Sciences de la Vie et de la Terre – L3
Geodynamique Externe - TD 4 - Correction

Erosion des reliefs et équilibre dynamique

1. *Altitude moyenne*

La figure 1 montre les différentes relations établies montrant le lien entre dénudation et altitude moyenne d'un relief.

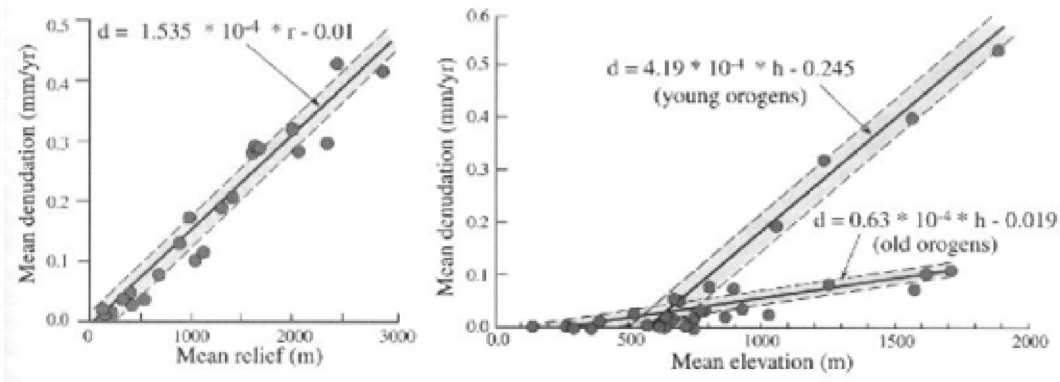


Figure 1Corrélation dénudation-Relief de Ahnert (à gauche) et de Pinet et Souriau (à droite)

1. Quelle relation différentielle exprimant l'évolution de l'altitude moyenne d'un relief peut-on déduire de la courbe de la partie gauche de la figure ?

La figure montre que le taux de dénudation est proportionnel à l'altitude moyenne du relief.
On a donc

$$Td=kH$$

avec Td le taux de dénudation, H l'altitude moyenne et k la constante de proportionnalité.
Le taux de dénudation représente l'épaisseur arrachée au relief pendant une certaine période de temps.
L'altitude du relief va donc diminuer de la valeur du taux de dénudation pendant cette même période de temps.
On a donc

$$Td=-dH/dt$$

D'où

$$dH/dt = -kH$$

L'équation décrivant l'évolution de l'altitude d'un relief en ne considérant que les processus érosifs est donc une équation différentielle du premier ordre sans second membre.

2. Quelle en est la solution ? Quels en sont le ou les paramètres importants ?

La solution d'une telle équation différentielle du premier ordre sans second membre est de la forme

$$H=We^{-kt}$$

avec W la constante d'intégration.
A $t = 0, H = H_0,$
D'où

$$H= H_0 e^{-kt}$$

Le paramètre important de cette solution est k (l'altitude initiale n'est pas importante, l'altitude au cours du temps dépend de cette valeur initiale, mais sa décroissance est décrite par k). Le terme kt est dans *l'exponentielle, et doit donc par conséquent être sans unité. k est donc une fréquence, l'inverse d'un temps : k =1/τ avec τ le temps caractéristique de l'évolution du système*

Le temps caractéristique est l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote et de la tangente à l'origine à la courbe représentative de la fonction $H= H_0\, e^{-t/\tau}$

A t = τ, $H=H_0e^{-\tau/\tau} = H_0.0.37$*, ainsi à l'instant τ, l'altitude H a diminué de 63 %*

A t = 5τ, $H=H_0e^{-5\tau/\tau} = H_0.0.01$*, ainsi à l'instant 5$\tau$, l'altitude H a diminué de 99.99 %*

k est donné par le graphe. Attention, le taux de dénudation étant exprimé en $mm.an^{-1}$*, pour avoir une fréquence correcte, et donc un temps caractéristique correct, il faut diviser le k qu'on nous donne par 1000. D'où* $\tau = 1/k = 1/(1.535.10^{-4}.10^{-3}) = 6.5.10^6$ *années, soit 6.5 Ma*

3. Si maintenant on suppose qu'un relief initialement au niveau de la mer est soumis à une surrection tectonique de vitesse verticale U constante, que devient l'équation d'évolution du relief ?

