Licence STEP L2 Module Physique pour les géosciences S4

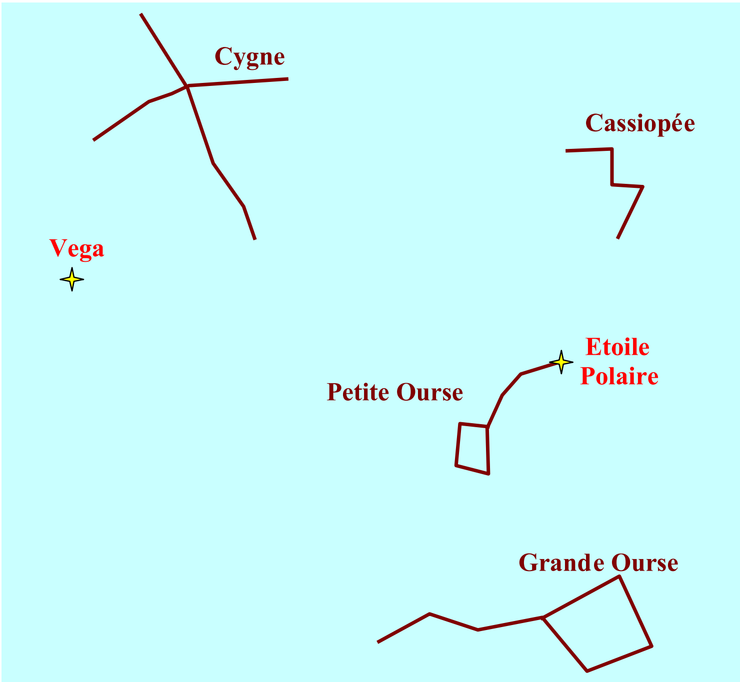
Mécanique des solides et des planètes

Examen écrit du 14 avril 2007 suivi du corrigé

Documents autorisés: néant, calculette : tolérée. Veillez à soigner la rédaction. Durée : 4 heures

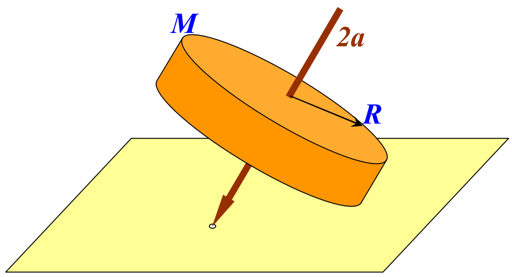
<table>
<tr><td>n°1

(3 pt)</td><td>1) Décrire et expliquer le phénomène physique de précession des équinoxes. Quel est le rapport avec le mouvement de la toupie posée sur un point fixe?
2) Après avoir reproduit la carte du ciel (très simplifiée) donnée ci-dessous, dessiner la courbe décrivant le mouvement de l'axe de rotation de la Terre au cours du temps. Quel est le sens du mouvement sur cette courbe ? Où pointait l'axe de rotation de la Terre au moment de la civilisation algérienne pré-égyptienne du Tassili N'ajjer (6000 ans avant JC)?




</td></tr>
<tr><td>n°2

(2 pt)</td><td>1) Qu'est-ce que le théorème du moment cinétique? A quoi sert-il ?
2) Considérons une toupie formée d'un disque homogène de masse M et de rayon R placé au centre d'une tige sans masse de longueur $2a$. Quel est le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par la tige?
3) On lance cette toupie avec une vitesse angulaire de rotation propre ω. Que se passe-t-il?



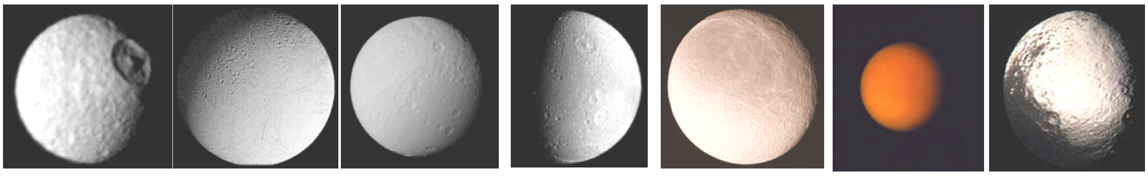
</td></tr>
<tr><td>n°3

(3 pt)</td><td>Considérons une roue formée d'un cylindre de bois homogène de rayon 1 m et d'épaisseur 10 cm. Cette roue est cerclée par une épaisseur de 1 cm de fer. Donner les valeurs des éléments de la matrice principale centrale d'inertie de cette roue. La masse volumique du bois est 0.55 g·cm^{-3} et celle du fer 7.3 g·cm^{-3}. On assimilera le cerclage de fer à un cerceau fin de rayon 1 m.</td></tr>
</table>

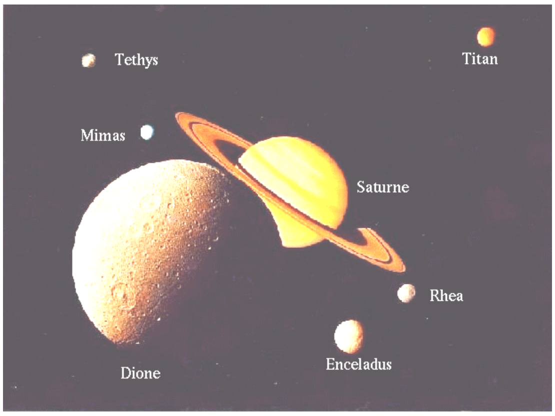
n°4

(5 pt)

1) Considérons les satellites de Saturne découverts aux XVIIème et XVIIIème siècles, dont quelques paramètres sont rassemblés dans le tableau ci-dessous.



