

# COURS DISPONIBLE SUR INTERNET

Serveur [step.ipgp.jussieu.fr](http://step.ipgp.jussieu.fr)

→ TICE

→ Serveur de Cours

# PLAN

1°) Energie et températures dans la Terre

2°) Eléments de dynamique

**3°) Champ de pesanteur**

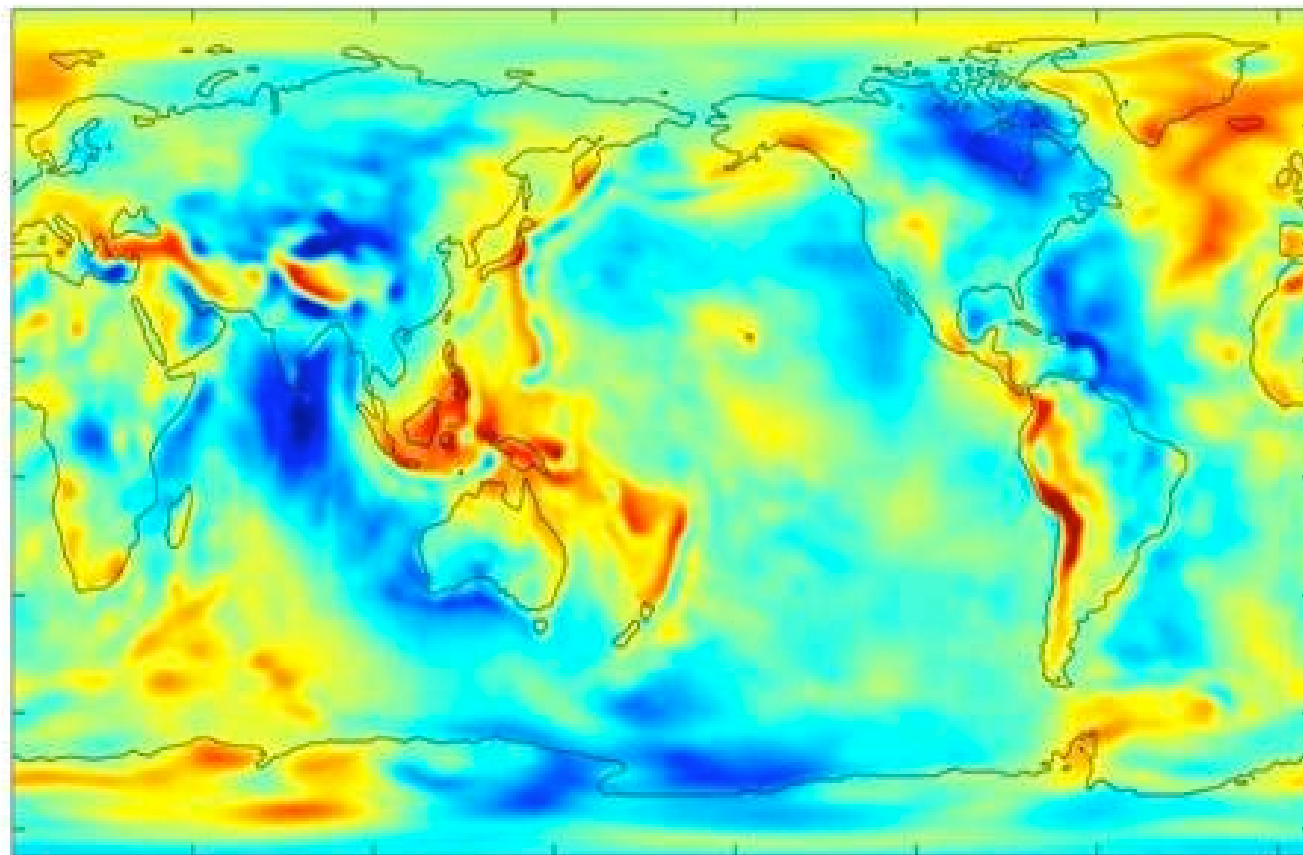
4°) Mesure de la déformation

5°) Sismologie et tremblements de terre

6°) Chimie des roches

# Chapitre 3

## Champ de pesanteur



-60

-40

-20

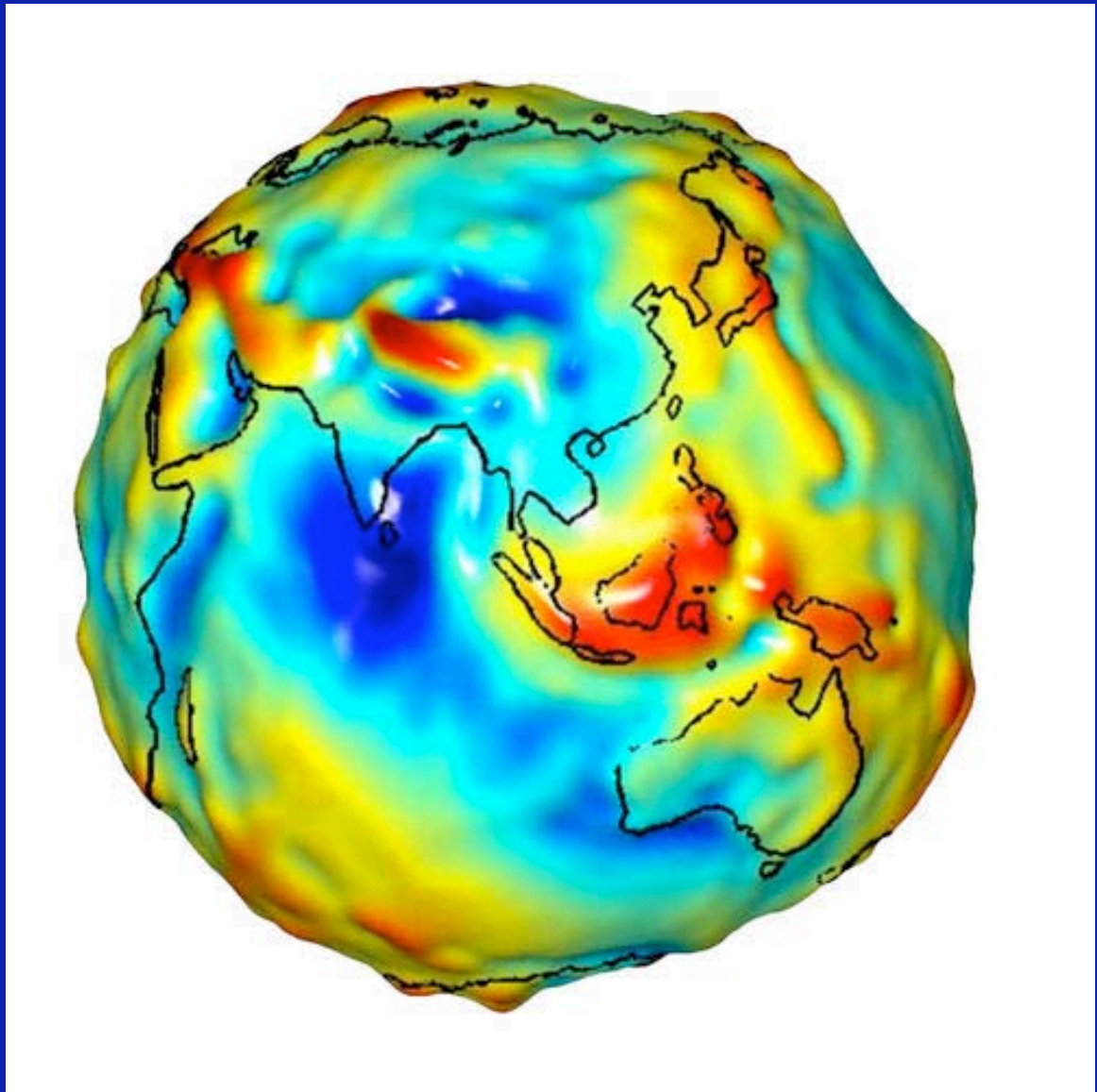
0

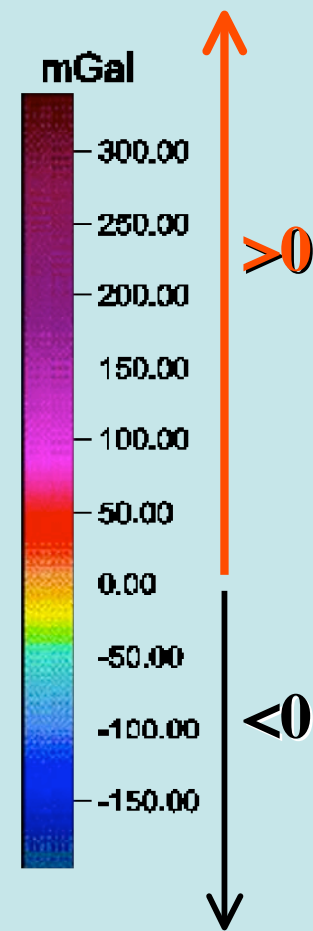
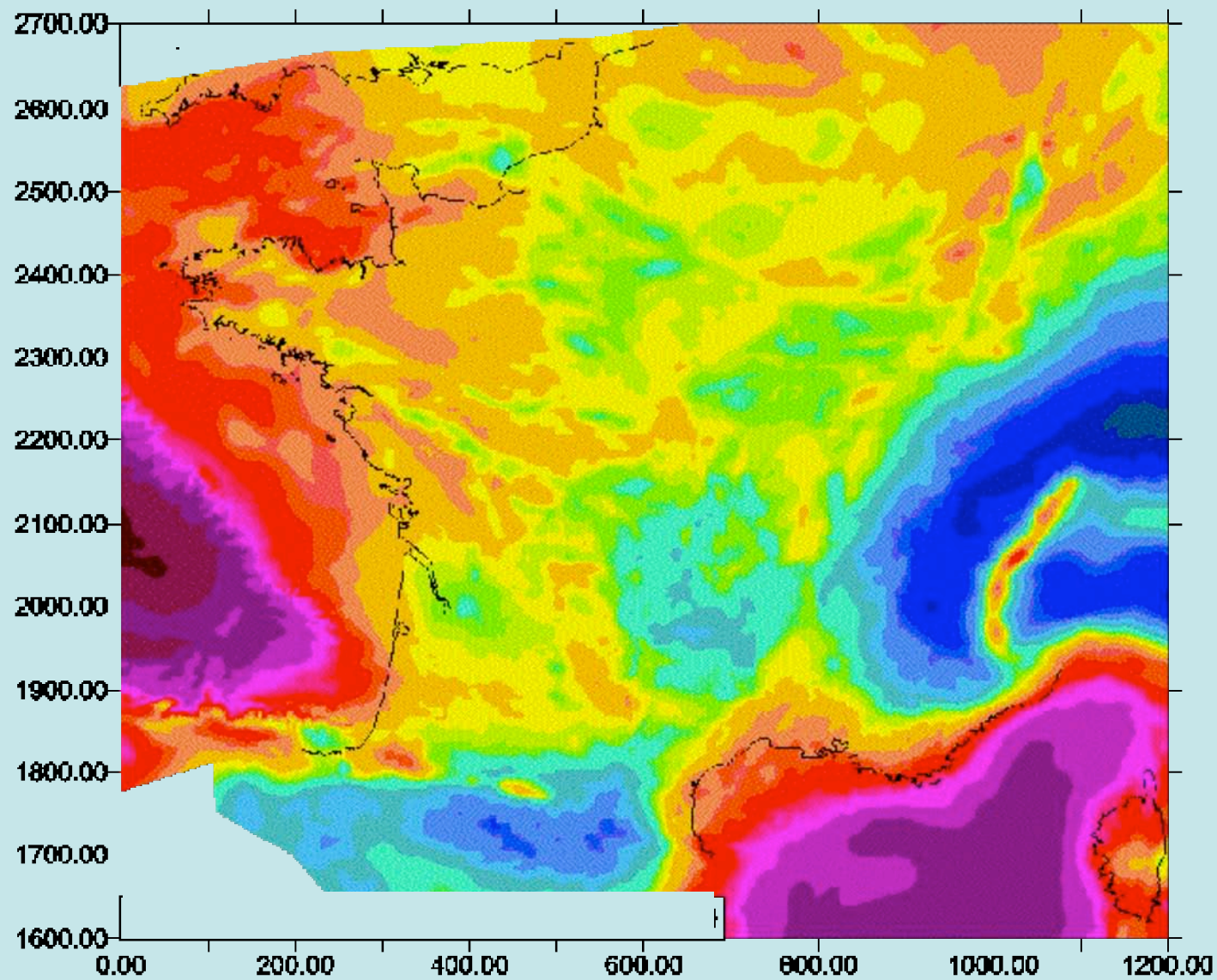
20

