

Chapitre 4

Forces et dynamique vectorielle dans les systèmes matériels et les solides

Dans ce chapitre, nous allons reprendre la notion de force, introduire la notion de moment d'une force et exprimer les lois de Newton dans le cas d'un système de points et d'un solide rigide. Il s'agit de nous préparer une boîte à outils qui contiendra le moins de matériel possible. Tout comme si nous partions sur le terrain, en effet, nous ne voulons pas nous encombrer de choses lourdes et pas très utiles. Le contenu de ce bagage doit cependant être suffisant pour nous permettre de comprendre l'essentiel des problèmes mécaniques de notre environnement et certains aspects de l'évolution de notre planète.

4.1 Considérations préliminaires à l'étude générale du mouvement d'un système

4.1.1 Quelques rappels et généralités sur la notion de force

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, une force est une quantité vectorielle qui, une fois appliquée à un corps en MRU, le fait dévier de ce MRU selon la deuxième loi de Newton. la notion de force est donc intimement liée à la notion d'accélération par l'intermédiaire d'un paramètre, la masse d'inertie. On distingue plusieurs catégories de forces, suivant leur origine.

Nous avons déjà rencontré la force universelle de la gravitation qui exprime le fait que toute matière s'attire et nous avons vu que cette attraction est proportionnelle à la quantité de matière, ou la masse, et on fait l'hypothèse que masse gravitationnelle et masse d'inertie coïncident. A la surface d'une planète, on parle de poids qui s'écrit comme le produit de la masse et de l'accélération de la gravité g . Sur des petites échelles spatiales, par exemple les quelques étages d'une tour de notre université, on peut considérer que g est constant. Par contre g dépend du lieu (notamment de la latitude et de l'altitude) comme nous le rappellerons plus loin.

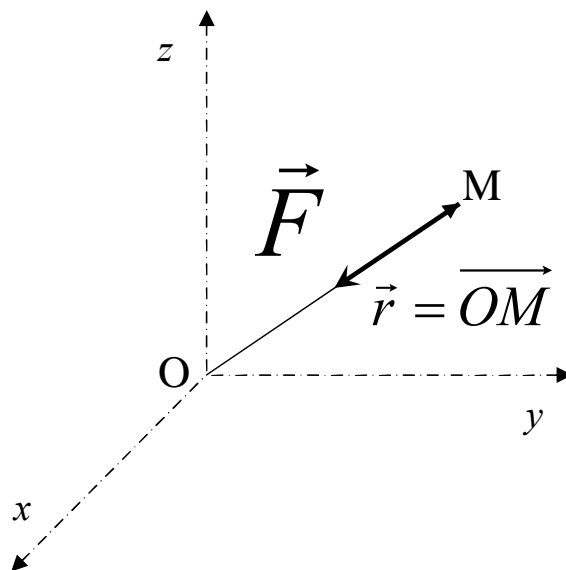


Figure 4.1. Force centrale en O appliquée au point M.

La force de gravitation fait partie d'une famille plus générale, les forces centrales. Une force centrale (Figure 4.1) est une force qui s'applique à un point M et qui est toujours dirigée

vers un point fixe O de l'espace. L'intensité de cette force peut dépendre de la position de l'espace, ou être à symétrie sphérique, auquel cas elle ne dépend que de la distance r entre O et M. La force gravitationnelle est dans ce cas, avec une loi en $1/r^2$, tout comme, par exemple, l'attraction ou la répulsion entre charges électriques.

Un autre cas fréquent est le cas de la force de rappel. C'est une force centrale attractive dont l'intensité varie linéairement avec la distance. Elle peut donc s'écrire :

$$\vec{F} = -k\vec{r} , \quad (4.1)$$

où \vec{r} est le rayon vecteur \overrightarrow{OM} et k une constante dite constante de rappel.