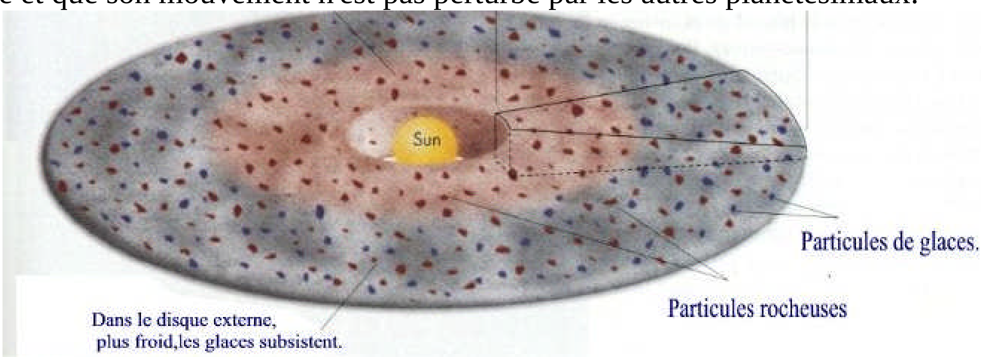
Nom	Découvert par	En	Distance à Saturne (10^6 km)	Période (jour sidéral)	Masse (10^{19} kg)
Mimas	Herschel	1789	0.1856	0.942	3.8
Encelade	Herschel	1789	0.2381	1.37	7.3
Téthys	Cassini	1684	0.2947	1.888	62.
Dioné	Herschel	1789	0.3774	2.737	110.
Rhéa	Cassini	1672	0.5271	4.518	230.
Titan			1.2219	15.95	1.34×10^4
Iapetus	Cassini	1671	3.5608	79.33	160.



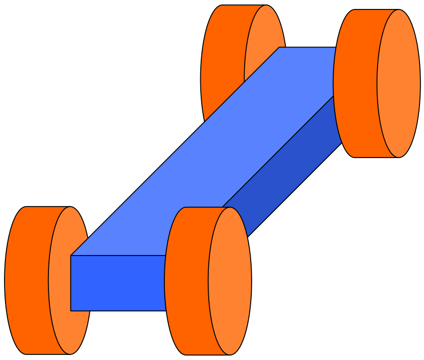
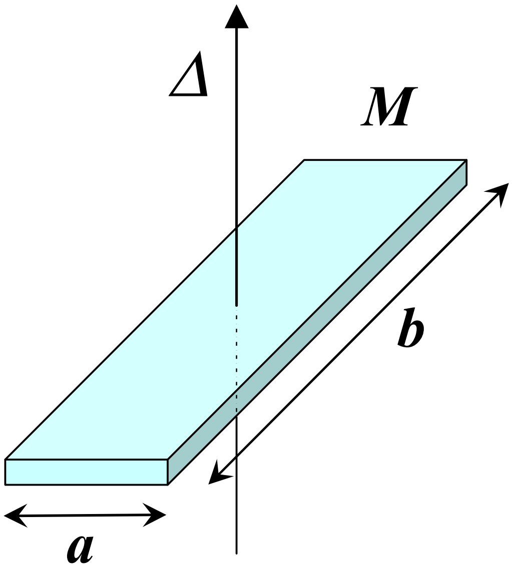
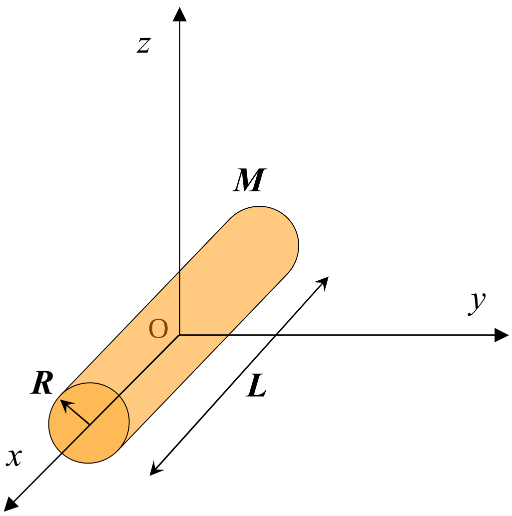
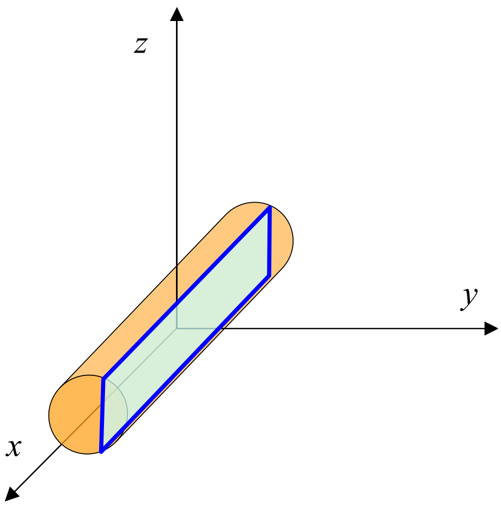
1a: Qui a découvert Titan et quand?
1b: Ces satellites vérifient-ils la Troisième Loi de Kepler?
1c: Quelle valeur déduit-on pour la masse de Saturne? Exprimer cette valeur en unité de masse de la Terre.
1d: Donner la valeur du moment cinétique de rotation autour de Saturne pour chacun de ces satellites.

2) Considérons un pendule de période 1 s à la surface de la Terre. Quelle est sa période à la surface de Titan? Le diamètre de Titan est 5150 km.

3) Considérons un corps de masse m en orbite circulaire de rayon r autour d'un astre de masse M. Donner l'expression du moment cinétique de ce corps en fonction de r. Considérons un disque fin de planétésimaux en rotation autour d'une étoile. Imaginons que la densité surfacique de matière dans ce disque varie comme $\sqrt{r}\exp(-r/a)$, où a est une longueur caractéristique. Calculer le moment cinétique total de rotation du disque autour de l'astre. On considérera que chaque planétésimal ne ressent que l'attraction de l'étoile et que son mouvement n'est pas perturbé par les autres planétésimaux.