40

60

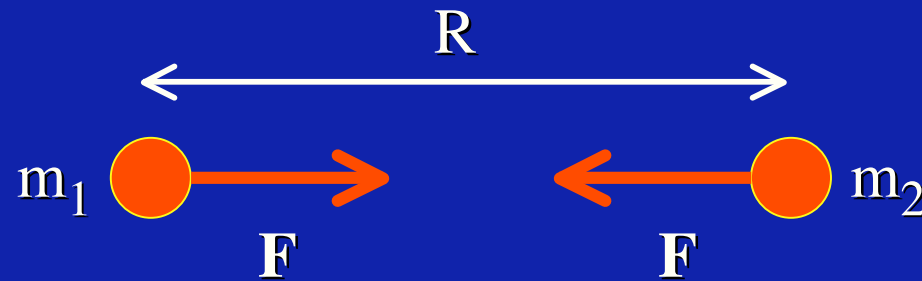
Gravity Anomaly (mGal)





# Loi d'attraction universelle (Newton)

Deux masses  $m_1$  et  $m_2$  ponctuelles situées à une distance  $R$  s'attirent mutuellement avec une force  $F$ :



$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$$

$G$  = constante de la gravitation

G = l'une des trois constantes fondamentales de l'Univers  
avec

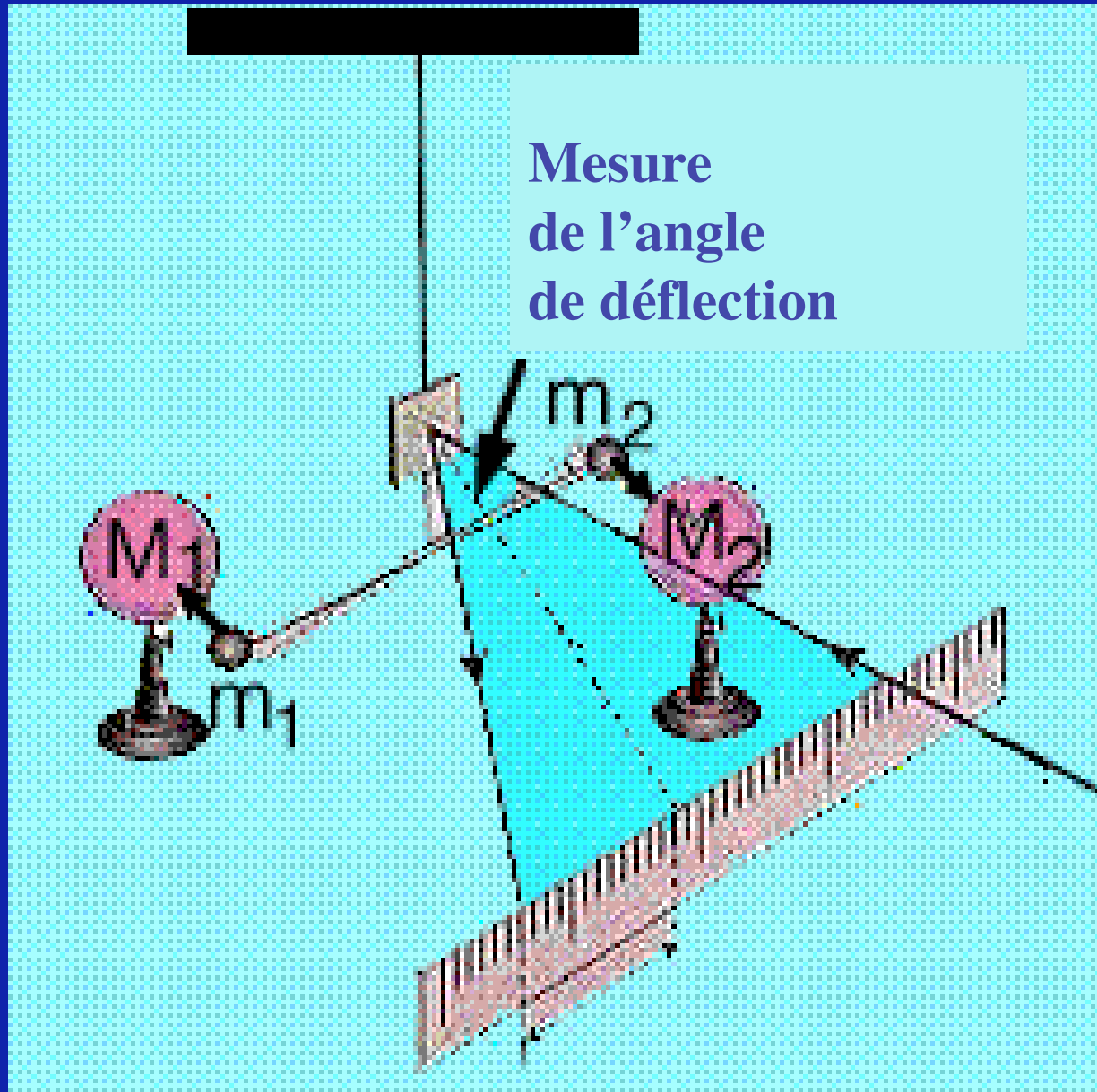
c, la vitesse de la lumière et  
h, la constante de Planck.

$$G = 6.67390 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} (\pm 0.0014 \%)$$

G fait encore l'objet de mesures à l'heure actuelle.

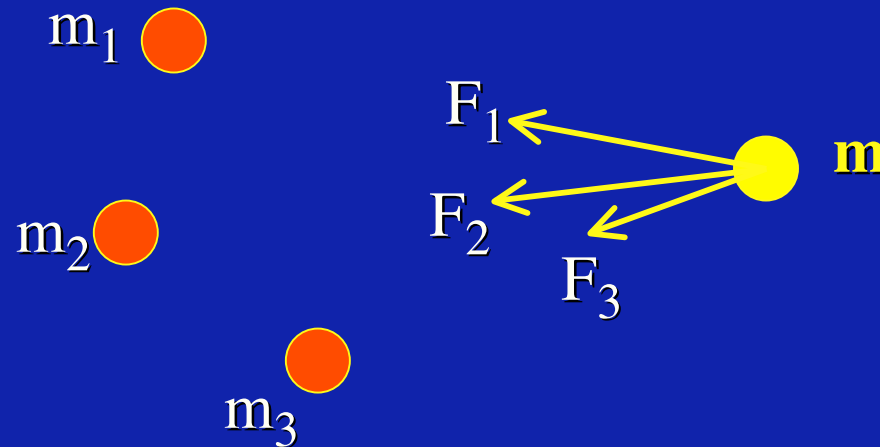


# Expérience de Cavendish (1798)



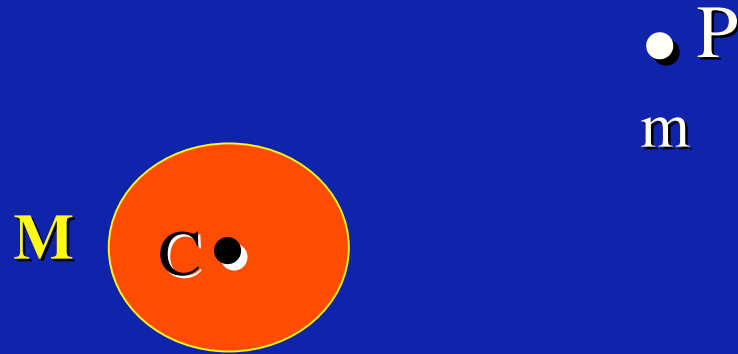
# Propriété fondamentale:

La force exercée sur une masse  $m$   
par  $N$  masses  $m_i$  ( $i=1,N$ )  
est la somme des forces élémentaires  $(m,m_i)$ .



$$F_i = G \frac{m m_i}{R_i^2}$$

On introduit le champ de pesanteur d'un objet de mass M:

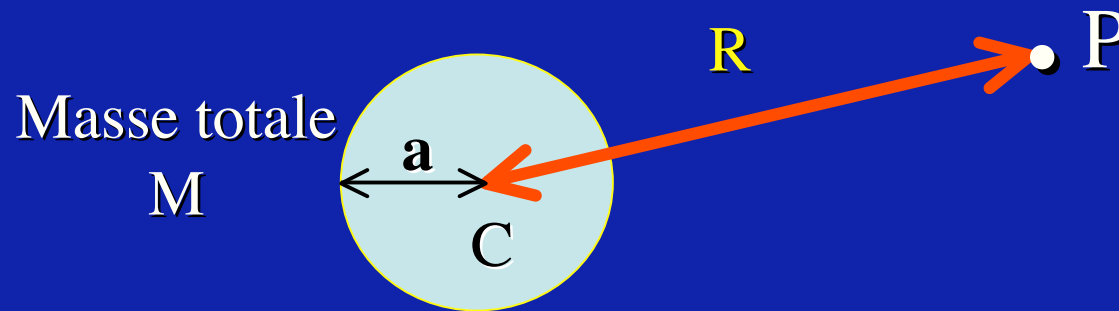


$$F = G \frac{M m}{CP^2} = G \underbrace{\frac{M}{CP^2}}_{g(P)} m$$

**Champ dû à la masse M au point P**

## Deux résultats fondamentaux pour un objet sphérique (démontrés à l'aide de la théorie du potentiel)

### 1. Champ de pesanteur pour une distance supérieure au rayon a:



$$g(P) = G \frac{M}{R^2}$$

même valeur que si toute la masse était concentrée  
au centre C.