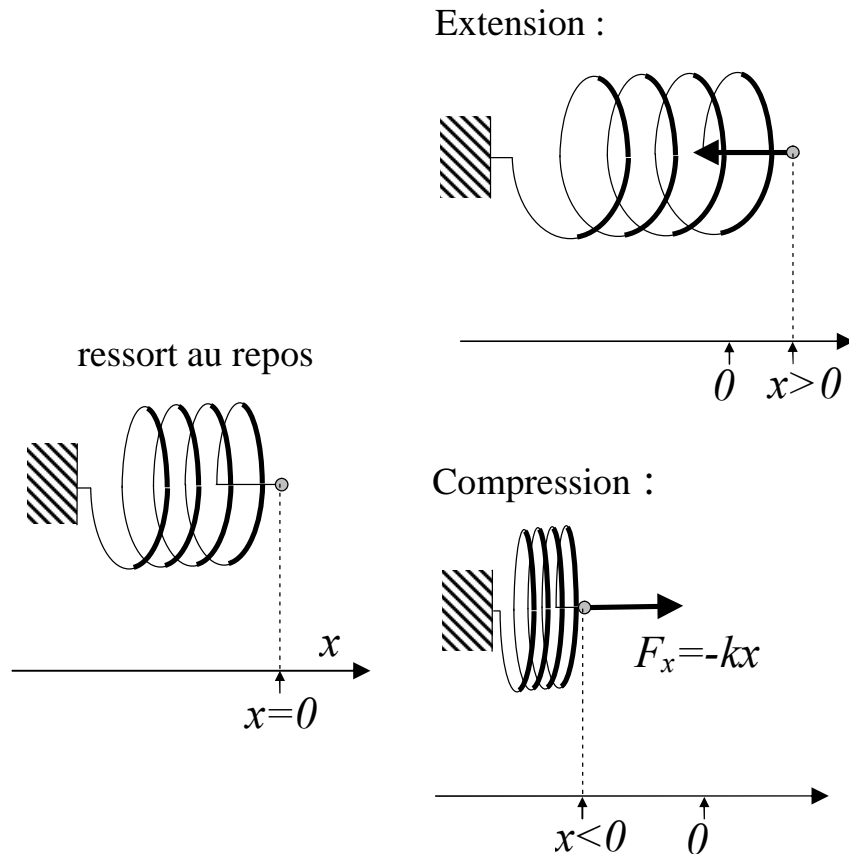


Figure 4.2. Force de rappel exercée par un ressort.

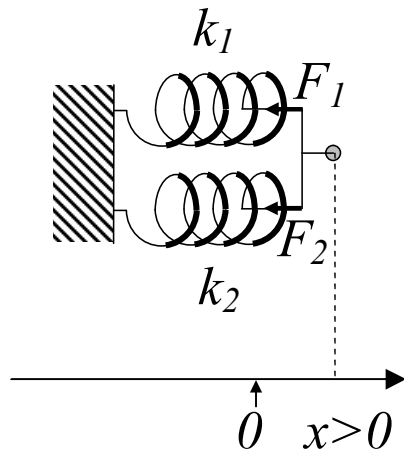
Un exemple de force de rappel est la force exercée par un ressort (Figure 4.2). En général, pour les faibles allongements ou compressions, on peut considérer que la force élastique d'un ressort est proportionnelle à sa variation de longueur. C'est la loi de Hooke, du nom de Robert Hooke (1635-1703), contemporain de Newton. Hooke était un inventeur génial qui eut avec ce dernier des relations peu amicales d'abord, puis violemment conflictuelles ensuite. Dans le cas d'un ressort, la constante k s'appelle la rigidité. Pour les ressorts, il est utile de se rappeler (voir encadré 4.1) que les raideurs s'ajoutent quand on les arrange en parallèle le long d'une droite mais ce sont les inverses des raideurs qui s'ajoutent quand on les arrange en série.

Dans l'encadré 4.2, on donne un autre exemple de force de rappel : la force qui tend à ramener un pendule dans la position verticale. C'est, dans la limite des petits angles, une force de rappel qui s'exerce dans la plan horizontal.

