L2 - Physique pour les sciences de l'univers
Corrigés et commentaires sur le TD N°1

Jeudi 1er février 2007

Ce que vous devez retenir des TD 1 et 2

- Pour un champ scalaire ou vecteur, on peut definir les quantités suivantes ; grad, div, rot, laplacien. Attention : Lesquelles s'appliquent auxquels ?
Selon le type de coordonnées choisies, le résultat ne varie pas mais les calculs peuvent devenir plus ou moins laborieux.

- Les notions de **produit scalaire** et **produit vectoriel** doivent être bien comprises et sans confusion entre les deux.

- Circulation sur un ligne, flux à travers une surface, lien avec les div, les grad et les rot (dans quels cas les calculs sont-ils simplifiés ?)

Exercice 1 du TD 1 : Produit vectoriel

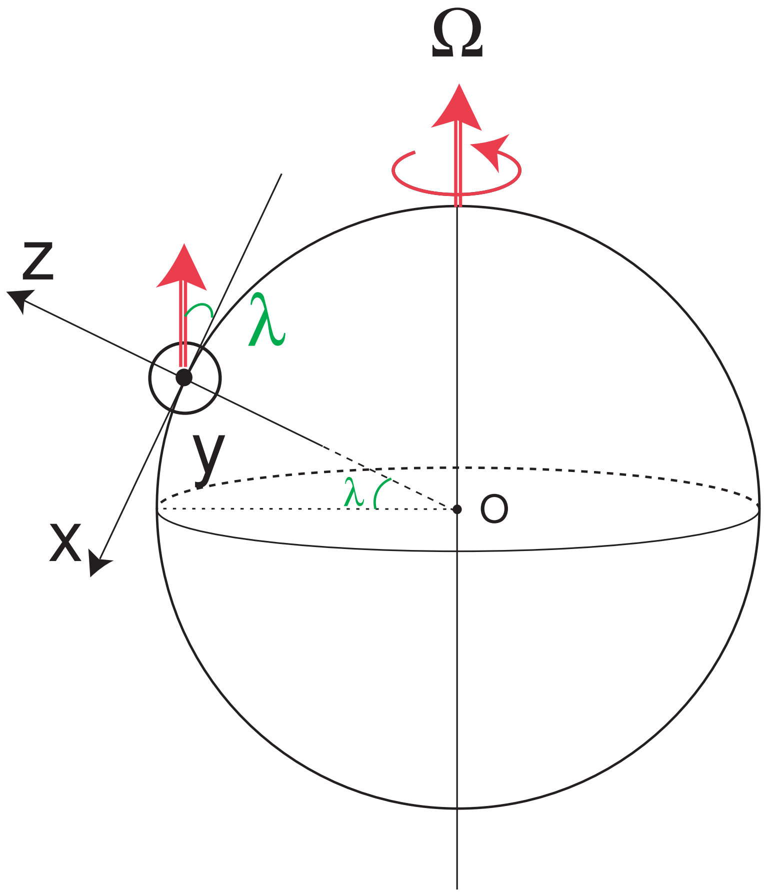
Rappel sur la force de Coriolis : un objet qui se déplace à une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un référentiel en rotation $\overrightarrow{\Omega}$ "ressent" une force de Coriolis $\overrightarrow{F_c} = -2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$.
On considère ici un point immobile à la surface de la Terre à une latitude λ.

1) Dans le repère cartésien associé à ce point, les axes (Ox), (Oy) représentent les directions Nord-Sud et Ouest-Est respectivement et (Oz) est l'axe vertical perpendiculaire à la surface. Comment exprime-t-on $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur de rotation de la Terre dans ce repère ? Quelle est sa norme ?

On choisit ici de se placer dans un repère cartésien associé au point posé à la surface de la Terre. L'axe (Ox) indique le Sud, l'axe (Oy) indique l'Est, l'axe (Oz) pointe vers la verticale (droit vers le ciel). On note λ la latitude (0 à l'équateur, 90 au pôle). Si vous voulez choisir un autre référentiel , cela ne pose pas de problème du moment qu'on retombe sur le même résultat...

Comment s'écrit $\overrightarrow{\Omega}$ dans ce repère ? Premièrement il est dans le plan de x et de z (pas de composante Est-Ouest) et ensuite, il dépend de l'angle λ. En faisant un dessin, et en essayant de retrouver les bons angles aux bons endroits, par de simples considérations de géométrie, on doit pouvoir trouver que : $\overrightarrow{\Omega} = (-\Omega \cos\lambda, 0, \Omega \sin\lambda)$.

Norme de $\overrightarrow{\Omega}$? $\Omega = 2\pi/T$ oû T est la période de rotation de la Terre, soit 1 jour. Attention aux unités : $T = 24 \times 3600$ secondes, donc $\Omega = 2\pi/86\,400 = 7.3\,10^{-5}$ rad/s.



2) Le point se déplace alors à une vitesse $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, 0)$. Déterminer l'accélération de Coriolis ressentie.

La vitesse s'écrit $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, 0)$ (pas de composante verticale, puisqu'on se déplace dans le plan de x et y). On applique la formule pour la force de Coriolis, et son accélération qu'on notera $\gamma_C = F_c/m$.

$$F_C = -2m(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}) = -2m(-\Omega\, v_y \sin\lambda,\ \Omega\, v_x \sin\lambda,\ -\Omega\, v_y \cos\lambda).$$

3) Application numérique : $\lambda = 45°$, $v_x = 360$ km/h, $v_y = 0$. Comparer les valeurs de l'accélération de Coriolis et de l'accélération de la pesanteur g. Commenter ?