# Pesanteur à la surface terrestre

Masse Totale M

Rayon terrestre a

$$g_T = G \frac{M}{a^2}$$

Hypothèse : densité  $\rho$  constante

$$M = \rho V = \rho (4/3 \pi a^3)$$

$$g_T = 4/3 \pi G \rho a$$

On sait que  $a = 6378$  km à l'équateur  
et que  $g_T = 9.807$  m.s<sup>-2</sup>

(chute du miroir d'un interféromètre dans le vide sous  
lumière de krypton 86, précision de 10<sup>-9</sup>)

$$M = g_T a^2 / G$$

On en déduit:

$$M = 5.976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

(mesuré aussi à partir de la période de rotation d'un  
satellite autour de la Terre)

On en déduit aussi  
la **masse volumique moyenne** de la Terre:

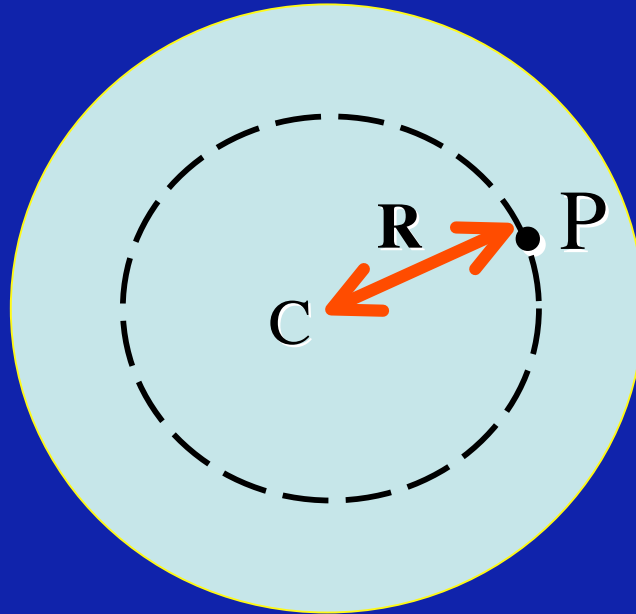
$$\rho = 5520 \text{ kg/m}^3$$

La masse volumique moyenne des roches de surface  
est de  $2670 \text{ kg.m}^{-3}$

Des matériaux **plus denses** doivent donc exister en  
profondeur.

## 2. Champ de pesanteur à l'intérieur d'une sphère:

**$R < a$**



$M(R)$  = masse contenue dans la sphère de rayon  $R$

$$g(P) = G \frac{M(R)}{R^2}$$

ne dépend pas de la masse située entre  $r=R$  et  $r=a$ .



## Pesanteur à la distance R ( $R < a$ )

Masse  $M(R)$

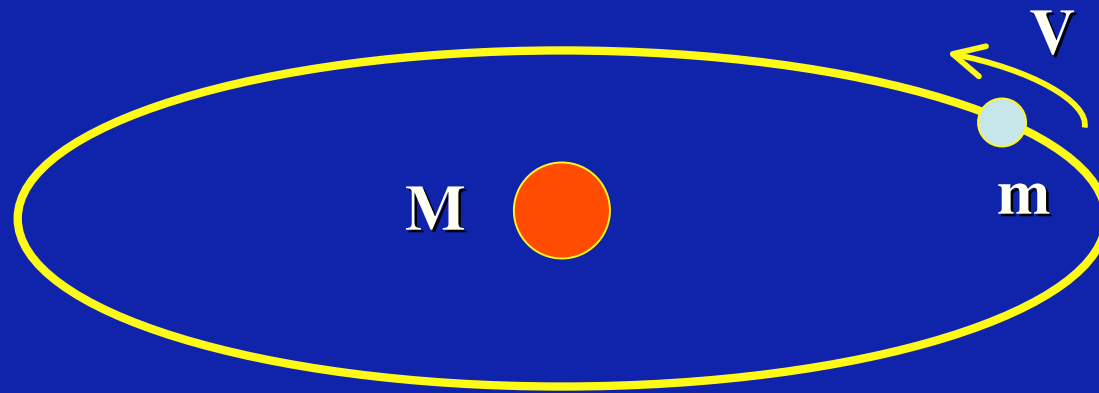
$$g(R) = G \frac{M(R)}{R^2}$$

Hypothèse : densité  $\rho$  constante

$$M(R) = \rho V = \rho \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

$$g(R) = \frac{4}{3} \pi G \rho R$$

# Trajectoire des planètes et des satellites



Trajectoire circulaire, mouvement à vitesse  $V$  constante

$$\vec{\Sigma F} = m \vec{\gamma}$$

Trajectoire circulaire, mouvement à vitesse  $V$  constante

$$\sum \vec{F} = m \vec{\gamma}$$

Projetons sur l'axe CP (radial):

$$- G \frac{M m}{R^2} = m \gamma_r$$

$$\gamma_r = \text{accélération centripète} = - \frac{V^2}{R}$$

$$\text{On en déduit : } G \frac{M}{R^2} = \frac{V^2}{R}$$

## REMARQUE : l'équation

$$- G \frac{M m}{R^2} = m \gamma_r$$

$$\gamma_r = \text{accélération centripète} = - \frac{v^2}{R}$$

Peut aussi être écrite ainsi:

$$- G \frac{M m}{R^2} - m \gamma_r = 0$$

$$- m \gamma_r = \text{“force” centrifuge}$$

$$G \frac{M}{R^2} = \frac{V^2}{R}$$

Cette équation permet de calculer M si R et V sont connus:

Terre-Lune:

L'étude de la révolution de la Lune autour de la Terre permet de déterminer la masse de la Terre.

Terre-Soleil:

L'étude de la révolution de la Terre autour du soleil permet de déterminer la masse du soleil.

## Terre - Lune : application numérique.

$$V = \frac{2 \pi R}{T} \quad T = \text{période de révolution}$$

$$M = \frac{4 \pi^2}{G} \frac{R^3}{T^2}$$

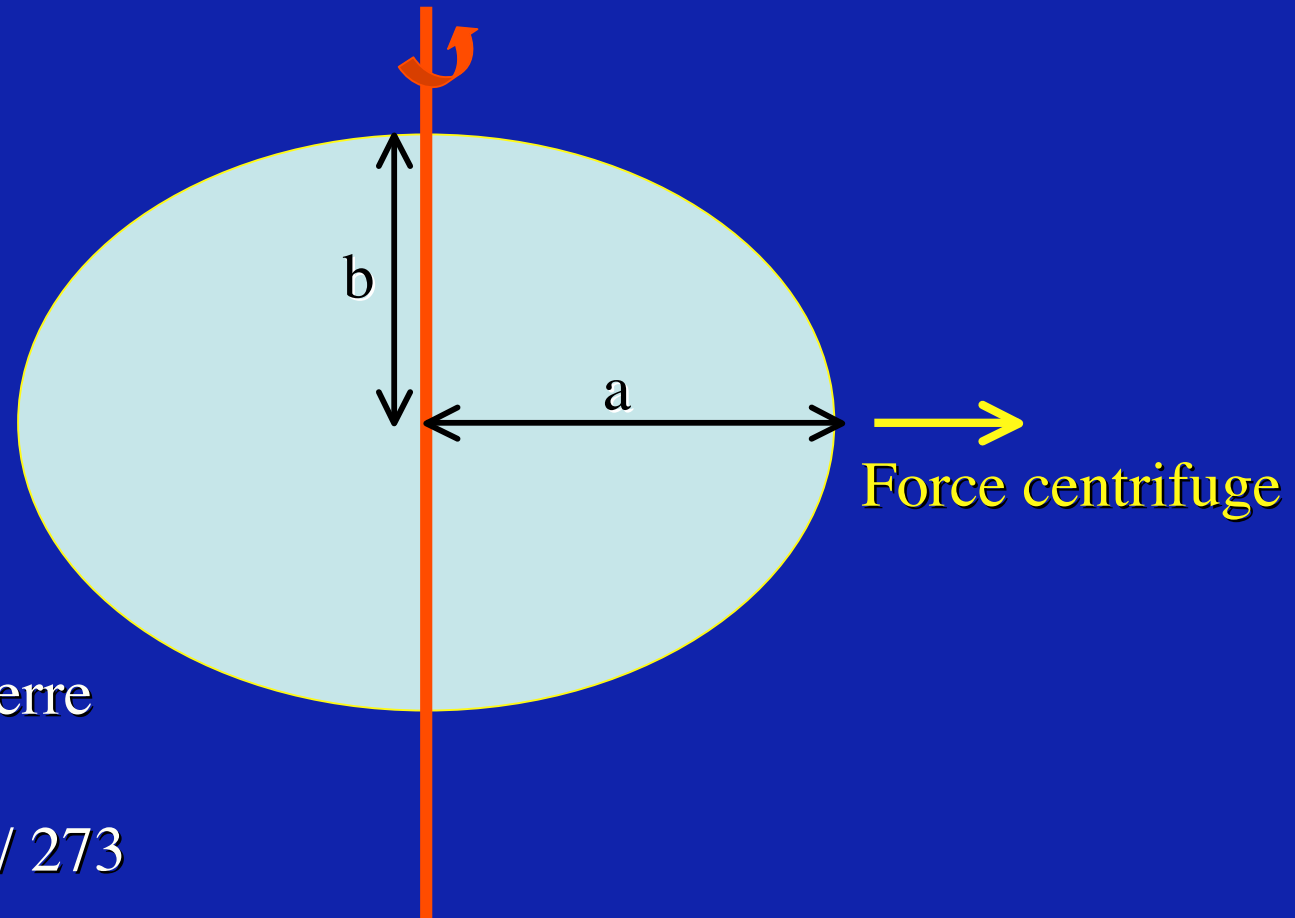
$$R = 384\,400 \text{ km}$$

$$T = 27.3 \text{ jours}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$$

$$\left. \begin{array}{l} R = 384\,400 \text{ km} \\ T = 27.3 \text{ jours} \\ G = 6.67 \cdot 10^{-11} \end{array} \right\} M = 6.0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

