec l'horizontale. 1) Comparer les mouvements des deux objets et préciser quelle condition doit vérifier le coefficient de friction entre les objets et le plan pour que soit vérifiée la condition de roulement sans glissement. 2) Quelles sont les valeurs de la vitesse au bout du plan incliné? On prendra g=10 m s^{-2}. 3) L'extrémité du plan incliné se trouve à 1 mètre au dessus du sol. Trouver la position des points d'impact des deux objets avec le sol. On négligera ici le rayon des objets. 
n°7 (4 pt)	Considérons un disque homogène de masse M, d'épaisseur E et de rayon R percé d'un trou centré de rayon $R/2$. Trouver l'expression de la matrice d'inertie de ce disque par rapport à son centre. Eviter au maximum les calculs en utilisant les symétries de l'objet et les diverses relations entre moments d'inertie. On souhaite faire tourner cet objet autour d'un axe passant par son centre à une vitesse angulaire donnée. Quel axe exigera le moins d'efforts pour entretenir ce mouvement?
n°8 (1 pt)	Eve l'accepta et moi m'inspira. Quand elle chut, moi la lumière m'échut. Qui suis-je ? 

Corrigé

n°1 :

Voir chapitre 2 section 2.3.2.

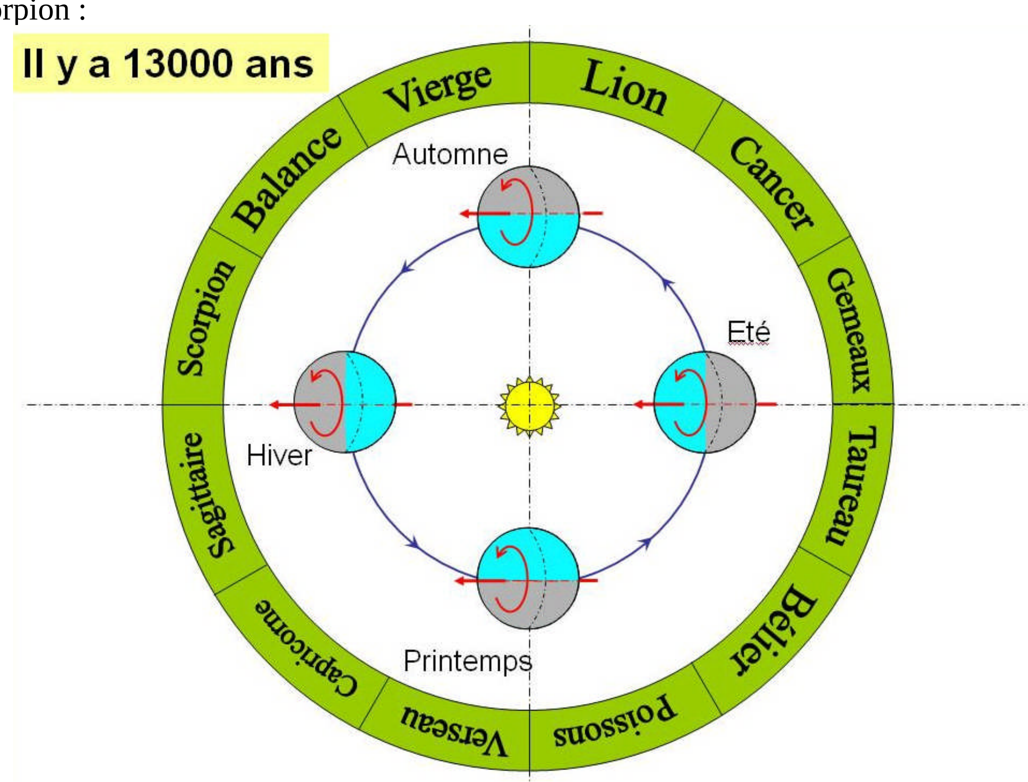
n°2 :

1) La ligne vernale est la droite du plan de l'écliptique joignant le centre du Soleil et le centre de la Terre à l'équinoxe de printemps. C'est aussi l'intersection entre le plan de l'écliptique et le plan équatorial de la Terre aux équinoxes.