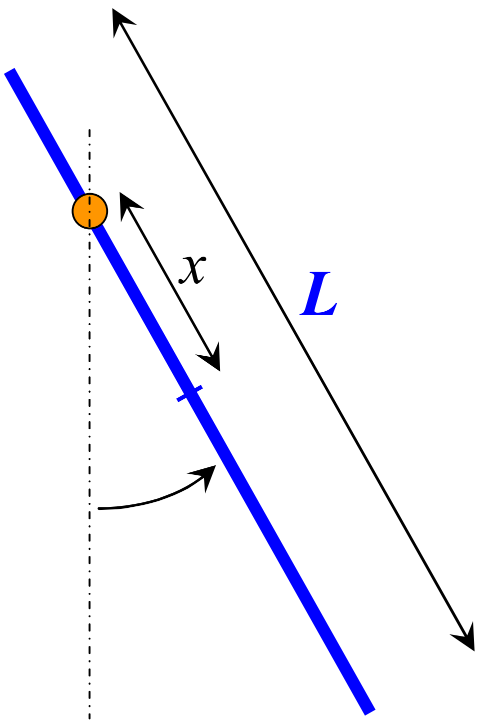


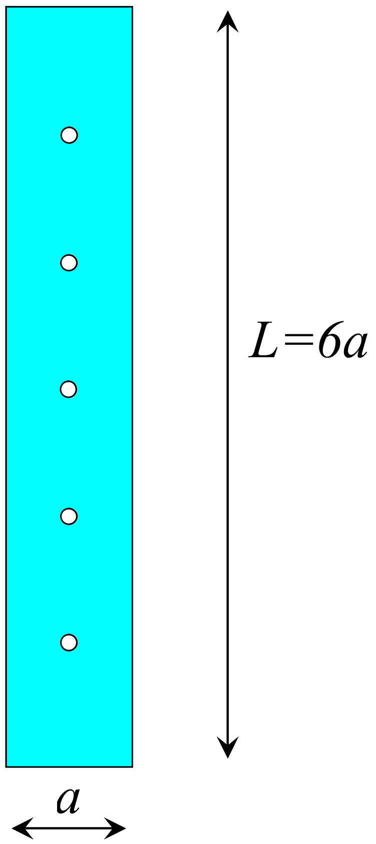
(illustration: Paris 7)

n°5 (3 pt)	Considérons un chariot de masse M équipé de quatre roues chacune de masse $M/2$. Chaque roue tourne sans frottement et sera assimilée à un cerceau. On fait rouler sans glissement ce chariot sur un plan incliné. On notera f le coefficient de frottement des roues sur le plan incliné. Quelle est l'accélération du chariot et quelle condition doit vérifier l'angle θ du plan incliné avec l'hirozontale pour que la condition de roulement sans glissement soit vérifiée? 
n°6 (4 pt)	1) Considérons une plaque fine homogène de masse M et de côtés a et b. Quel est le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ perpendiculaire à son plan passant par son centre d'inertie?  2) Considérons un cylindre homogène de masse M, de rayon R et de longueur L. Donner, en utilisant les moments d'inertie par rapport aux plans de symétrie, l'expression de la matrice d'inertie dans le repère Oxyz indiqué sur le schéma ci-dessous à gauche. 3) Calculer directement le moment d'inertie par rapport à l'axe Oy. Pour cela, diviser le cylindre en plaques infiniment fines perpendiculaires à cet axe, comme indiqué sur le schéma ci-dessous à droite. Utiliser le résultat obtenu en 1) et intégrer.  

<table>
<tr>
<td>n°7

(4 pt)</td>
<td>1) Considérons une tige fine de longueur L. Cette tige est munie d'un support sans masse coulissant qui lui permet d'osciller autour d'un axe perpendiculaire à elle-même et la maintenant dans un plan vertical (figure ci-dessous à gauche). Soit x la distance entre le support et le centre de la tige. Considérer le rapport de la période des petites oscillations de cette tige par rapport à la période du pendule simple de longueur L. Représenter et discuter le graphe de variation de ce rapport en fonction de x compris entre 0 et $L/2$.
2) Considérons une plaque fine de mécano 6 fois plus longue que large équipée de 5 petits trous équidistants (figure ci-dessous à droite). On fait osciller cette plaque autour d'un axe horizontal qui lui est perpendiculaire et passant par un des petits trous. Le rapport de la période de ces petites oscillations à la période du pendule simple de même longueur que la plaque est $\sqrt{85}/12$. Quel est ou quels sont les trous qui avaient été choisis?