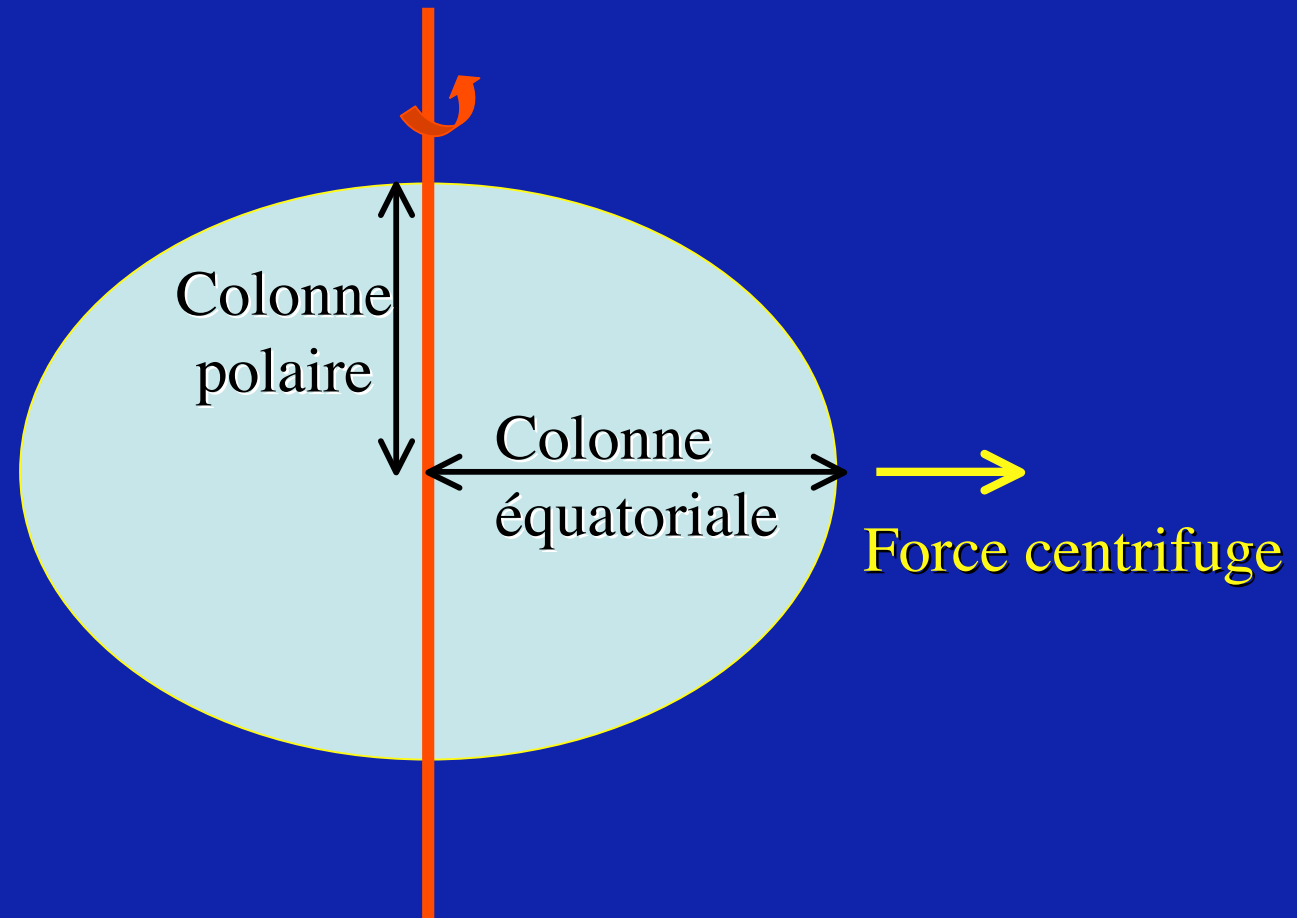
# Forme de la Terre : aplatie aux pôles



Ellipticité de la Terre

$$\varepsilon = \frac{a - b}{a} \approx 1 / 273$$

**Equilibre : la pression au centre doit être la même  
pour deux “colonnes” à travers la Terre:  
une colonne polaire  
une colonne équatoriale**





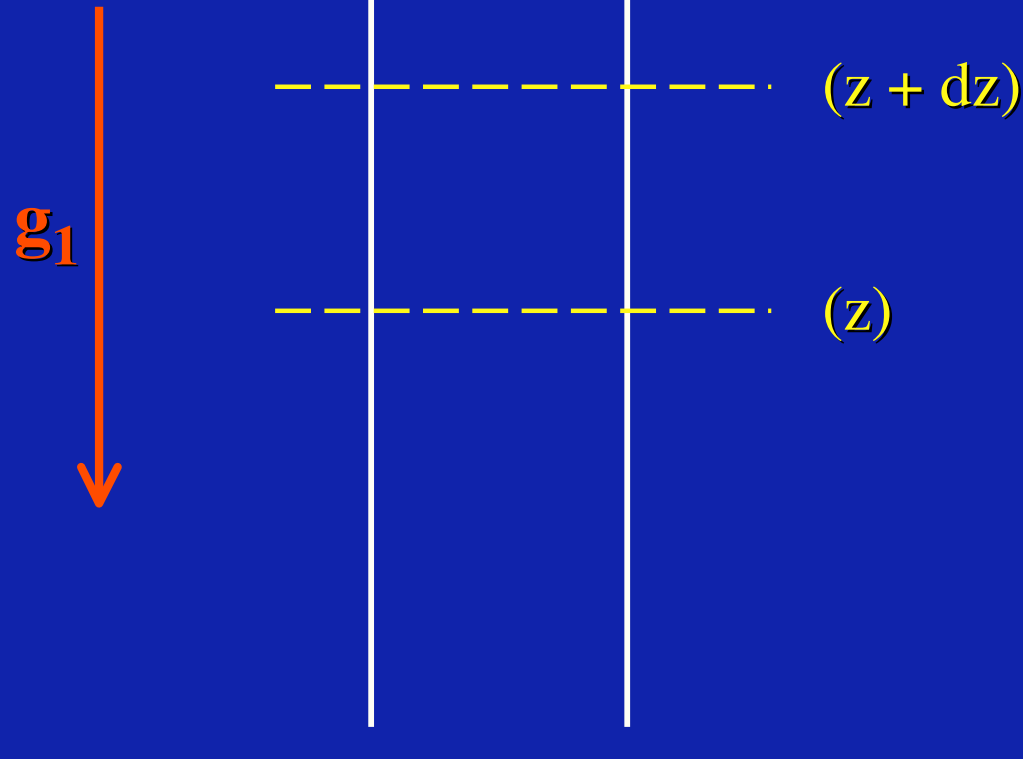
Le champ de pesanteur varie linéairement avec la distance au centre

A cause de la forme non sphérique de la Terre, la pesanteur n'est pas exactement la même au pôle et à l'équateur, mais on va négliger cette faible différence.

Pôle :  $g_1 \approx g_T \frac{z}{b}$   $z$  distance au centre

Equateur :  $g_2 \approx g_T \frac{z}{a}$   $z$  distance au centre

# Colonne polaire : poids et pression.



$$\text{Equilibre : } P(z) S - P(z+dz) S - \rho S dz g_1 = 0$$

$$P(z+dz) - P(z) = -\rho g_1 dz$$

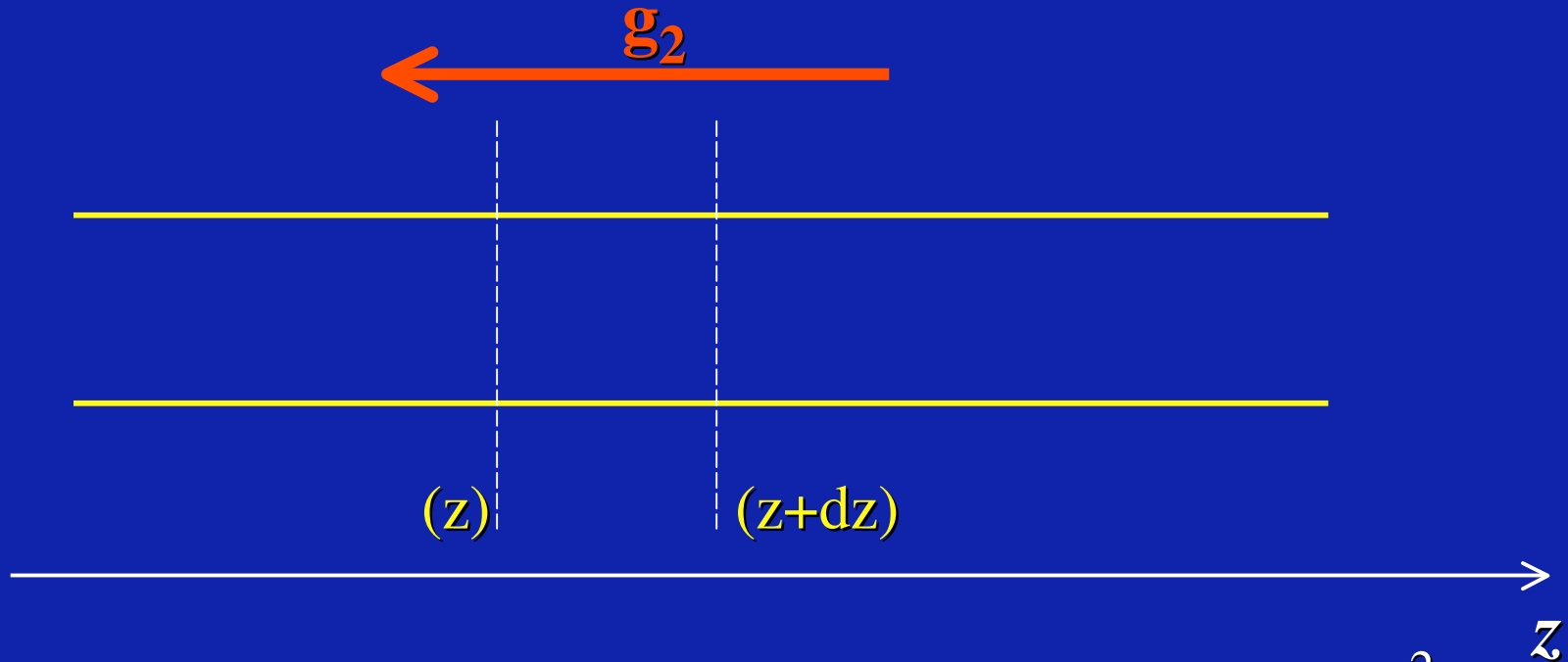
## Calcul de la pression dans la colonne polaire:

$$\begin{aligned}dP_1 &= -\rho g_1 dz \\ &= -\rho g_T \frac{z}{b} dz\end{aligned}$$

$$P_1(b) - P_{1C} = \int_0^b -\rho g_T \frac{z}{b} dz = -1/2 \rho g_T b$$

$$P_{1C} = 1/2 \rho g_T b$$

## Colonne équatoriale : poids, pression et force centrifuge



$$\text{Equilibre : } P(z) S - P(z+dz) S - \rho S dz g_2 + \rho S dz \frac{V(z)^2}{z} = 0$$

$$P(z+dz) - P(z) = - \rho g_2 dz + \rho \frac{V(z)^2}{z} dz$$

Calcul de la pression dans la colonne équatoriale:  
avec la force centrifuge

$$\begin{aligned}dP_2 &= -\rho g_2 dz + \rho \frac{V(z)^2}{z} dz \\ &= -\rho g_T \frac{z}{a} dz + \rho \Omega^2 z dz\end{aligned}$$

avec  $\Omega$  la vitesse angulaire, telle que  $V(z) = \Omega z$ .

$$P_2(a) - P_{2C} = \int_0^a -\rho g_T \frac{z}{a} dz + \int_0^a \rho \Omega^2 z dz$$

$$P_{2C} = 1/2 \rho g_T a - 1/2 \rho \Omega^2 a^2$$

Egalité des pressions au centre:

$$\frac{1}{2} \rho g_T b = \frac{1}{2} \rho g_T a - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 a^2$$

$$b = a - \frac{\Omega^2 a^2}{g_T}$$

$$\frac{a - b}{a} = \frac{\Omega^2 a}{g_T}$$

Application numérique :

$$\Omega = 2 \pi / 24 \text{ heures} = 2 \pi / (24 \times 3600)$$

$$a = 6370 \text{ km}$$

$$g_T = 9.81 \text{ m s}^{-2}$$

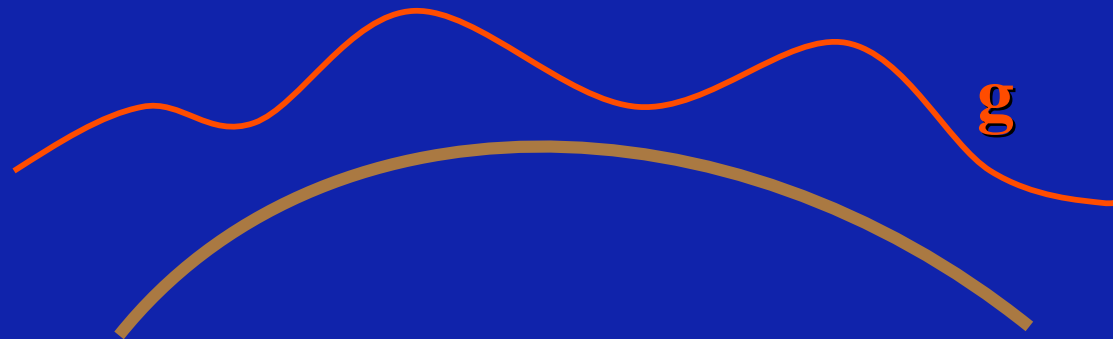
$$\varepsilon = \frac{a - b}{a} \approx 3.5 \cdot 10^{-3} \approx 1 / 286$$

# La Terre n'est pas homogène.

$\rho$  varie en fonction de

- la composition des roches
- de la température.

Donc  $g$  varie à la surface terrestre.





**MASSES VOLUMIQUES  
DES PRINCIPAUX TYPES DE ROCHES  
ET DE MINERAUX "ECONOMIQUES"  
(à P=1 bar et T=20°C, en  $\times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ )**

Roches sédimentaires	2.2 - 2.7
Granites	2.6 - 2.7
Gabbros	2.8 - 3.0
Gneiss (socle cristallin)	2.5 - 3.1
Péridotite (manteau)	3.0
Sphalérite (sulfure de zinc)	4.1
Pyrite (sulfure de fer)	5.0
Galène (sulfure de plomb)	7.6
Hématite (oxyde de fer)	5.3
Pétrole	< 1.0

## Variations de densité avec la température

Equation d'état des roches

(spécifie comment varie la densité en fonction de P et T):

$$= \rho_o [ 1 - \alpha (T - T_o) ]$$

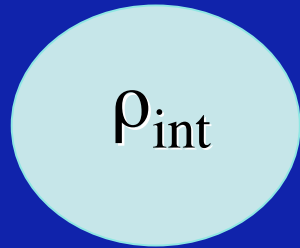
$\alpha$  = coefficient de dilatation thermique =  $3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

$\rho_o$  = densité à  $T=T_o$  (varie avec la pression, mais faiblement)

# Principe des mesures : anomalies de pesanteur

---

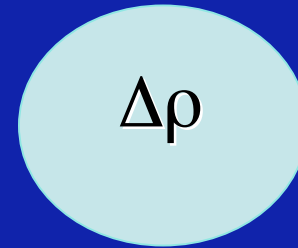
$\rho_{\text{ext}}$



Volume V

---

$\Delta\rho$



Volume V

Anomalie de masse

$$\Delta m = \Delta\rho V$$

(>0 ou <0)

# Mesure de $g$ : à l'aide de gravimètres.

Deux types :

(1) A ressort :  $m g = k \Delta x$ ,  
 $\Delta x$  variation de la longueur du ressort  
 $k$  raideur du ressort

(2) A chute d'objet :  $m g = m d^2z/dt^2$

## Mesure de g : unités.

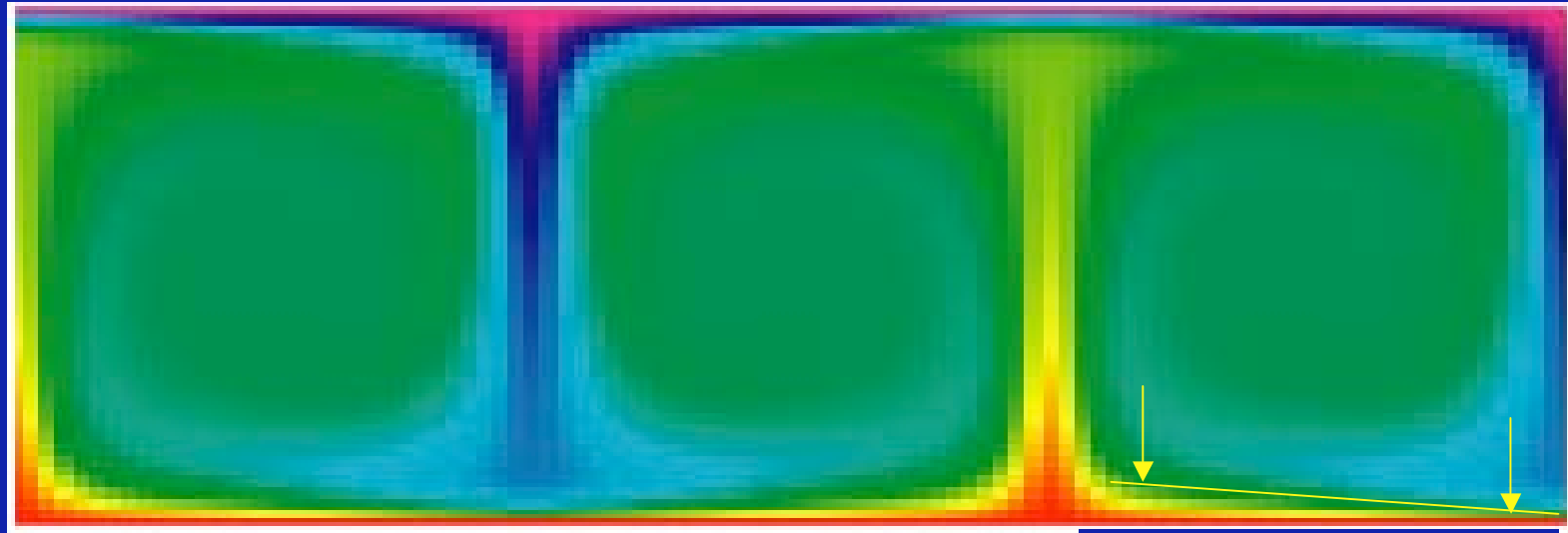
g est une accélération : unité  $\text{m s}^{-2}$