2) Voir réponses aux questions de la feuille du 12 février 2007

3) Voir chapitre 5 section 5.4

4) Comme la période de la précession des équinoxes est d'environ 26 000 ans, l'axe de rotation était tourné d'un demi-tour il y a 13 000 ans. Il pointait donc entre les constellations du sagittaire et du scorpion :



n°3 :

1) Faisons l'hypothèse que les orbites de Titania et Obéron sont circulaires et de rayon a. Soient T les périodes de rotation. On a :

$$T_{\text{Titania}}/T_{\text{Obéron}}=0.6469\,. \qquad (1)$$

et

$$(a_{\text{Titania}}/a_{\text{Obéron}})^{3/2}=0.6466\,. \qquad (2)$$

On constate donc que le rapport des périodes est approximativement dans le rapport sesquilatère des rayons des orbites (troisième Loi de Kepler). Pour la démonstration de la Troisième Loi de Kepler, se reporter au corrigé de l'exercice 1 de la feuille MS3 du 20 février.

2) Si M est la masse d'Uranus, on a

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}\,. \qquad (3)$$

On obtient alors, en moyennant les résultats pour Obéron et Titania, la valeur suivante de la masse d'Uranus :

$$\boxed{M\text{=}8.735\ 10^{25}\ \text{kg}}\,. \qquad (4)$$

Comme la masse de la Terre est environ 6 10^{24} kg, le rapport de la masse d'Uranus à la masse de la Terre est environ 14.56.

n°4 :

1) La découverte de la rotation du soleil sur lui-même est en général attribuée à Galilée (1564-1642) suite à l'observation des tâches solaires. En fait, la première observation du mouvement des tâches solaires semble avoir été effectuée par Thomas Harriot (1560-1621).

2) Faisons l'hypothèse que le soleil est une sphère homogène de rayon $R_\odot$ et de masse $M_\odot$. Soit $\sigma_\odot$ son moment cinétique de rotation sur lui-même et $I_\odot$ son moment d'inertie par rapport à un axe passant par son centre.

On a :

$$I_\odot\text{=}\ \frac{2}{5}\ M_\odot\, R_\odot{}^2\text{=}\frac{2}{5}2\ 10^{30}\ (7\ 10^8)^2\text{=}3.92\ 10^{47}\ \text{kg m}^2\,. \qquad (5)$$

Soit $\omega_\odot$=2π/(27×86164) s^{-1}= 2.70 10^{-6} s^{-1} la vitesse angulaire de rotation du soleil. Notez qu'on a pris le jour sidéral égal à 86 164 s. On a alors :

$$\sigma_\odot\text{=}\omega_\odot I_\odot\text{=}3.92\ 10^{47}\times 2.70\ 10^{-6}\ \text{=}\boxed{1.06\ 10^{42}\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}}\,. \qquad (6)$$

3) Soit $E_{K\odot}$ l'énergie cinétique de rotation du soleil sur lui-même. On a :

$$E_{K\odot}\text{=}\frac{1}{2}\sigma_\odot\ \omega_\odot\text{=}\frac{1}{2}I_\odot\ \omega_\odot{}^2\text{=}\frac{1}{2}3.92\ 10^{47}\times(2.70\ 10^{-6})^2\text{=}\boxed{1.43\ 10^{36}\ \text{J}}\,. \qquad (7)$$

4) Supposons que la Géante Rouge est homogène (ce qui est probablement très abusif). Le moment d'inertie du soleil par rapport à l'axe de rotation sera modifié dans le rapport du rayon au carré, soit $(150\ 000\ 000/700\ 000)^2$=45918. Comme le soleil est isolé, son moment cinétique de rotation $\sigma_\odot$ sera conservé pendant son inflation. La vitesse angulaire de rotation sera donc diminuée dans le rapport de l'augmentation du moment d'inertie. La période de rotation sera alors 27×45918 jours, soit environ 3400 ans. L'énergie cinétique sera aussi diminuée dans le rapport 45918 (puisque $\sigma_\odot$ demeure constant) et donc deviendra :

$$E_{K\odot}'\text{=}\boxed{3.1\ 10^{31}\ \text{J}}\,. \qquad (8)$$

n°5 :

On connaît (chapitre 4, section 4.4.2) la période T des petites oscillations du pendule physique :