Si on considère une vitesse de surrection constante U en plus de l'érosion, l'équation décrivant la variation de l'altitude H au cours du temps va également dépendre de U.
U est une vitesse, on aura donc : $dH/dt = -kH + U$

L'équation devient une équation du premier ordre mais avec un second membre constant.
Il suffit pour trouver la solution générale d'additionner la solution sans second membre ($H=We^{-kt}$) *à une solution particulière de l'équation. Considérons le cas ou dH/dt=0. On a* $-kH + U = 0$*, d'où H=U/k est une solution particulière de l'équation.*

La solution générale est donc $H = We^{-kt} + U/k$

$$A\ t=0,\quad H = H_0 = We^{-0} + U/k,$$
$$d'où\ W = H_0 - U/k$$

La solution de l'équation décrivant l'évolution de l'altitude au cours du temps est donc

$$H = H_0e^{-kt} + U/k\,(1 - e^{-kt}).$$

4. Que nous apporte-t-elle comme information sur les interactions tectonique-érosion et sur l'évolution de l'altitude dans une chaîne en surrection ?

Cette équation nous apporte des informations sur l'évolution de l'altitude au cours du temps. Quand le temps devient grand, on voit clairement que H tend vers une valeur constante : U/k (c'est la limite de H quand t tend vers l'infini).
Cela montre que l'on atteint un relief d'équilibre dit dynamique. La topographie moyenne ne change plus une fois cet équilibre dynamique atteint, malgré la tectonique et l'érosion.
La compétition entre tectonique et érosion implique donc une altitude maximale pouvant etre atteinte par une chaine de montagne : $H = U/k = U\tau$.

5. Les mesures effectuées par Pinet et Souriau (figure 2 à droite) semblent indiquer que l'on peut classer les reliefs selon deux droites de pentes très différentes. Un relief initialement au niveau de la mer est soumis à un soulèvement de 0.2 mm/a durant 10 millions d'années. Tracez l'évolution de ce relief sur 20 millions d'années pour chacun des deux cas de figure envisagés par ces auteurs. Commentaires ?

Ces deux auteurs ont remarqué que toutes les montagnes du monde ne se plaçaient pas sur une seule et même courbe, mais qu'il existait deux types distincts : les orogènes jeunes et les orogènes anciens, présentant des temps caractéristiques d'évolution différents.

On nous demande dans cette question de tracer l'évolution de l'altitude au cours du temps de deux chaines de montagne initialement au niveau de la mer (H_0 = 0) : une jeune et une vieille, ayant donc des temps caractéristiques τ différents.

On connait à présent l'évolution de l'altitude des chaines de montagne au cours du temps :
$H = H_0e^{-kt} + U/k\ (1 - e^{-kt})$.

Deux étapes dans l'évolution de ces chaines sont résumées dans l'énoncé :

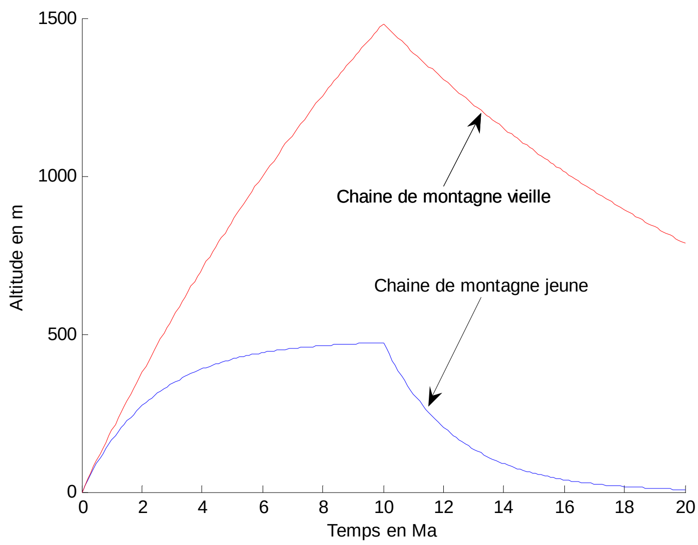
- de 0 à 10 Ma : les 2 chaines sont soumises à un soulèvement de 0.2 mm.an^{-1} et à l'érosion,
H0 = 0 d'après l'énoncé, on aura donc $\underline{H = U\tau\,(1 - e^{-t/\tau})}$.