Unité géologique 1 gal =  $1 \text{ cm s}^{-2}$

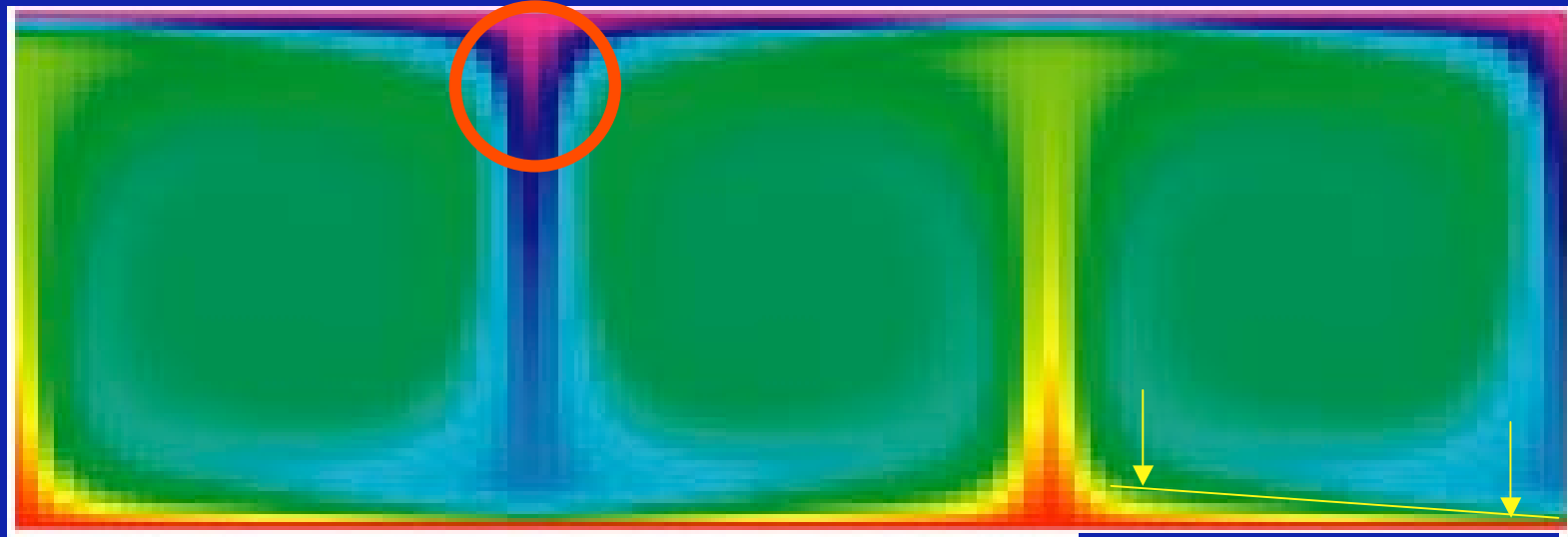
Précision  $\approx 1 \mu\text{gal} = 10^{-6} \text{ gal} = 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$

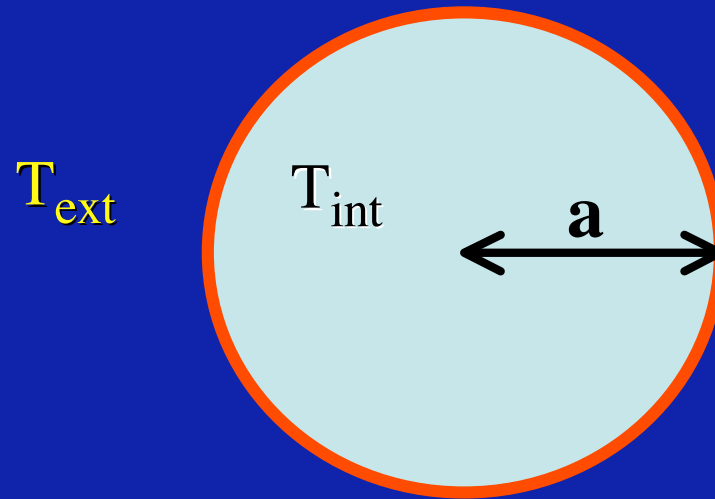
(mesures anciennes  $\approx 1 \text{ mgal} = 10^{-3} \text{ gal} = 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$ )

# ANOMALIES ASSOCIEES AUX COURANTS DE CONVECTION



# ANOMALIES ASSOCIEES AUX COURANTS DE CONVECTION





Sphère de rayon  $a$

Volume  $V = \frac{4}{3} \pi a^3$

Surface  $S = 4 \pi a^2$

Excès de masse:  $\Delta\rho V$



Variations de densité dues à des variations de température:

$$\Delta\rho = - \rho_o \alpha \Delta T$$

Application numérique:

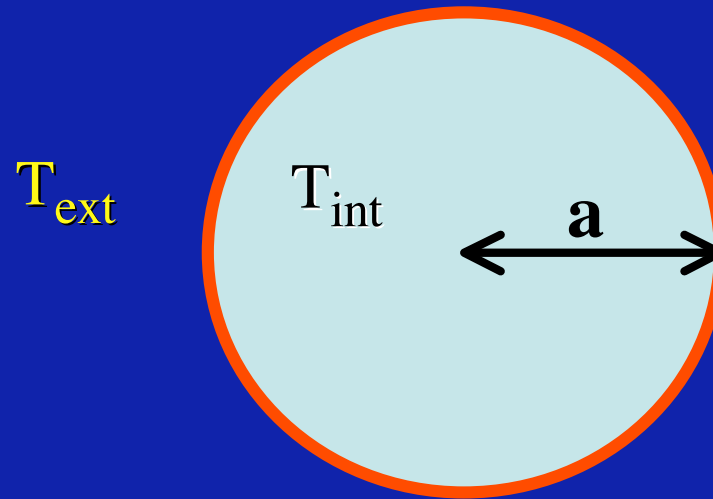
$$\Delta T = 1000 \text{ K}$$

$$\rho_o = 3 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\alpha = 3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

$$\Delta\rho = - 90 \text{ kg m}^{-3} \quad (\Delta\rho / \rho = - 3\% )$$

Ce sont ces très faibles variations de densité qui propulsent le manteau terrestre et qui sont responsables de la formation des chaînes de montagne.



Excès de masse:  $\Delta m = \Delta \rho V$

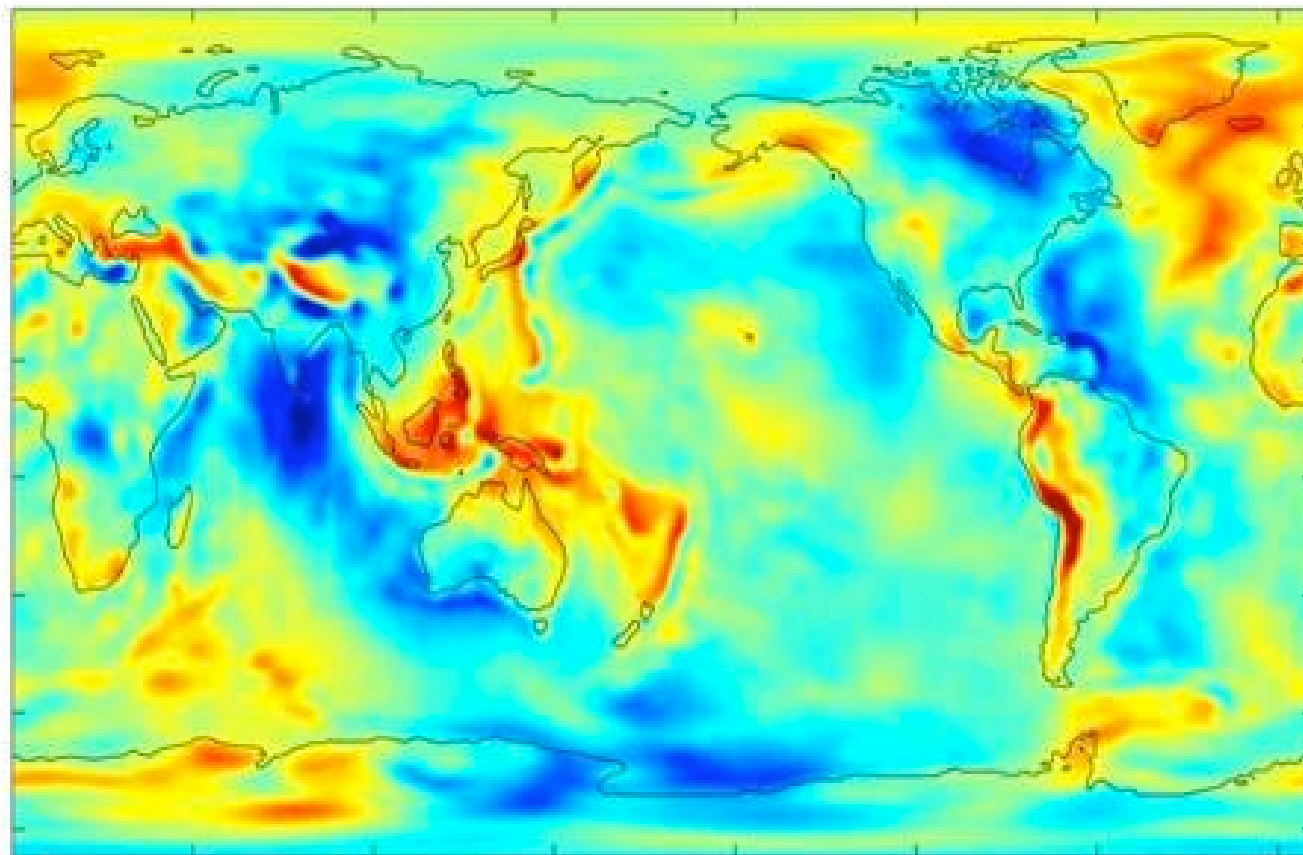
$$a = 35 \text{ km}$$

$$\Delta \rho = 90 \text{ kg m}^{-3}$$

A une profondeur =  $a$

$$\Delta g = 8.4 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2} = 84 \text{ mgal}$$