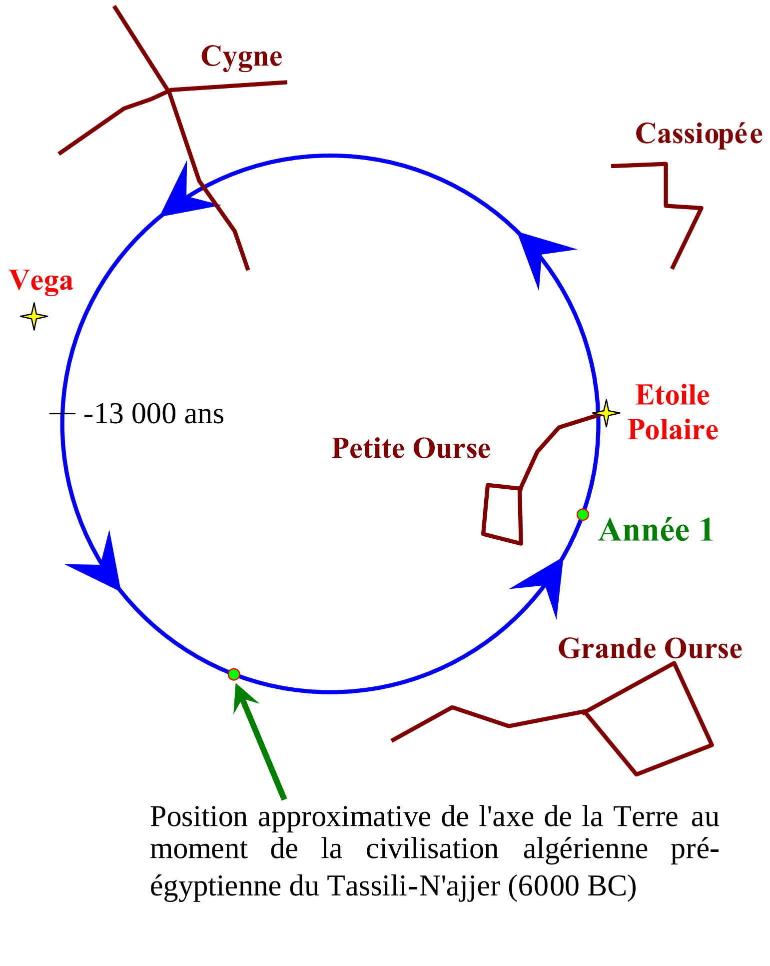
</td>
</tr>
</table>

Corrigé

n°1 :

1) Voir cours chapitre 5 et réponses aux questions du 11 février et 10 mars 2008. Attention à bien expliquer le sens des mouvements en précisant par rapport à quelle référence. Attention à ne pas confondre le couple de la Lune ou du soleil sur l'axe de rotation de la Terre avec les forces de marée! Aussi, l'aplatissement de la Terre ne doit pas être confondu avec les marées. C'est la rotation propre de la Terre qui est cause de son aplatissement, et non pas l'attraction de la Lune ou du Soleil.

2) La trajectoire du pôle nord sur la voûte céleste vue depuis la Terre est un cercle, dessiné ci-dessous, décrit dans le sens trigonométrique (direct). Son ouverture angulaire est égale à deux fois l'angle entre l'axe de rotation de la Terre et la normale au plan de l'écliptique (23°27') soit 46°54'. La position approximative de l'axe de rotation de la Terre en 6000 avant JC (soit 8000 ans avant notre époque!) est indiquée sur le schéma.



n°2 :

1) Le théorème du moment cinétique dit que la dérivée par rapport au temps du moment cinétique total d'un système par rapport à un point fixe P est égale au moment résultant par rapport à P de toutes les forces.

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_P = \vec{\Gamma}_P \,. \qquad (1)$$

Ce théorème permet de résoudre les problèmes de mécanique du solide en le combinant au théorème de la quantité de mouvement.

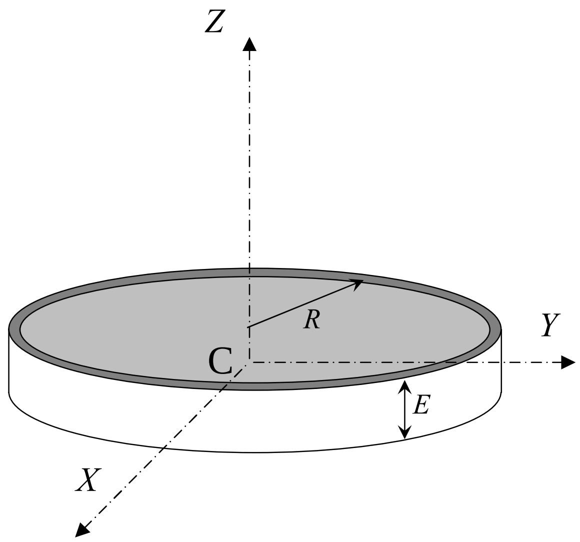
2) Le moment d'inertie demandé est:

$$I_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 \tag{2}$$

3) Voir chapitre 5. La toupie posée sur un point fixe va effectuer un mouvement de précession de vitesse angulaire donnée par:

$$\dot{\varphi} = \frac{Mga}{I_\Delta \omega} = \frac{2Mga}{MR^2\omega} = \frac{2ga}{R^2\omega}\ . \tag{3}$$

n°3 :



Soit M la masse du disque de bois et m la masse du cerclage de fer assimilé à un cerceau. Soit R le rayon du disque et E son épaisseur. On a:

$$\begin{cases} M = \left(550\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}\right)\times\left(\pi\times 1^2\times 0.1\,\mathrm{m}^3\right)\cong 173\,\mathrm{kg} \\ m = \left(7300\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}\right)\times\left(2\pi\times 1\times 0.01\times 0.1\mathrm{m}^3\right)\cong 46\,\mathrm{kg} \end{cases} \tag{1}$$

On définit un repère OXYZ comme représenté sur la figure ci-dessus, O étant le centre d'inertie de la roue. On peut aisément écrire, en utilisant les résultats connus pour le moment d'inertie par rapport à leur axe de révolution d'un disque homogène ou d'un cerceau, le moment d'inertie I_{ZZ} :

$$I_{ZZ} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = \frac{1}{2}(M+2m)R^2\ . \tag{2}$$

Ce moment d'inertie peut aussi s'écrire comme la somme des moments d'inertie par rapport aux deux plans perpendiculaires XZ et YZ, qui par symétrie sont égaux. :

$$I_{ZZ} = I_{\Pi XZ} + I_{\Pi YZ} = 2I_{\Pi XZ} = 2I_{\Pi YZ}\ . \tag{3}$$

On a donc :

$$I_{\Pi XZ} = I_{\Pi YZ} = \frac{1}{4}(M+2m)R^2\ . \tag{4}$$

Quant aux moments d'inertie par rapport aux autres axes, ils sont égaux par symétrie et s'écrivent aussi comme une somme de moment d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires :

$$I_{XX} = I_{YY} = I_{\Pi XY} + I_{\Pi XZ}\ . \tag{5}$$

On connaît $I_{\Pi XZ}$ d'après (4). Reste à trouver $I_{\Pi XY}$, mais il s'agit du moment d'inertie par rapport à son plan médian d'un objet cylindrique, qui, comme on a vu dans le chapitre 3, vaut :

$$I_{\Pi XY} = \frac{1}{12}(M+m)E^2 \,. \tag{6}$$

On a donc :