- de 10 à 20 Ma : les deux chaines ne sont plus soumises qu'à l'érosion,
U=0, la formule $H = H_0e^{-kt}$ doit donc décrire l'évolution du relief.
Il faut faire très attention, cette formule décrit effectivement l'évolution du relief, mais H_0 n'est pas l'altitude initiale mais l'altitude à 10Ma, de même le temps t dans la formule n'est plus le temps écoulé depuis le début mais uniquement le temps écoulé depuis la fin du soulèvement, qui s'est arrêté au bout de 10 Ma. La formule à appliquer est donc $\underline{H = H_{10\,Ma}\,.e^{-(t-10)/\tau}}$.

On a maintenant les équations qui vont nous donner les altitudes des deux chaines au cours du temps. On connait U, on connait H_0, il ne nous manque donc que les τ.
Comme dans la question 2, c'est le graphe qui nous les donne en nous donnant les k. Attention, le taux de dénudation étant exprimé en mm.an^{-1}, pour avoir une fréquence correcte, et donc un temps caractéristique correct, il faut diviser le k qu'on nous donne par 1000.

Pour les jeunes on a $\tau_j = 1/k_j = 1/(4.19.10^{-4}.10^{-3}) = 2.4.10^6$ années, soit 2.4 Ma.
Pour les vieilles on a $\tau_v = 1/k_v = 1/(0.63.10^{-4}.10^{-3}) = 15.8.10^6$ années, soit 15.8 Ma.
Les montagnes jeunes ont donc un temps caractéristique d'évolution court par rapport aux montagnes vieilles, ce qui implique une évolution plus rapide des montagnes jeunes par rapport aux montagnes vieilles.

En utilisant les formules appropriées avec les constantes exprimées dans les bonnes unités, on obtient les courbes suivantes :



La chaine de montagne jeune est à l'équilibre au bout des 10 Ma et a complètement disparu au bout des 20 Ma de son évolution (ce qui était prévisible compte tenu de son temps caractéristique de 2.4 Ma). La chaine de montagne vieille elle est encore loin de l'équilibre dynamique au bout de 10 Ma, et perdure au bout des 20 Ma (prévisible également compte tenu de son temps caractéristique très élevé).

Alors bien sur si on réfléchit un peu, on comprend que tout ca ne veut pas dire grand-chose. Pinet et Souriau ont classé les montagnes du monde en deux catégories, les jeunes et les vieilles. A un moment donné, les montagnes jeunes vont bien devenir anciennes, leur temps caractéristique va augmenter. Cela va-t-il se faire d'un coup, ou plus progressivement ? Quoi qu'il en soit, cela signifie que notre hypothèse d'un temps caractéristique constant pendant 20 Ma n'est pas une hypothèse acceptable pour décrire l'évolution d'une chaine de montagne jeune. Ce modèle en lui-même, regroupant les chaines de montagne en seulement deux catégories, les jeunes et les vieilles, n'est pas réaliste et ne décrit pas le stade intermédiaire, le vieillissement d'une jeune chaine de montagne.

6. Si on suppose que le versant de la Urumqi He est à l'équilibre dynamique et que le temps caractéristique de l'érosion est, dans le cas du Tien Shan, de 10 millions d'années, quelle est la vitesse de soulèvement de la chaîne de montagne ?

A l'équilibre dynamique, il ya équilibre entre soulèvement et érosion, et l'altitude de la chainde montagne est constante et vaut $H = U\tau$. La Urumqi He est en moyenne à 2800 m d'altitude (d'après la courbe hyspométrique du TD précédent). Son temps caractéristique est de 10 Ma. En supposant que la chaine de montagne est à l'équilibre dynamique on a donc :

$$U = H / \tau = 2800 / 10.10^6 = 2.8.10^{-4}\ m.an^{-1} \text{ soit } 0.28\ mm.an^{-1}.$$

2. Profil en long d'une rivière

Afin de modéliser l'évolution des reliefs on suppose fréquemment que le transport de sédiment Q_s en tout point d'une rivière suit une loi dite de puissance de transport:

$$Q_s = k_c A^n S^m \quad (1)$$

où Q_s est le flux de sédiments (il s'agit d'un volume par unité de temps), A la surface du bassin versant, S la pente locale de la rivière et k_c, n et m des coefficients déterminés de façon empirique. Le bassin versant de la rivière considérée est soumis à un soulèvement uniforme U et supposé à l'équilibre dynamique.