$$\Delta g = G \frac{\Delta m}{a^2}$$



-60

-40

-20

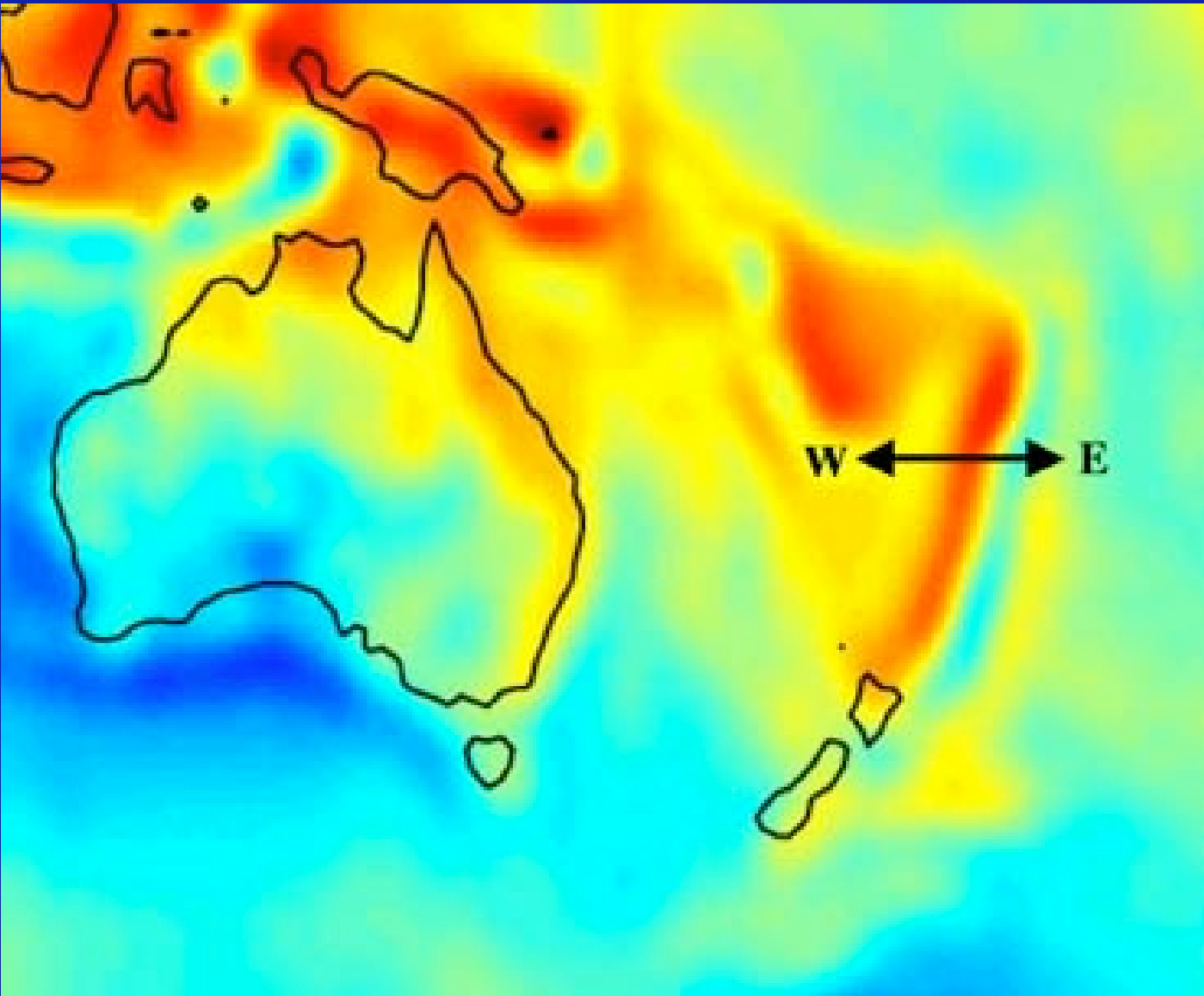
0

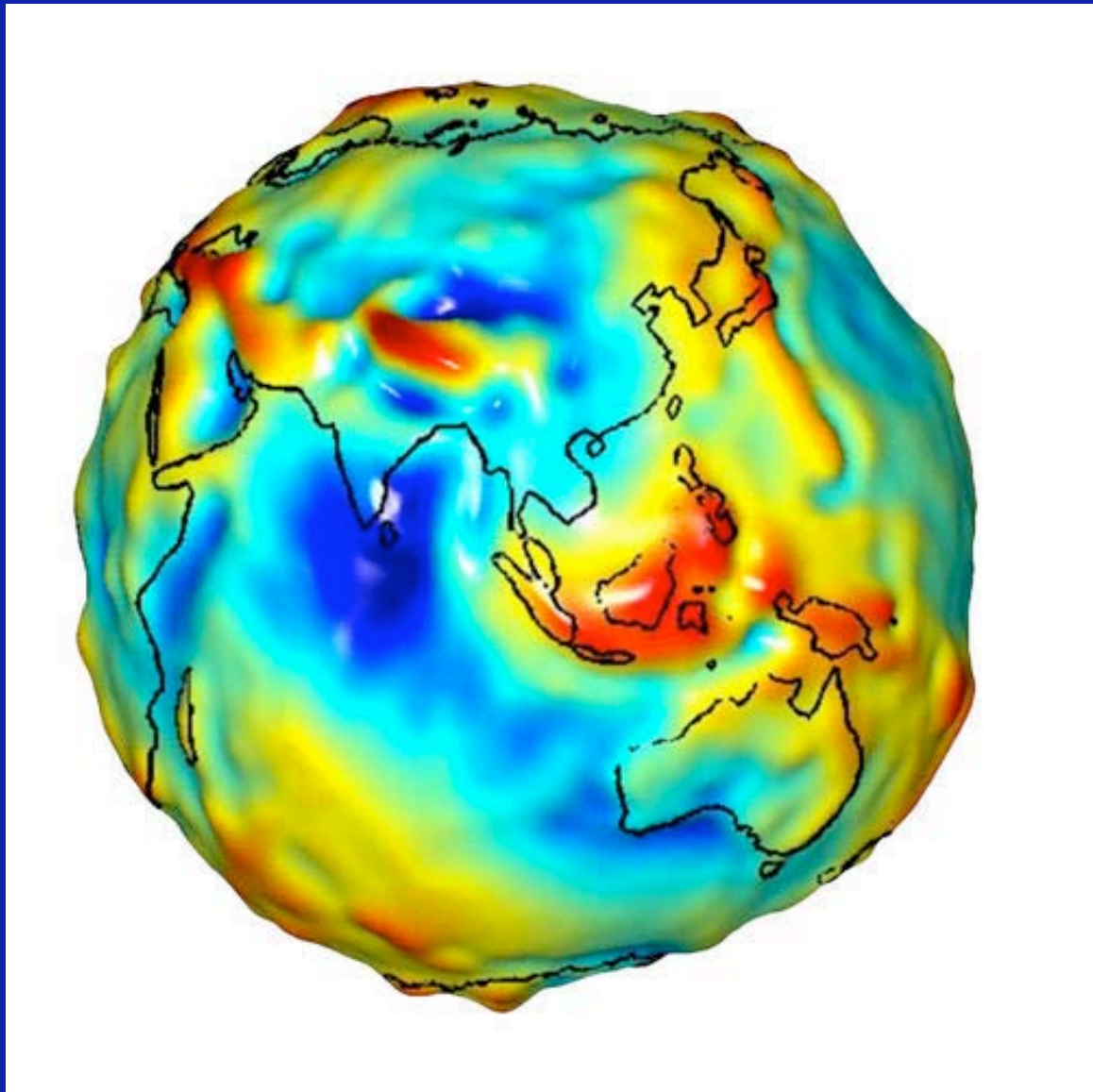
20

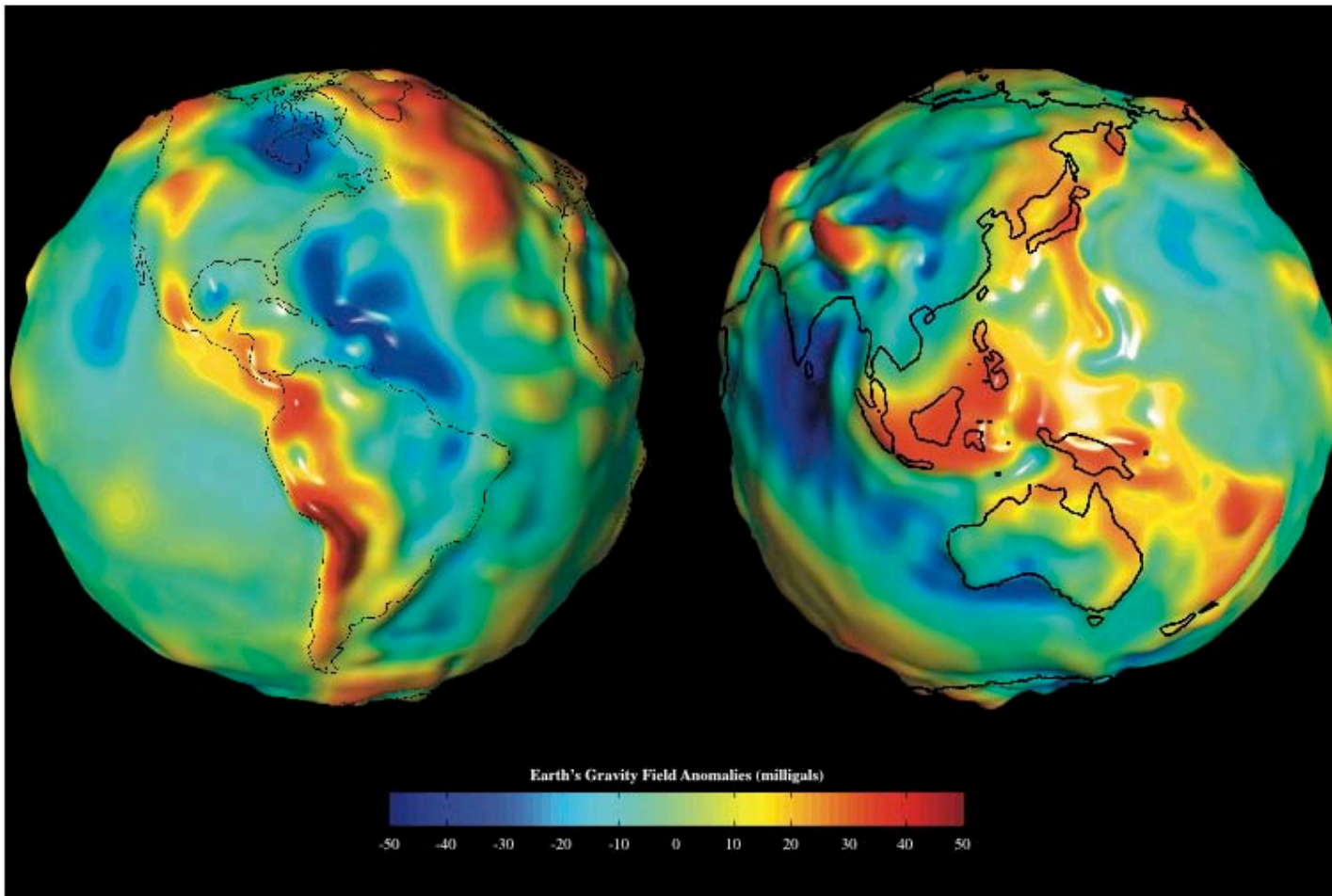
40

60

Gravity Anomaly (mGal)