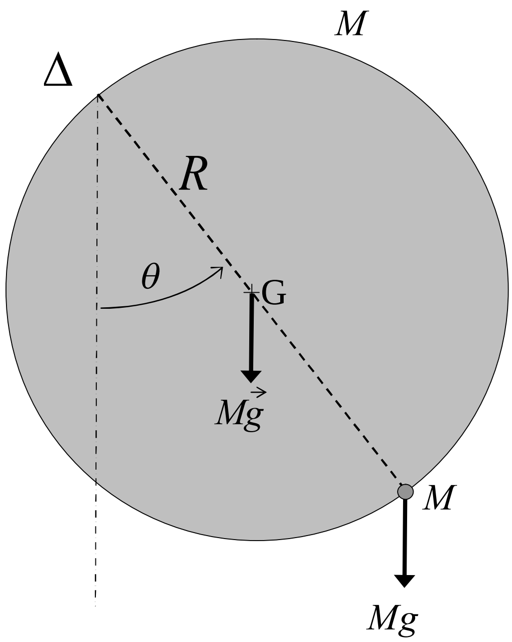
$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}\,. \qquad (9)$$

où M est la masse de l'objet, g l'accélération de la gravité, d la distance entre son centre d'inertie et l'axe de rotation et I_Δ le moment d'inertie de l'objet par rapport à cet axe.

Soit T_1 la période des petites oscillations de notre disque nu autour de l'axe Δ placé sur sa circonférence. On a :

$$T_1^2=\frac{4\pi^2}{g}\frac{I_\Delta}{MR}\,. \qquad (10)$$

Ajoutons une masse ponctuelle M :



La masse totale de l'objet est $2M$ et la position du centre d'inertie du disque augmenté de la masse ponctuelle est à une distance $3R/2$ de l'axe. La période T_2 des petites oscillations autour de l'axe Δ devient :

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g}\frac{I_\Delta + M4R^2}{3MR}\ . \tag{11}$$

L'énoncé indique que :

$$T_2^2 = \frac{5}{3}T_1^2\ , \tag{12}$$

d'où :

$$\frac{I_\Delta + 4MR^2}{3MR} = \frac{5}{3}\frac{I_\Delta}{MR}\ , \tag{13}$$

ce qui implique :

$$I_\Delta = MR^2 \tag{14}$$

Soit I_G le moment d'inertie du disque par rapport à un axe perpendiculaire à son plan passant par son centre d'inertie. D'après la règle de Steiner-Huygens, on a :

$$I_\Delta = I_G + MR^2 = MR^2\ . \tag{15}$$

Le moment d'inertie I_G est donc nul, ce qui impose que toute la masse M du disque est concentrée en son centre.

2) Le moment d'inertie I_G d'un disque homogène de masse M, de rayon R et percé d'un trou de rayon r, par rapport à un axe perpendiculaire à son plan passant par son centre d'inertie est :

$$I_G = \frac{1}{2}M\left(R^2 + r^2\right). \tag{16}$$

(voir corrigé de l'exercice 6 de la feuille MS3 du 20 février 2006).

Ici, on a $r=R/4$, donc :

$$I_G = \frac{1}{2}M\left(R^2 + \left(\frac{R}{4}\right)^2\right) = \frac{17}{32}MR^2\ . \tag{17}$$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ est alors, d'après la règle de Steiner-Huygens :

$$I_\Delta = I_G + MR^2 = \frac{49}{32}MR^2\ . \tag{18}$$

Comme au 1), on a alors :

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{g}\frac{I_\Delta}{MR} = \frac{4\pi^2}{g}\frac{49}{32}R \, , \tag{19}$$

et :

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g}\frac{I_\Delta + 4MR^2}{3MR} = \frac{4\pi^2}{g}\frac{1}{3}\left(\frac{49}{32}+4\right)R = \frac{4\pi^2}{g}\frac{1}{3}\frac{177}{32}R = \frac{4\pi^2}{g}\frac{59}{32}R \, . \tag{20}$$

La période des petites oscillations est donc multipliée par $\boxed{\sqrt{\frac{59}{49}}}$.