$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{1}{4}(M+2m)R^2 + \frac{1}{12}(M+m)E^2 = \frac{1}{4}(M+2m)R^2\left[1+\frac{1}{3}\frac{M+m}{M+2m}\left(\frac{E}{R}\right)^2\right]. \tag{7}$$

La matrice d'inertie de la roue cerclée dans le repère OXYZ s'écrit donc :

$$\boxed{\bar{I}_O = \frac{1}{4}(M+2m)R^2\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{3}\frac{M+m}{M+2m}\left(\frac{E}{R}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{3}\frac{M+m}{M+2m}\left(\frac{E}{R}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}. \tag{8}$$

Dans notre cas, on a:

$$\begin{cases} M+2m \cong 265\,\mathrm{kg} \\ \frac{1}{3}\frac{M+m}{M+2m}\left(\frac{E}{R}\right)^2 \cong 0.003 \end{cases}. \tag{9}$$

On peut donc négliger le terme en E^2 et on a:

$$\boxed{\bar{I}_O \cong \begin{bmatrix} 66 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 \\ 0 & 0 & 132 \end{bmatrix} \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}. \tag{10}$$

<u>Remarque:</u> On peut aussi traiter séparément le disque de bois et le cerceau représentant le cerclage de fer, on obtient alors simplement:

$$\boxed{\bar{I}_O = M\begin{bmatrix} \frac{1}{4}R^2+\frac{1}{12}E^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}R^2+\frac{1}{12}E^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}R^2 \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} \frac{1}{2}R^2+\frac{1}{12}E^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}R^2+\frac{1}{12}E^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{bmatrix}}. \tag{11}$$

<u>n°4 :</u>

1a) C'est Christiaan Huygens (1629-1695) en 1655.

1b) Voir détails dans les corrigés des exercices. Retrouvons pour commencer la Troisième Loi de Kepler. Pour cela, on peut se placer par exemple dans un repère (non galiléen) lié à l'objet en rotation autour de l'astre et, dans ce repère, à l'équilibre, la force d'attraction gravitationnelle compense la force d'inertie centrifuge, ce qui s'écrit:

$$G\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \,, \tag{1}$$

où M est la masse de l'astre attracteur, m celle de l'objet, R le rayon de l'orbite circulaire, ω la vitesse angulaire de rotation et T la période.

On a donc (Troisième Loi de Kepler):

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} . \qquad (2)$$

On peut calculer la masse de Saturne en utilisant (2) :

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{R^3}{T^2} . \qquad (3)$$

Les valeurs calculées pour chaque satellite sont données dans la table ci-après. On constate que la valeur est approximativement la même pour chaque satellite. On peut donc en conclure que ces satellites de Saturne effectivement vérifient la Troisième Loi de Kepler.

1c) En moyennant toutes ces valeurs, on obtient une valeur de 5.72×10^{26} kg pour la masse de Saturne, soit **$M_{Saturne}$=95.8** en unité de masse de la Terre (~6×10^{24} kg). Pour ces calculs, on utilise que jour sidéral vaut approximativement 86164 s (voir réponses aux questions de préparation du cours, question 1 du 3 mars 2008).

1d) Le moment cinétique σ d'un objet de masse m en rotation uniforme sur une orbite de rayon R et de vitesse V est:

$$\sigma = R \times mV = mR \times \frac{2\pi R}{T} = 2\pi m \frac{R^2}{T} . \qquad (4)$$

Les valeurs calculées pour le moment cinétique de chaque satellite sont données dans la table ci-après.

Nom	Découvert par	En	Distance à Saturne (10^6 km)	Période (jour sidéral)	**Masse de Saturne calculée (10^{26} kg)**	Masse (10^{19} kg)	**Moment cinétique autour de Saturne (10^{32} kg·m^2·s^{-1})**
Mimas	Herschel	1789	0.1856	0.942	**5.742**	3.8	**1.01**
Encelade	Herschel	1789	0.2381	1.37	**5.732**	7.3	**2.20**
Téthys	Cassini	1684	0.2947	1.888	**5.722**	62.	**20.8**
Dioné	Herschel	1789	0.3774	2.737	**5.719**	110.	**41.7**
Rhéa	Cassini	1672	0.5271	4.518	**5.718**	230.	**103**
Titan	**Huygens**	**1655**	1.2219	15.95	**5.715**	1.34×10^4	**9150**
Iapetus	Cassini	1671	3.5608	79.33	**5.718**	160.	**186**

2) La période du pendule est inversement proportionnelle à la racine de l'accélération de la gravité. L'accélération de la gravité à la surface de Titan g_{Titan} est:

$$g_{Titan} = 6.67\times10^{-11} \frac{1.34\times10^{23}}{\left(2575\times10^3\right)^2} \cong 1.35 \text{ m·s}^{-2}. \qquad (5)$$

La période du pendule à la surface de Titan est donc:

$$T_{Titan} = 1s\sqrt{\frac{9.8}{1.35}} \cong \boxed{2.7 \text{ s}}, \qquad (6)$$

3) Comme plus haut, le moment cinétique σ d'un corps de masse m s'écrit:

$$\sigma = 2\pi m \frac{r^2}{T} . \qquad (7)$$

Mais, en utilisant la Troisième Loi de Képler, on peut éliminer la période T. En effet:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{3/2} , \qquad (8)$$

d'où:

$$\sigma = 2\pi m \frac{r^2}{T} = m \frac{\sqrt{GM}}{r^{3/2}} r^2 = \boxed{m\sqrt{GM}\, r^{\frac{1}{2}}} . \qquad (9)$$