1. Quelle contrainte impose l'existence d'un équilibre dynamique ?

L'érosion et la surrection se compensent, l'altitude du bassin versant est constante et vaut $H = U\tau$

2. Si maitenant on suppose que la rivière n'est jamais surchargée en sédiment que deviennent les matériaux érodés ?

Si la rivière n'est jamais surchargée en sédiment, tout ce qu'elle érode est transporté jusqu'à l'exutoire.

3. Quelle autre expression du flux Qs peut on alors écrire ? (toujours en volume par unité de temps)

Tout ce qui est érodé passe par l'exutoire. Le flux Qs de sédiments à la sortie de l'exutoire (le volume de sédiments par unité de temps) est donc le volume arraché au bassin versant par unité de temps, soit : Qs = Td.A, avec Td le taux de dénudation (épaisseur par unité de temps) et A la surface du bassin versant.

4. En déduire l'expression de la pente du profil d'équilibre en fonction de la vitesse de soulèvement, l'aire drainée et des coefficients de l'équation de transport.

On a Qs = Td.A et on a $Q_s = k_c A^n S^m$

On sait aussi que Qs = Qs

D'où $k_c A^n S^m = Td \,.\, A$ ➔ *D'où* $S = \left(\dfrac{U}{k_c}\right)^{1/m} A^{\left(1-n/m\right)}$

5. Le tableau suivant montre les valeurs moyennes, mesurées sur un MNT de la rivière, des couples aire drainée - pente. la résolution du MNT est de 30’’ d’arc. Quelle est la surface moyenne correspondant à chaque point du MNT ?

Surface drainée A (km^2)	Pente S
1.06	1.48e-01
1.77	1.05e-01
2.79	9.88e-02
4.40	7.60e-02
6.97	6.69e-02
1.08e+01	5.86e-02
1.71e+01	5.04e-02
2.66e+01	4.28e-02
4.35e+01	4.36e-02
6.71e+01	4.04e-02
1.04e+02	3.60e-02
1.68e+02	3.87e-02
2.54e+02	3.17e-02
3.915e+02	2.36e-02
6.91e+02	3.24e-02
1.00e+03	1.58e-02
1.41e+03	1.56e-02
1.96e+03	5.26e-03

Dans cette question on nous demande de déterminer la résolution du MNT (Modèle Numérique de Terrain) en mètres, ce qui est plus parlant qu’en degré d’arc.
C’est très important de connaitre la résolution à laquelle on travaille, cela permet de savoir d’emblée quelles informations seront ou ne seront pas accessibles.
60’’ d’arc (60 secondes d’arc) correspondent à 1’ d’arc (1 minute d’arc).
60’ d’arc (60 minutes d’arc) correspondent à 1° d’arc (1 degré d’arc).

Le périmètre de la Terre (2.π.6400 km) correspond évidemment à 360° d’arc.
La question est donc : combien de mètres font 30 ‘’ d’arc.

Si 360° d’arc correspondent à 2.π.6400 km, 1° d’arc correspond à 2.π.6400/360 = 111 km.
Si 1° d’arc correspond à 111 km, 1’ d’arc correspond à 111/60 = 1.85 km
D’où 30’’ d’arc correspondent à 1.85/2 = 0.925 km, soit 925 m.
La résolution du MNT est de 925 m, ce qui signifie que les altitudes du MNT sont moyennées sur des carrés de 925 de côté.

