$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\varphi) = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j \partial_k \varphi$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\left(\partial_j \partial_k \varphi - \partial_k \partial_j \varphi\right) = 0$$

(2) $$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) = \partial_i \varepsilon_{ijk}\,\partial_j u_k$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\,\partial_i \partial_j u_k + \varepsilon_{jik}\,\partial_j \partial_i u_k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,u_{k,ij}\left(\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{jik}\right) = 0$$

(3) $$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \psi) = \partial_i (\varphi \psi) = \varphi\,\partial_i \psi + \psi\,\partial_i \varphi$$

(4) $$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{A}) = \partial_i (\varphi A_i) = \varphi\,\partial_i A_i + (\partial_i \varphi) . A_i$$

$$= \varphi\,\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{A}$$

(5) $$\vec{\nabla} \wedge (\varphi \vec{A}) = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j (\varphi A_k)$$

$$= \varepsilon_{ijk}\left[\varphi\,\partial_j A_k + \partial_j \varphi\, A_k\right]$$

$$= \varphi\,\vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla}\varphi \wedge \vec{A}$$

(6) $$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \partial_i\, \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

$$= A_j\,\cancel{\partial_i}\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_i B_k + B_k\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_i A_j$$

$$-\vec{A} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{B} + \vec{B} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{A} = A_j\left(-\varepsilon_{jik}\,\partial_i B_k\right) + B_k\,\varepsilon_{kij}\,\partial_i A_j$$

(7) $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \varepsilon_{ijk} \partial_j \, \varepsilon_{klm} \partial_l A_m$

$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \, \partial_j \partial_l A_m$

$= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \, \partial_j \partial_l A_m$

$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \, \partial_j \partial_l A_m$

$= \partial_i \partial_m A_m - \partial_j \partial_j A_i$

$= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

(8) $\vec{\nabla} \wedge (\varphi \vec{\nabla} \psi) = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varphi \partial_k \psi)$

$= \varepsilon_{ijk} (\partial_j \varphi)(\partial_k \psi) + \varepsilon_{ijk} \cancel{\varphi \, \partial_i \partial_k \psi}$

$= \vec{\nabla} \varphi \wedge \vec{\nabla} \psi$

(9) $\vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \varepsilon_{ijk} \partial_j \, \varepsilon_{klm} A_l B_m$

$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} (\partial_j A_l B_m)$

$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \, \partial_j (A_l B_m)$

$= \partial_j (A_i B_j) - \partial_l (A_l B_i)$

$= A_i \partial_j B_j + B_j \partial_j A_i - \partial_l A_l \cdot B_i - A_l \partial_l B_i$

$= \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$