Soit $\rho = \alpha\sqrt{r}e^{-\frac{r}{a}}$ la densité surfacique de matière du disque. Le moment cinétique total σ_{disque} du disque s'écrit:

$$\sigma_{disque} = \int \sqrt{GM}\, r^{\frac{1}{2}} \rho dS \, , \qquad (10)$$

où dS est un élément de surface du disque. Le disque étant à symétrie radiale, on a :

$$\sigma_{disque} = \int \sqrt{GM}\, r^{\frac{1}{2}} \rho 2\pi r dr = 2\pi\sqrt{GM}\,\alpha \int_0^\infty \sqrt{r}e^{-\frac{r}{a}} r^{\frac{3}{2}} dr = 2\pi\sqrt{GM}\,\alpha \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r}{a}} dr \, . \qquad (11)$$

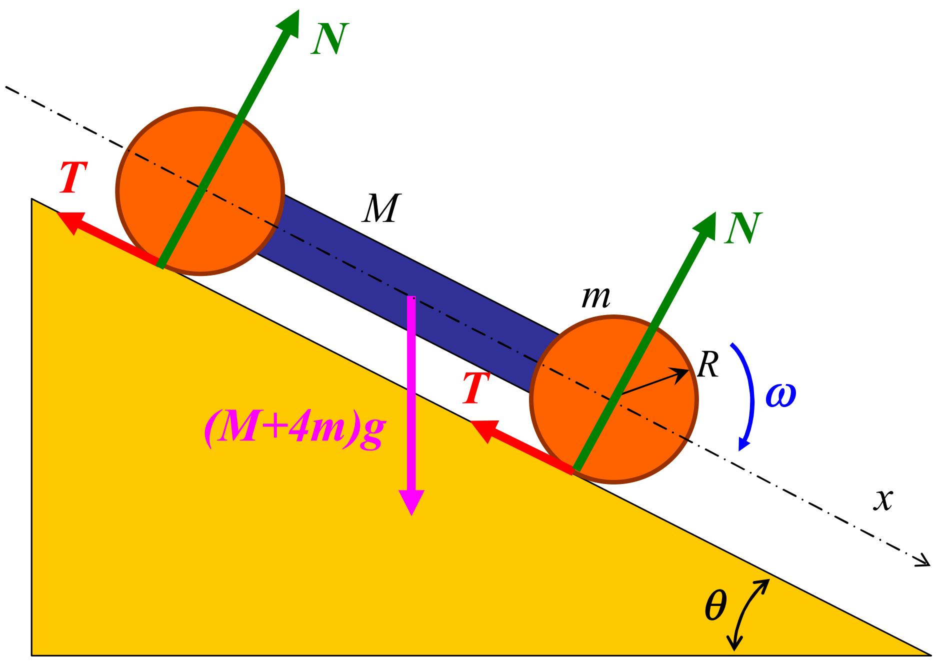
On calcule l'intégrale en intégrant deux fois par parties:

$$\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r}{a}} dr = \left[-ar^2 e^{-\frac{r}{a}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2r\left(-ae^{-\frac{r}{a}}\right)dr = 2a\int_0^\infty re^{-\frac{r}{a}}dr =$$
$$2a\left[\left[-are^{-\frac{r}{a}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty\left(-ae^{-\frac{r}{a}}\right)dr\right] = 2a^2\int_0^\infty e^{-\frac{r}{a}}dr = 2a^2\left[-ae^{-\frac{r}{a}}\right]_0^\infty = 2a^3 \qquad (12)$$

d'où:

$$\boxed{\sigma_{disque} = 4\pi\alpha\sqrt{GM}\, a^3} . \qquad (13)$$

<u>n°5 :</u>



Soit m la masse de chaque roue du chariot, R leur rayon et I leur moment d'inertie par rapport à leur axe de rotation. Soit x la position du centre d'inertie du chariot roulant sur le plan incliné, et soit ω la vitesse de rotation angulaire de chaque roue, comptée positivement quand le chariot roule vers le bas.

La condition de roulement sans glissement des roues s'écrit:

$$\dot{x} = \omega R \, . \qquad (1)$$

Soit N et T les modules des composantes normales et tangentielles, respectivement, de la réaction du plan incliné sur chaque roue. Le théorème de la quantité de mouvement appliqué au chariot fournit:

$$\begin{cases} 0 = 4N - (M+4m)g\cos\theta \\ (M+4m)\ddot{x} = (M+4m)g\sin\theta - 4T \end{cases} \tag{2}$$

et, le théorème du moment cinétique, appliqué à chaque roue :

$$I\dot{\omega} = RT\,. \tag{3}$$

Comme on assimile les roues à des cerceaux, on a $I=mR^2$, et donc:

$$T = \frac{I\dot{\omega}}{R} = \frac{mR^2\ddot{x}}{R^2} = m\ddot{x}\,. \tag{4}$$

En reportant dans la deuxième équation de (2),

$$(M+4m)\ddot{x} = (M+4m)g\sin\theta - 4m\ddot{x}\,, \tag{5}$$

on trouve l'accélération du chariot:

$$\ddot{x} = \frac{M+4m}{M+8m}g\sin\theta = \frac{M+2M}{M+4M}g\sin\theta\,, \tag{6}$$

soit:

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{3}{5}g\sin\theta}\,. \tag{7}$$

Pour que la condition de roulement sans glissement soit vérifiée, il faut que le rapport T/N demeure inférieur au coefficient de frottement statique f, soit:

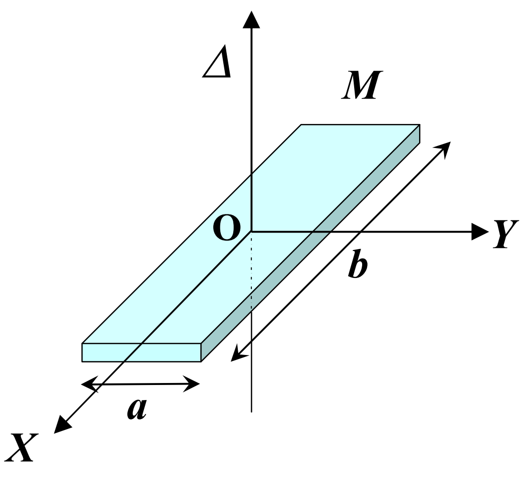
$$\frac{T}{N} = \frac{m\ddot{x}}{\frac{M+4m}{4}g\cos\theta} = \frac{\frac{M}{2}}{\frac{3M}{4}}\frac{\ddot{x}}{g\cos\theta} = \frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\tan\theta < f\,. \tag{8}$$

soit:

$$\boxed{\tan\theta < \frac{5}{2}f}\,. \tag{9}$$

n°6 :

1) Soit OX et OY les axes perpendiculaires à l'axe Δ et parallèles aux côtés de la plaque, O étant le centre d'inertie de la plaque.



Comme la section de la plaque est invariante par translation le long des deux axes OX et OY, on connaît les moments d'inertie par rapports aux plans médians ΠXΔ et ΠYΔ:

$$I_{\Pi Y\Delta} = \frac{1}{12}Ma^2 \quad \text{et} \quad I_{\Pi X\Delta} = \frac{1}{12}Mb^2 \,. \tag{1}$$

Le moment d'inertie I_Δ par rapport à l'axe Δ peut s'écrire comme la somme des moments d'inertie par rapport aux deux plans perpendiculaires OXΔ et OYΔ, et donc:

$$\boxed{I_\Delta = \frac{1}{12}M\left(a^2+b^2\right)} \,. \tag{2}$$

2) Pour le cylindre, le moment d'inertie I_{xx} est connu:

$$I_{xx} = \frac{1}{2}MR^2 \,. \tag{3}$$

Ce moment d'inertie peut aussi s'écrire comme la somme des moments d'inertie par rapport aux deux plans perpendiculaires xy et xz, qui par symétrie sont égaux. :

$$I_{zz} = I_{\Pi xy} + I_{\Pi xz} = 2I_{\Pi xy} = 2I_{\Pi xz} \,. \tag{4}$$

On a donc :

$$I_{\Pi xz} = I_{\Pi xy} = \frac{1}{4}MR^2 \,. \tag{5}$$

Quant aux moments d'inertie par rapport aux autres axes, ils sont égaux par symétrie et s'écrivent aussi comme une somme de moment d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires :

$$I_{yy} = I_{zz} = I_{\Pi xy} + I_{\Pi yz} \,. \tag{6}$$

Reste à trouver I_{yz}, mais il s'agit du moment d'inertie par rapport à son plan médian d'un objet cylindrique, qui, comme on a vu dans le chapitre 3, vaut :

$$I_{\Pi yz} = \frac{1}{12}ML^2 \,. \tag{7}$$

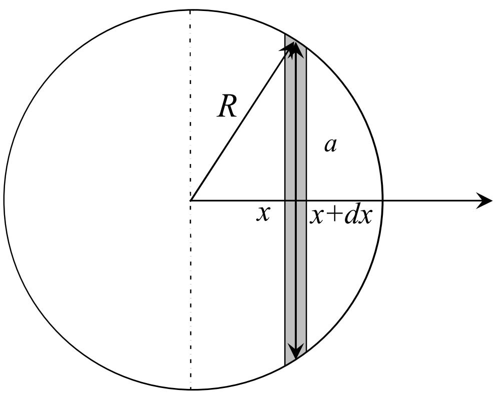
On a donc :

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 \,. \tag{8}$$

La matrice d'inertie du cylindre dans le repère Oxyz s'écrit donc :

$$\boxed{\bar{I}_O = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 \end{bmatrix}} \,. \tag{9}$$

3) Comme suggéré dans l'énoncé, on divise le cylindre en plaques infiniment fines d'épaisseur *dx*, de largeur *a* et de longueur *L*.



Soit ρ la masse volumique du cylindre. On a $\rho = M/\pi R^2 L$. La masse *dm* de la plaque s'écrit:

$$dm = \rho dxaL = \frac{M}{\pi R^2 L} \times 2\sqrt{R^2 - x^2} \times Ldx = \frac{2M}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx \ . \qquad (10)$$

Le moment d'inertie dI par rapport à l'axe Ox de la petite plaque de masse dm s'écrit, en utilisant les résultats du 1):

$$dI = \frac{1}{12}dm\left(a^2 + L^2\right) = \frac{1}{12}dmL^2 + \frac{2M}{3\pi R^2}\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx \ . \qquad (11)$$

Pour trouver le moment d'inertie I du cylindre par rapport à l'axe Oy, on intègre entre $x=-R$ et $x=+R$, soit:

$$I = \int_{-R}^{R} dI = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{4M}{3\pi R^2}\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx \ . \qquad (12)$$

Pour calculer l'intégrale, on pose $x=R\sin\theta$:

$$\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(R^2\cos\theta^2\right)^{\frac{3}{2}}R\cos\theta d\theta = R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta = R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{R^4}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2\theta d\theta\right] \qquad (13)$$

$$= \frac{R^4}{4}\left[\frac{\pi}{2} + 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4\theta}{2}d\theta\right] = \frac{R^4}{4}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta d\theta\right] = \frac{3\pi R^4}{16}$$

On a donc:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{4M}{3\pi R^2}\times\frac{3\pi R^4}{16} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}MR^2 \ . \qquad (14)$$

On retrouve bien le résultat obtenu en 2), par une méthode certes moins élégante et plus calculatoire…

n°7 :