<u>n°6 :</u>

1) Considérons un objet symétrique par rapport à un axe Δ passant par son centre d'inertie G qui roule sans glisser sur un plan incliné parallèle à cet axe. Soit I le moment d'inertie de l'objet par rapport à cet axe. En généralisant le traitement effectué au chapitre 4 section 4.4.3, on montre aisément que l'accélération a du centre d'inertie est :

$$a = \frac{1}{1+\frac{I}{MR^2}} g \sin\theta \, . \tag{21}$$

et la condition de roulement sans glissement est :

$$\frac{\frac{I}{MR^2}}{1+\frac{I}{MR^2}} \tan\theta \leq f_S \, . \tag{22}$$

où f_s est le coefficient de friction statique entre l'objet et le plan.

Pour la sphère homogène, on a I=2/5MR^2, donc :

$$\boxed{a = \frac{5}{7} g \sin\theta = \frac{5}{7} 10 \frac{1}{2} = \frac{25}{7} \text{ m s}^{-2}} \tag{23}$$

et :

$$\boxed{\tan\theta \leq \frac{7}{2} f_S} \, . \tag{24}$$

Pour le cylindre homogène, on a I=1/2MR^2 donc :

$$\boxed{a = \frac{2}{3} g \sin\theta = \frac{2}{3} 10 \frac{1}{2} = \frac{10}{3} \text{ m s}^{-2}} \tag{25}$$

et :

$$\boxed{\tan\theta \leq 3 f_S} \, . \tag{26}$$

2) La vitesse acquise au bout d'une distance d lors d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération a est $\sqrt{2ad}$. On obtient donc :

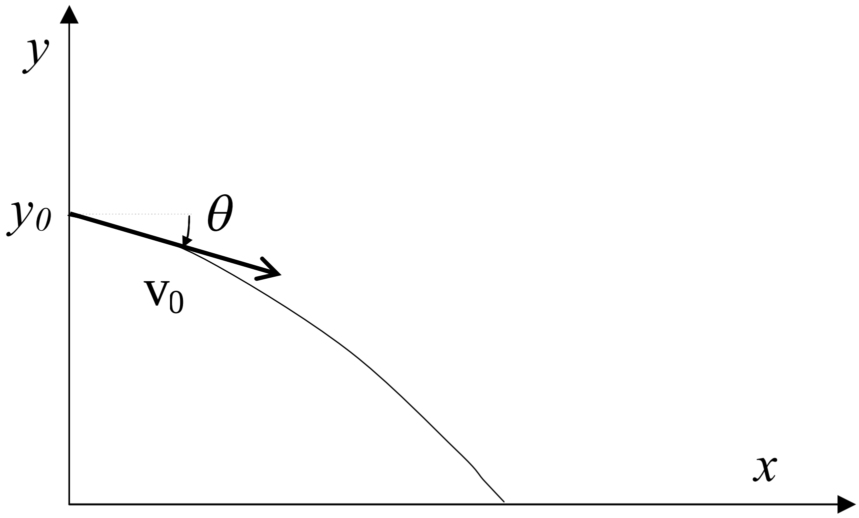
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{50}{7}} = 2.67 \text{ m s}^{-1}} \tag{27}$$

pour la sphère et :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{20}{3}} = 2.58 \text{ m s}^{-1}} \tag{28}$$

pour le cylindre.

3) Quand on néglige le rayon des objets, le problème se ramène à une trajectoire balistique d'un point matériel (encadré 1.1).



En prenant garde au signe négatif de l'angle initial (angle du plan incliné), l'équation de la trajectoire s'écrit :

$$y = y_0 - \tan 30° x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 30°}, \tag{29}$$

et la distance x du point de contact vérifie :

$$0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} x - \frac{20}{3} \frac{x^2}{v_0^2}. \tag{30}$$

Dans le cas de la sphère, cette équation devient :

$$\frac{14}{15} x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} x - 1 = 0, \tag{31}$$

et la solution positive est :

$$\boxed{x = \frac{15}{28}\left(\sqrt{\frac{61}{15}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 77 \quad \text{cm}}. \tag{32}$$