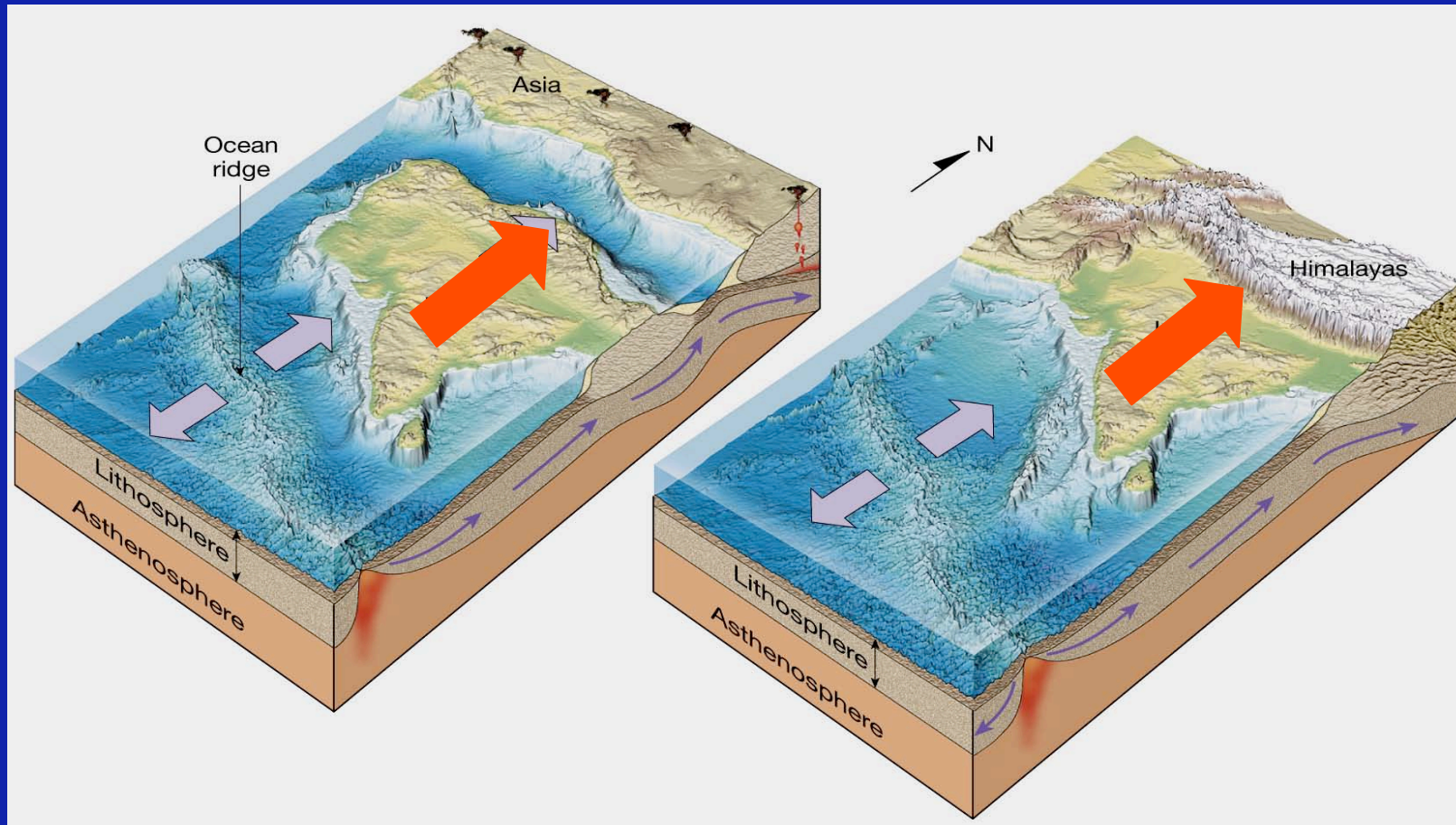




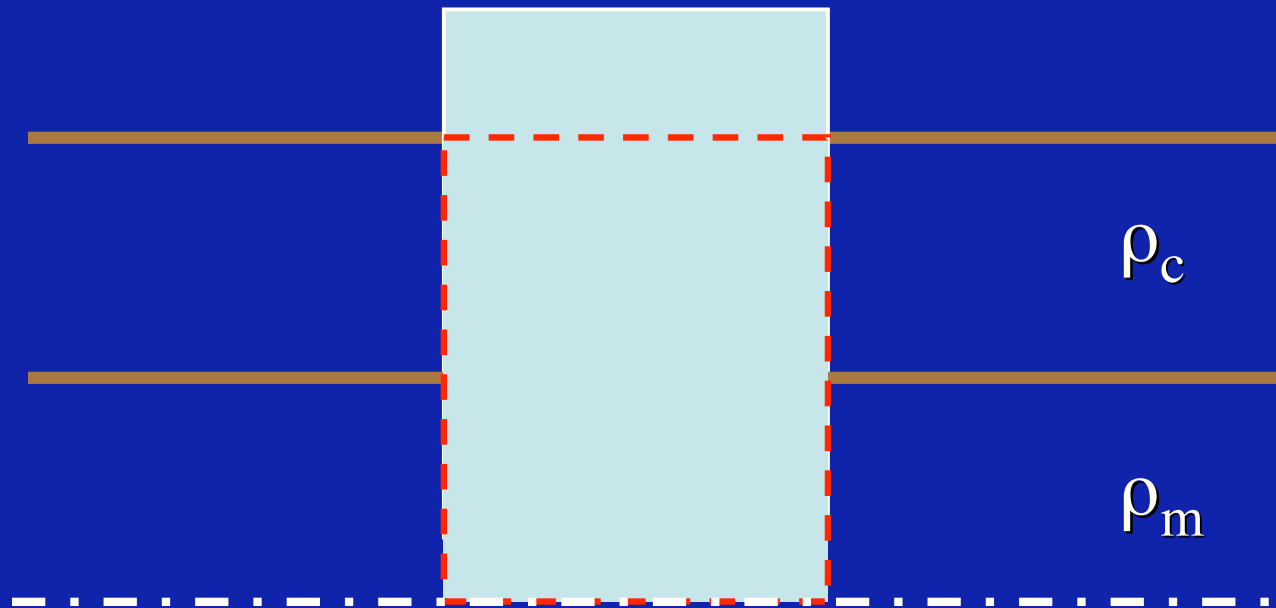




# Anomalies dues au relief



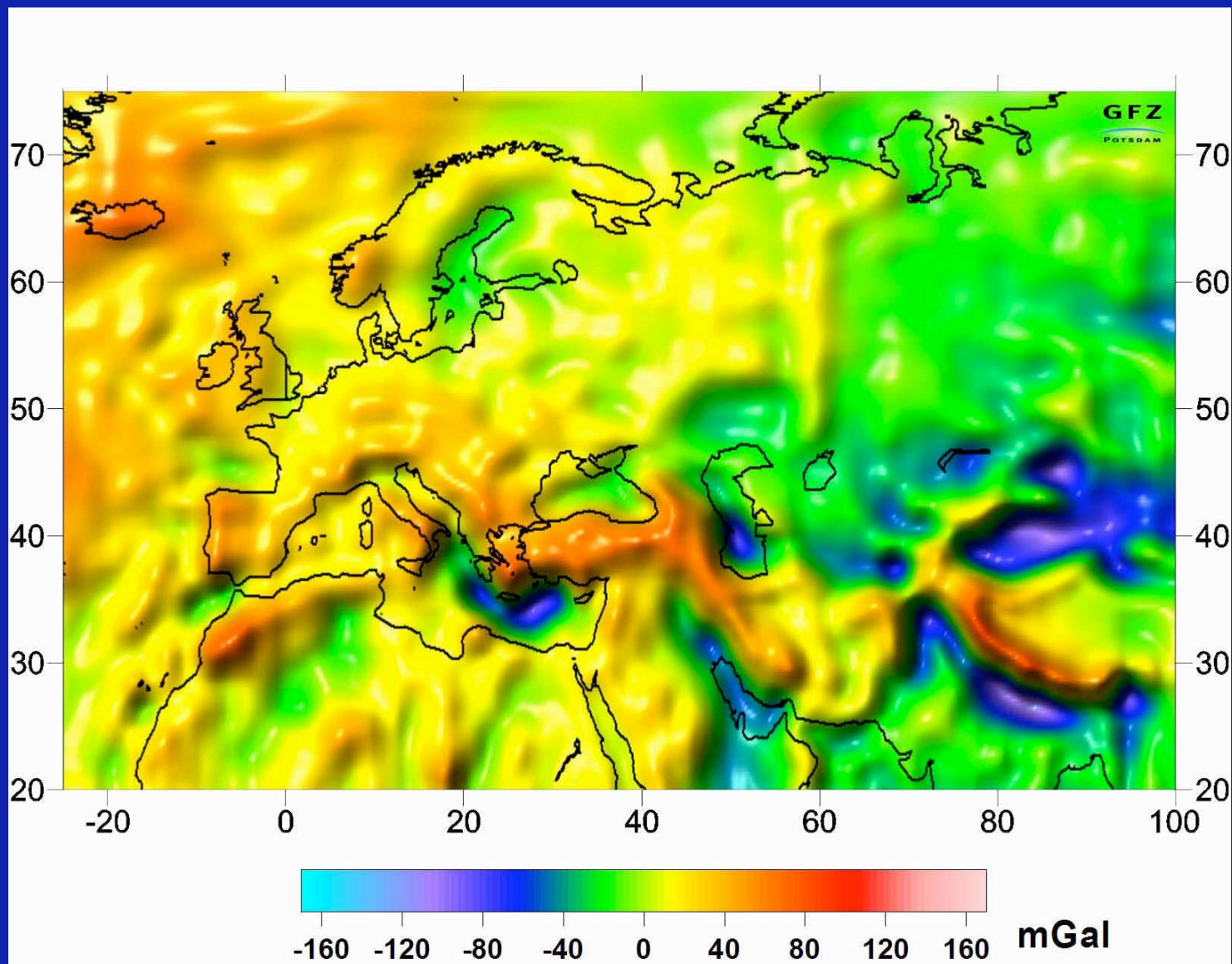
**Chaînes de montagnes :  
relief et racine  
(compensation isostatique).**



Relief = excès de masse  
Racine = déficit de masse

Anomalie plus faible.





## ANOMALIES DUES A LA COMPOSITION DE LA CROUTE

Roches sédimentaires	2.2 - 2.7
Granites	2.6 - 2.7
Gabbros	2.8 - 3.0
Gneiss (socle cristallin)	2.5 - 3.1
Péridotite (manteau)	3.0