$\overrightarrow{v} = (v, 0, 0)$ et $v = 360$ km/h $= 100$ m/s (encore une fois , attention aux unités !)
$\overrightarrow{F_C} = -2m\,\Omega\, v \sin\lambda\, \overrightarrow{e_y}$. Ce qui donne $||\overrightarrow{\gamma_C}|| = 2\,\Omega\, v \sin\lambda\ \simeq 10^{-2}$ m/s^2.

CONCLUSION : Si l'objet se déplace vers le sud, il sera donc décalé vers l'ouest, s'il va vers le nord ($v_x < 0$) il sera décalé vers l'est. S'il va vers l'est ($v_x = 0$ et $v_y > 0$ il est décalé vers le sud, etc.) D'où le dessin sur l'énoncé, les petites flèches qui tournent et montrent dans quel sens la déviation se fait ...

Pour comparer avec g, l'accélération de la pesanteur, il suffit de constater que γ_C vaut environ un millième de g, donc dans le cas que nous avons considéré, l'accélération de Coriolis est négligeable davant l'efft de la gravité.

Exercice 3 du TD 1 : grad, div, rot de produits

Ici on choisit de faire une décomposition cartésienne, c'est-à-dire sur un repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

1) $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda\mu) = \dfrac{\partial(\lambda\mu)}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\partial(\lambda\mu)}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{\partial(\lambda\mu)}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$.

$\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda\mu) = \left(\lambda\dfrac{\partial(\mu)}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial(\lambda)}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_x} + \cdots$ On décompose tous les produits sur les 3 composantes.

$\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda\mu) = \lambda\left(\dfrac{\partial(\mu)}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\partial(\mu)}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{\partial(\mu)}{\partial z}\overrightarrow{e_z}\right) + \cdots$ même chose pour les termes symétriques : on a mis en facteur pour sortir les gradients.

$\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda\mu) = \lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}(\mu) + \mu\,\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda)$.

2) div $(\lambda\overrightarrow{A}) = \dfrac{\partial(\lambda A_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\lambda A_y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\lambda A_z)}{\partial z}$. Définition du div.

div $(\lambda\overrightarrow{A}) = \lambda\dfrac{\partial(A_x)}{\partial x} + A_x\dfrac{\partial(\lambda)}{\partial x} + \cdots$ On développe les dérivées des produits.

div $(\lambda\overrightarrow{A}) = \lambda\left(\dfrac{\partial(A_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(A_y)}{\partial y} + \cdots\right) + \left(A_x\dfrac{\partial(\lambda)}{\partial x} + A_y\dfrac{\partial(\lambda)}{\partial y} + \cdots\right)$ On regroupe de manière à mettre le div $\overrightarrow{A}$ et le $\overrightarrow{\text{grad}}\lambda$ en évidence.

div $(\lambda\overrightarrow{A}) = \lambda$ div $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\lambda$.

3) div $(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}) = \dfrac{\partial\,(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B})_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\,(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B})_y}{\partial y} + \dfrac{\partial\,(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B})_z}{\partial z}$ On écrit juste la définition du div.

Puis on écrit le produit vectoriel $\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\overrightarrow{e_x} + (A_zB_x - A_xB_z)\overrightarrow{e_y} + (A_xB_y - A_yB_x)\overrightarrow{e_z}$. Attention il ne s'agit pas de fonction de x, y, z mais de composantes.

Donc je reprends pour le premier terme du div :

$$\frac{\partial\,(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B})_x}{\partial x} = \frac{\partial\,(A_yB_z - A_zB_y)}{\partial x} = A_y\frac{\partial\,B_z}{\partial x} + B_z\frac{\partial\,A_y}{\partial x} - A_z\frac{\partial\,B_y}{\partial x} - B_y\frac{\partial\,A_z}{\partial x}.$$

On fait la même chose pour les 2 autres termes du div en y et en z.

Ensuite il faut regrouper ces 12 termes et mettre en facteur comme on peut. Autre possibilité, on peut partir de l'autre bout de l'équation : $-\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{B})) + \overrightarrow{B}\cdot(\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{A}))$, développer et retomber sur les mêmes termes.

3-4-5-6) A chercher (pas utilisés très souvent)

7) DEUX PROPRIETES IMPORTANTES

div $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{u} = \dfrac{\partial\,(\overrightarrow{\text{rot}}u)_x}{\partial x} + \dfrac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}}u)_y}{\partial y} + \dfrac{\partial\,(\overrightarrow{\text{rot}}u)_z}{\partial z} = \dfrac{\partial\,(\partial u_z/\partial y - \partial u_y/\partial z)}{\partial x} + \cdots$

div $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{u} = \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial z} + \cdots$ tous les termes vont se retrouver, alternativement avec le signe + ou le signe - et donc s'annulent 2 à 2.

Donc div $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{u} = 0$.

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}f = ?$ On va regarder sur une composante pour commencer ...

Sur la composante x on a $\dfrac{\partial}{\partial y}(\partial f/\partial z) - \dfrac{\partial}{\partial z}(\partial f/\partial y) = 0$. On applique la même chose en z et en y, et donc $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}f = \overrightarrow{0}$.