6. Quels processus ne pouvez vous "voir" étant donnée cette résolution ?

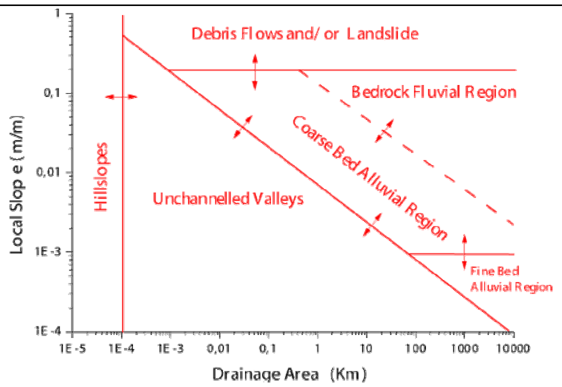
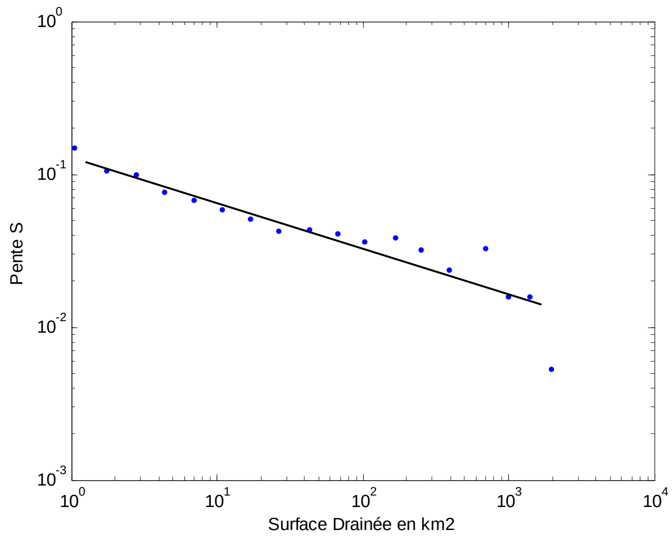


Figure 2 interprétation du diagramme de phase pente-aire drainée

La résolution du MNT étant de 925 m, soit des carrés d'environ 1km^2, tous les processus qui se passent sur des surfaces inférieures à 1km^2 nous sont inaccessibles. On ne peut donc pas voir les processus de pentes(hillslopes)

7. Représentez en coordonnées bilogarithmique S en fonction de A.



8. Que constatez vous ?

On a une relation linéaire en log-log.
L'équation de cette droite est log S = a log A + log b, avec a la pente de la droite et log b l'ordonnée à l'origine.
Connaissant les formules des log comme par exemple a log A = log A^a, ou log A + log b =logAb,
On peut simplifier et obtenir :

$$Log\ S = log\ bA^a$$

$$D'où\ S = bA^a$$

9. Ce que vous observez est-il compatible avec le calcul théorique précédent ?

Tout cela est parfaitement compatible avec le calcul théorique précédent de la question 4, avec

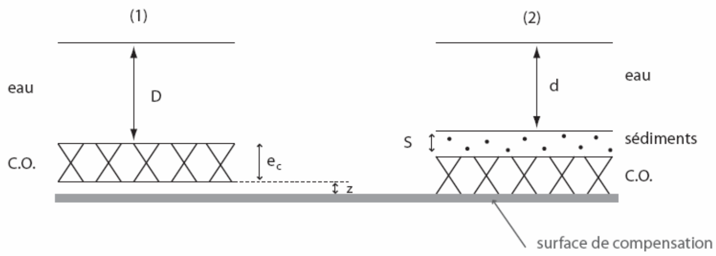
$$b = \left(\frac{U}{k_c}\right)^{1/m} \qquad et \quad a = (1-n)/m$$

De plus, si on replace ces points dans la figure 2, on tombe dans le domaine de l'érosion par les rivières (bedrock fluvial region) ce qui est compatible avec la precision du MNT.