1) On sait (chapitre 4, section 4.4.2) que la période T des petites oscillations du pendule physique est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}} \ , \qquad (1)$$

où g est l'accélération de la gravité, d la distance entre son centre d'inertie et l'axe de rotation et I_Δ le moment d'inertie du pendule par rapport à cet axe. D'après la règle de Steiner-Huygens, I_Δ est lié au moment d'inertie I_G par rapport à l'axe parallèle à Δ passant par le centre d'inertie G, ici le milieu de la barre:

$$I_\Delta = I_G + Mx^2 \ . \qquad (2)$$

On connaît I_G, ou on utilise le résultat du 1) de l'exercice 6: $I_G=ML^2/12$. On a donc:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}ML^2 + Mx^2}{Mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}L^2 + x^2}{gx}} \ . \qquad (3)$$

La période T_0 des petites oscillations du pendule simple est $T_0=2\pi\sqrt{L/g}$. On a donc:

$$\boxed{\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{L^2+12x^2}{12xL}}}\,. \qquad (4)$$

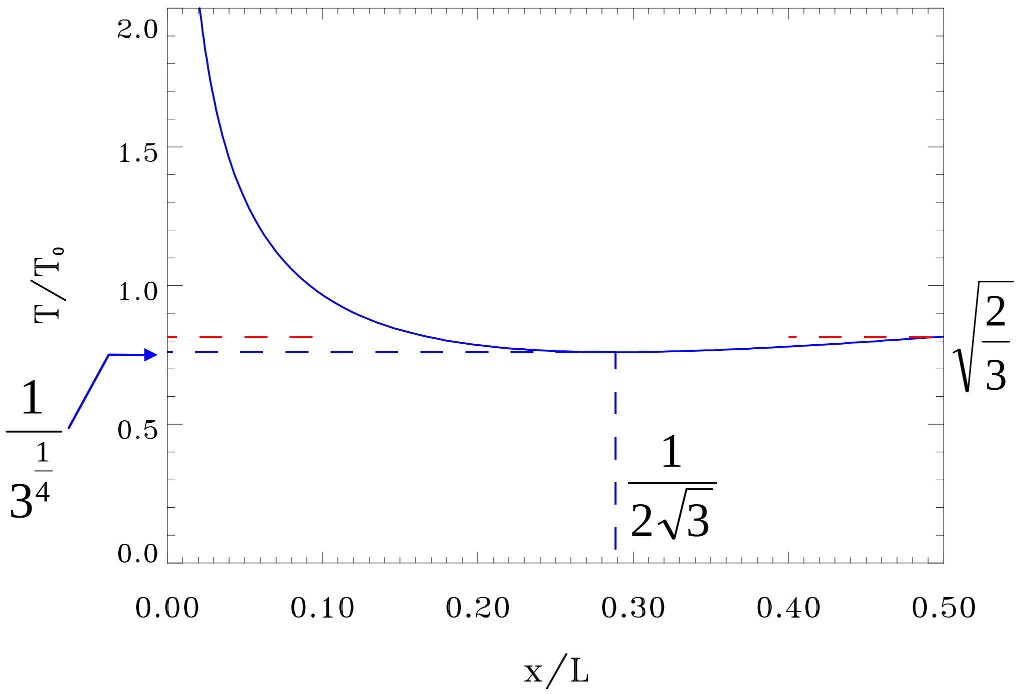
Le graphe de ce rapport en fonction de x/L est représenté ci-dessous. Pour x=0, point d'équilibre, la période est infinie. Pour x=0.5, au bord de la barre, le rapport vaut:

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,. \qquad (5)$$

On voit que la courbe possède un minimum. Ce minimum est obtenu quand le rapport $\sqrt{L^2+12x^2/12xL}$ est minimal, soit quand:

$$\frac{d}{dx}\frac{L^2+12x^2}{x} = \frac{24x\times x-(L^2+12x^2)\times 1}{x^2} = \frac{12x^2-L^2}{x^2} = 0\,, \qquad (6)$$

donc pour $x=L/2\sqrt{3}$. Le rapport vaut alors $T/T_0 = 3^{-1/4}$.



On constate que le rapport est très stable pour x>0.2. En effet, entre le minimum est x=0.5, le rapport ne change que de (0.816-0.760)/0.760=7%.

2) Soit x la distance entre le trou choisi, en unité de a, et le centre d'inertie de la plaque. Comme précédemment, on a :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}\,, \qquad (7)$$

avec $d=xa$.

En utilisant les résultats du 6), on a:

$$I_G = \frac{1}{12}M(a^2+36a^2) = \frac{37}{12}Ma^2\,. \qquad (8)$$

On a donc:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{37}{12}Ma^2+Ma^2x^2}{Mgax}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{37}{12}+x^2}{x}\times\frac{a}{g}}\,. \qquad (9)$$

Le rapport de cette période à la période du pendule simple de longueur *L=6a* est alors, en élevant au carré:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \frac{\dfrac{\frac{37}{12}+x^2}{x}\times\dfrac{a}{g}}{\dfrac{6a}{g}} = \frac{\frac{37}{12}+x^2}{6x}. \tag{10}$$

Mais, d'après l'énoncé, ce rapport vaut aussi 85/144. On a donc:

$$\frac{\frac{37}{12}+x^2}{6x} = \frac{85}{12\times 12}, \tag{11}$$

d'où l'équation:

$$x^2 - x\frac{85}{24} + \frac{37}{12} = 0, \tag{12}$$

qui a pour solutions:

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{85}{24} \pm \sqrt{\left(\frac{85}{24}\right)^2 - 4\frac{37}{12}}\right] \tag{13}$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{85}{24} \pm \sqrt{\frac{85^2 - 4\times 37\times 48}{24\times 24}}\right] \tag{14}$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{85}{24} \pm \sqrt{\frac{7225-7104}{24\times 24}}\right] \tag{15}$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{85}{24} \pm \frac{11}{24}\right], \tag{16}$$

soit:

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{37}{24}. \tag{17}$$

Seule la première valeur correspond à un trou de la plaque. La plaque oscille donc autour d'un des premiers trous en partant du bord!