L2 - STEP
Physique pour les Sciences de l'univers
TD N°1

Vendredi 8 février 2008

Exercice 1 : Champs et potentiels

Tout point $M(x, y, z)$ de l'espace est défini par sa position par rapport à un point fixe arbitraire O : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$. On note la distance au point O : $OM = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Chaque question est indépendante.

1) Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r})$. Calculer le divergent de ce champ si $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}) = \frac{\overrightarrow{r}}{r}$, $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}) = f(r)\,\overrightarrow{r}$. Ces champs dérivent-ils d'un potentiel ? Si oui, pouvez-vous calculer lequel ?

2) On considère le champ scalaire $f(M) = \frac{\ln r}{r}$. Déterminer le champ vectoriel $\overrightarrow{u}(M)$ dérivé de ce potentiel.

3) Soit un champ vectoriel qui à un point de l'espace $M(x, y, z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u} = (xz, y, \phi(z))$. Déterminer ϕ pour que div $\overrightarrow{u} = z$.

4) Soit un champ scalaire $f(M) = xy + yz + xz$. On se place au point $A = (1, 1, 1)$: dans quelle direction la variation du champ est-elle la plus rapide ? Et au point $B = (1, 2, 3)$?

Exercice 2 : Calculs simples

1) Soit un champ scalaire $f(r) = r$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Calculer le gradient de ce champ scalaire, en coordonnées cartésiennes, puis en sphériques.
2) Justifier pourquoi, si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(u) = \frac{df}{du}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u$.
3) Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$, pour f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

a. $f(r) = r^n$, $n \in \mathbb{N}$,

b. $f(r) = 1/r$,

c. $f(r) = 1/r^n$, $n \in \mathbb{N}$,

d. $f(r) = \ln r$.

Exercice 3 : Règles de calcul vectoriel

Montrer les 7 égalités suivantes ; et retenir en particulier les résultats des points 1) 2) 3) 7).

1) $\overrightarrow{\nabla}(\lambda\mu) = \lambda\overrightarrow{\nabla}\mu + \mu\overrightarrow{\nabla}\lambda$.

2) $\overrightarrow{\nabla} \cdot (\lambda \overrightarrow{A}) = \lambda \ (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{\nabla} \lambda) \cdot \overrightarrow{A}$.

3) $\overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = -\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B}) + (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{B}$.

Plus difficile (moins fréquent)

4) $\overrightarrow{\nabla} \times (\lambda \overrightarrow{A}) = \lambda \, (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{\nabla} \lambda) \times \overrightarrow{A}$.

5) Double produit vectoriel : $\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C})\overrightarrow{B} - (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B})\overrightarrow{C}$.

6) Application pour : $\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{A} \ \ (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}) - \overrightarrow{B} \ \ (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{A} - (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B}$.

Très important

7) Calculer div $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$, div $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$.