Dans le cas du cylindre, l'équation est :

$$x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} x - 1 = 0, \tag{33}$$

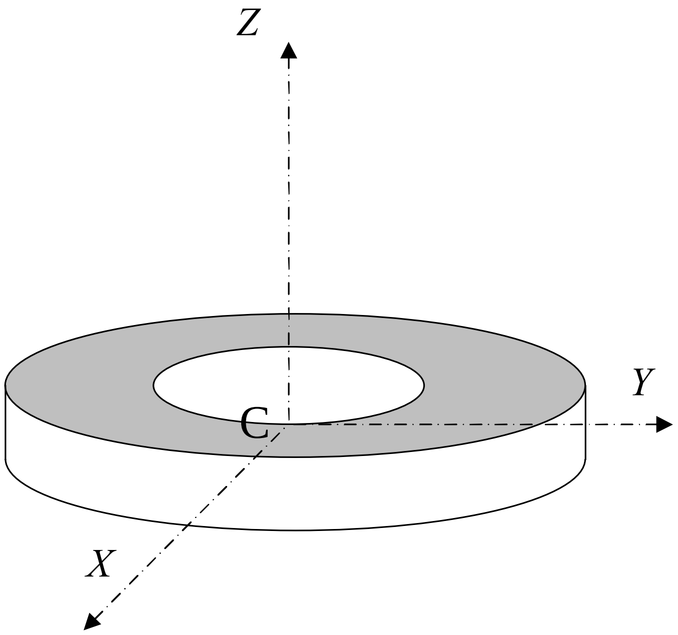
dont la solution positive est :

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{13}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 75 \quad \text{cm}}. \tag{34}$$

La sphère touche le sol 2 centimètres plus loin que le cylindre.

n°7 :

Soit C le centre de symétrie de la roue et faisons coïncider l'axe CZ avec l'axe de symétrie de révolution.



On peut aisément déduire, comme précédemment au n°5, le moment d'inertie I_{ZZ} :

$$I_{ZZ} = \frac{1}{2}M\left(R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right) = \frac{5}{8}MR^2 . \qquad (35)$$

Ce moment d'inertie peut aussi s'écrire comme la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires, qui par symétrie sont égaux. :

$$I_{ZZ} = \frac{1}{2}MR^2 = I_{\Pi XZ} + I_{\Pi YZ} = 2I_{\Pi XZ} = 2I_{\Pi YZ} . \qquad (36)$$

On a donc :

$$I_{\Pi XZ} = I_{\Pi YZ} = \frac{5}{16}MR^2 . \qquad (37)$$

Quant aux moments d'inertie par rapport aux autres axes, ils sont égaux par symétrie et s'écrivent aussi comme une somme de moment d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires :

$$I_{XX} = I_{YY} = I_{\Pi XY} + I_{\Pi XZ} . \qquad (38)$$

On connaît $I_{\Pi XZ}$ d'après (37). Reste à trouver $I_{\Pi XY}$, mais il s'agit du moment d'inertie par rapport à son plan médian d'un objet cylindrique, qui, comme on a vu dans le chapitre 3, vaut :

$$I_{\Pi XY} = \frac{1}{12}ME^2 . \qquad (39)$$

On a donc :

$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{1}{12}ME^2 + \frac{5}{16}MR^2 . \qquad (40)$$

La matrice d'inertie de la roue dans le repère CXYZ s'écrit donc :

$$\boxed{\bar{I}_C = \frac{M}{4}\begin{bmatrix} \frac{1}{3}E^2 + \frac{5}{4}R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}E^2 + \frac{5}{4}R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2}R^2 \end{bmatrix}} . \qquad (41)$$

L'axe qui exige le moins d'effort pour entretenir le mouvement est l'axe qui produit la plus grande variation de vitesse angulaire pour le plus faible couple, donc le plus petit moment d'inertie. Les moments d'inertie de la matrice sont tous égaux si $E^2/3=5R^2/4$, soit $E=\sqrt{15/4}R$.

Si E est inférieur à $\sqrt{15/4}R$, alors les axes qui demandent le moins d'efforts sont les axes dans le plan de symétrie du disque passant par son centre. Si E est supérieur à $\sqrt{15/4}R$, alors c'est l'axe de révolution CZ du disque.

n°8 :

Isaac Newton (1642-1727)