Mécanique des solides et des planètes

MS5: Exercices du 26 février 2007

2007MS5E1 :

La vitesse angulaire ω de la machine est 24 000 tours par minute, soit 400 tours par seconde ou 800π radians par seconde. Un objet à une distance 25 cm de l'axe (rayon de la pièce) est donc projeté avec une vitesse de 200 π m/s. Si la masse de cet objet est 50 g soit 0.05 kg, son énergie cinétique est $1/2\times0.05\ (200\ \pi)^2 = 1000\ \pi^2$ soit environ 10 000 J.

Malgré sa petite taille, le projectile possède une énergie cinétique importante, comme une balle de fusil. Notons aussi que la vitesse est supersonique, le bruit sera aussi de forte intensité. En général, les objets en rotation sont très dangereux, et évidemment les machines en rotation rapide. Seuls les ouvriers hautement qualifiés utilisent des machines UGV et l'opérateur est toujours protégé.

2007MS5E2 :

Considérons un corps de masse m en rotation avec une période T sur une orbite circulaire de rayon R. La vitesse de rotation est alors $2\pi R/T$ et le moment cinétique autour du centre d'attraction est perpendiculaire au plan de l'orbite et son module est $2\pi mR^2/T$. Pour les satellites Galiléens de Jupiter, on obtient les résultats donnés dans le tableau suivant :

Corps	Rayon de l'orbite (10^6 km)	Période (jours)	Masse (10^{23} kg)	Moment cinétique (10^{36} kg m^2 s^{-1})
Io	0.4216	1.77	0.893	0.654
Europe	0.6709	3.55	0.479	0.443
Ganymède	1.070	7.16	1.48	1.73
Callisto	1.883	16.69	1.08	1.67

On constate que les valeurs des moments cinétiques de Io et Europe d'une part, et Ganymède et Callisto d'autre part, sont assez voisines.

2007MS5E3 :

Voir cours chapitre 3 section 3.2.5 page 33

2007MS5E4 :

Le moment d'inertie polaire d'une coquille creuse infiniment fine est :

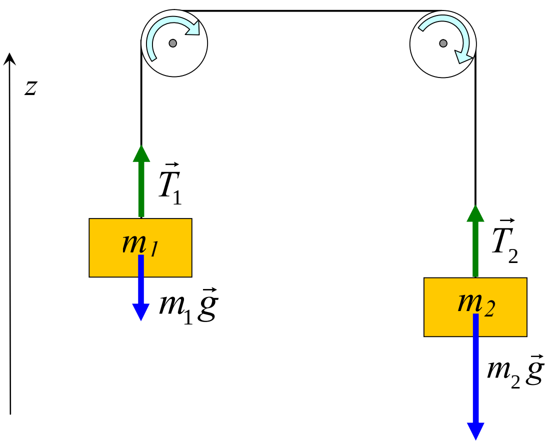
$$I_C = \int dmr^2 = R^2 \int dm = MR^2 \ . \qquad (1)$$

Le moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe qui passe par le centre C de la coquille est (chapitre 3 paragraphe *3.4.3*) :

$$I_\Delta = \frac{2}{3} I_C = \frac{2}{3} MR^2 \ . \qquad (2)$$

Pour la balle de ping-pong, $I_\Delta = 2/3\times0.0024\times(0.019)^2$ soit environ $5.8\ 10^{-7}$ kg m^2.

2007MS5E1C :



Chaque masse (voir figure) subit son poids, dirigé vers le bas, et la tension du fil (dirigée vers le haut). Comme il n'y a pas de forces au contact avec les poulies (sans masse), les deux tensions ont le même module T. Comme le fil est de longueur fixe, l'accélération du mobile 2 est égale et opposée à celle du mobile 1. Soit a le module de cette accélération (dirigée vers le haut pour 1 et vers le bas pour 2). Projetons sur l'axe vertical, orienté vers le haut, la deuxième loi de Newton pour chaque mobile:

$$\begin{cases} m_1 a = -m_1 g + T \\ -m_2 a = -m_2 g + T \end{cases} . \qquad (3)$$

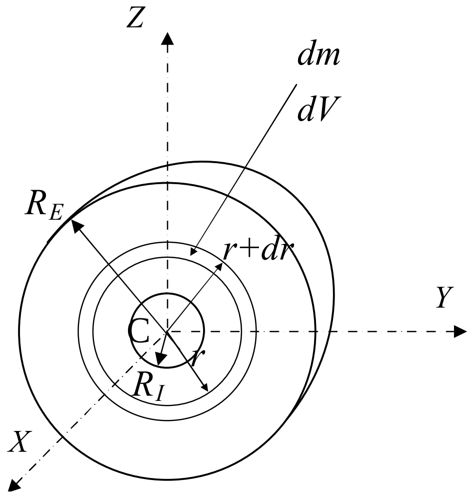
où g désigne l'accélération de la pesanteur. On obtient l'accélération en faisant la différence de ces deux équations:

$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g} . \qquad (4)$$

On en déduit la tension du fil:

$$\boxed{T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g} . \qquad (5)$$

2007MS5E2C :



Considérons une sphère creuse homogène de masse M, de rayon extérieur R_E et de rayon intérieur R_I. Soit ρ la masse volumique. Le volume total de matière est le volume compris entre les deux sphères, soit $4/3\pi(R_E^3-R_I^3)$. La masse volumique est donc :

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\left(R_E^{\ 3} - R_I^{\ 3}\right)} = \frac{3M}{4\pi\left(R_E^{\ 3} - R_I^{\ 3}\right)} . \tag{6}$$

Le moment d'inertie polaire par rapport au centre est donné par définition par :

$$I_C = \int dmr^2 . \tag{7}$$

Pour le calculer, on découpe la sphère en petits éléments de volume dV compris entre les sphères de rayon r et $r+dr$ (voir figure ci-dessus). On a $dV=4\pi r^2 dr$. On a ainsi :

$$I_C = \int_{R_I}^{R_E} dmr^2 = \int_{R_I}^{R_E} \rho dVr^2 = \rho\int_{R_I}^{R_E} \left(4\pi r^2 dr\right) r^2 = 4\pi \frac{3M}{4\pi\left(R_E^3 - R_I^3\right)} \int_{R_I}^{R_E} r^4 dr = \frac{3}{5} M \frac{R_E^5 - R_I^5}{R_E^3 - R_I^3} . \tag{8}$$

Le moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe qui passe par le centre C de la sphère creuse est, comme plus haut :

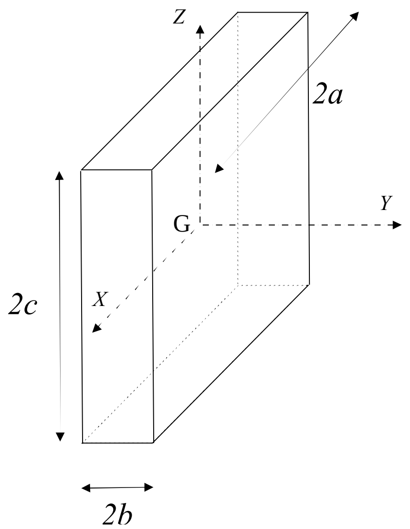
$$I_\Delta = \frac{2}{3} I_C = \boxed{\frac{2}{5} M \frac{R_E^5 - R_I^5}{R_E^3 - R_I^3}} . \tag{9}$$

2007MS5E3C :

Considérons (voir figure ci-dessous) un parallélépipède homogène, supposé rectangle et droit, de masse M et de côtés $2a$, $2b$ et $2c$. Le centre d'inertie G est au centre de l'objet et on choisit les axes GX, GY et GZ perpendiculaires aux faces. Ainsi, les plans GXY, GYZ et GXZ sont des plans de symétrie : tous les produits d'inertie sont nuls.

On connaît le moment d'inertie $I_{\Pi XY}$ du parallélépipède par rapport au plan GXY : c'est le moment d'inertie par rapport à son plan médian d'un objet cylindrique, soit $M(2c)^2/12=Mc^2/3$ (voir chapitre 3 paragraphe *3.4.2*). De même, on a :

$$I_{\Pi YZ} = \frac{Ma^2}{3} \quad \text{et} \quad I_{\Pi XZ} = \frac{Mb^2}{3} . \tag{10}$$



Le moment d'inertie par rapport à un axe est égal à la somme des moments d'inertie de deux plans perpendiculaires qui se coupent par cet axe (chapitre 3 paragraphe *3.4.1*). On a donc :

$$I_{XX} = I_{\Pi XY} + I_{\Pi XZ} = \frac{Mc^2}{3} + \frac{Mb^2}{3} = \frac{M\left(b^2 + c^2\right)}{3} \qquad (11)$$

et des expressions analogues pour les deux autres axes.

La matrice d'inertie du parallélépipède dans le repère GXYZ s'écrit donc :

$$\bar{I}_G = \begin{bmatrix} \frac{M\left(b^2+c^2\right)}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M\left(a^2+c^2\right)}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\left(a^2+b^2\right)}{3} \end{bmatrix}. \qquad (12)$$