3. Isosotasie

Exercice 1 : formation d'un bassin sédimentaire

1. Schéma



Afin d'exprimer z en fonction de D, d et S il suffit d'écrire la hauteur totale entre la surfa
l'eau et la surface de compensation aux stades (1) et (2) :

$$D + e_c + z = d + S + e_c$$

D'où $z = d - D + s$

2. Equilibre isostatique entre (1) et (2) :

$$D\rho_w + [(d - D) + S]\rho_m = d\rho_w + S\rho_s$$

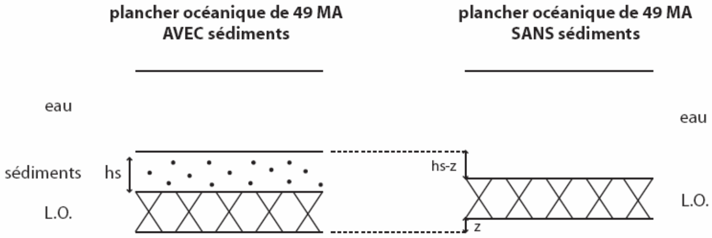
$$D\rho_w - (D - d)\rho_m + S\rho_m = d\rho_w + S\rho_s$$

$$S(\rho_s - \rho_m) = \rho_w(D - d) - \rho_m(D - d) \Rightarrow \boxed{S = \frac{(D-d)(\rho_w - \rho_m)}{\rho_s - \rho_m}}$$

3. S max quand $S = d \Rightarrow \boxed{S_{max} = D\frac{\rho_w - \rho_m}{\rho_s - 2\rho_m + \rho_w}}$

   A.N. : **Smax = 3,7 km.**

Exercice 2 : Thermosubsidence du plancher océanique



1. Equilibre isostatique :

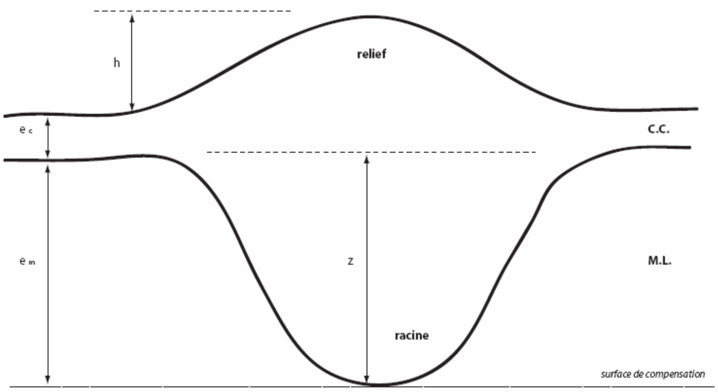
$$h_S\rho_S = (h_S - z)\rho_e + z\rho_a$$

$$h_S\rho_S = h_S\rho_e - z\rho_e + z\rho_a \Rightarrow \boxed{z = \frac{h_S(\rho_S - \rho_e)}{\rho_a - \rho_e}}$$

A.N. : **z = 300 m**

2. D'où $P(49\ MA) = 4000 - 300 = 3700\ m$
   Or $P(49) = P_0 + 350 \times \sqrt{49}$ soit $P_0 = P(49) - 350 \times 7$
   A.N. : **Po = 1250 m**

Exercice 3 : Chaîne de Montagne



1. Equilibre isostatique :

$$e_c\rho_c + e_m\rho_m = h\rho_c + e_c\rho_c + z\rho_c + (e_m - z)\rho_m$$

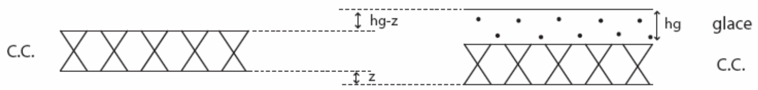
$$\Rightarrow h\rho_c + z\rho_c = z\rho_m \Rightarrow \boxed{z = h\frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c}}$$

A.N. : **z ≈ 5,4 h**

2. Érosion : h mais aussi z $\Rightarrow$ en tout, il y a **6,4 h** à éroder.

   A.N. :
   Si $h = 4800\ m$ alors $h_{erosion} = 30720\ m$

   Or $V_{erosion} = \frac{h_{erosion}}{t} \Leftrightarrow t = \frac{h_{erosion}}{V_{erosion}}$, soit **t = 10,24 MA**



3. Equilibre isostatique avec rajout de glace :

$$z\rho_m = (h_g - z)\rho g$$

$$z(\rho_m + \rho_g) = h_g\rho_g \Rightarrow \boxed{z = h_g \frac{\rho_g}{\rho_m + \rho_g}}$$

A.N. : **z = 238 m**
D'où le relief total aura une élévation de $h_{initiale} + h_{glace} - z$, soit **5562 m**.