Une famille de forces mérite une attention particulière, aussi bien pour les objets de la vie courante que pour des problèmes de sciences de la Terre, c'est la famille des forces de friction.

Encadré 4.1: Combinaisons de ressorts.

Combinaison en parallèle

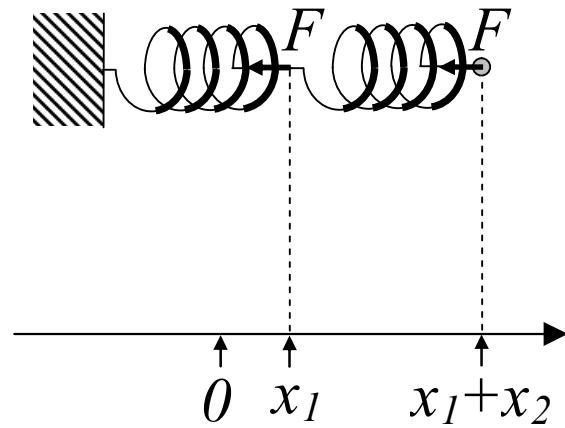


Pour un allongement x , on a une force de rappel totale F qui est la somme des deux forces exercées par chaque ressort :

$$F = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2)x = kx$$

Ce système est donc équivalent à un ressort unique de rigidité k qui est la somme des rigidités : $k = k_1 + k_2$

Combinaison en série

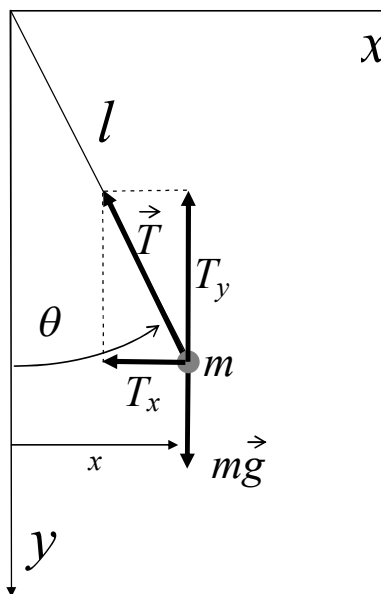


Dans ce cas, une force F est transmise le long des deux ressorts. L'allongement total x est la somme des deux allongements. On a donc :

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k}$$

Ce système est donc équivalent à un ressort unique de rigidité k telle que : $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

Encadré 4.2: Force de rappel dans le pendule simple



On a vu dans l'encadré 1.2 que les composantes de la tension du fil sont :

$$\begin{cases} T_x = -T \sin \theta \\ T_y = -T \cos \theta \end{cases}$$

et les équations du mouvement :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = T_x \\ m\ddot{y} = mg + T_y \end{cases}$$

Pour les petits angles, on peut écrire $x \approx l\theta$ et $\begin{cases} T_x \approx -T\theta \\ T_y \approx -T \end{cases}$

et :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = T_x \approx -T\theta \\ m\ddot{y} \approx 0 = mg + T_y \approx mg - T \end{cases}$$

La deuxième équation donne : $T \approx mg$

et la première devient : $m\ddot{x} \approx -mg\theta \approx -\frac{mg}{l}x$

On a donc une force de rappel horizontale avec $k = \frac{mg}{l}$

4.1.2 Forces et coefficients de friction

La notion de friction est intuitive, elle vous a déjà été exposée au cours de vos études. Regardons par exemple un objet de masse M posé sur une surface plane (Figure 4.3). Il subit deux forces, son poids et la réaction \vec{R} de cette surface. Inclignons maintenant cette surface qui devient ainsi un plan incliné. Quand l'angle θ du plan incliné avec l'horizontale est faible, on voit que l'objet reste immobile. Cela se produit car il y a de la friction entre les deux objets, autrement dit il existe de multiples petites aspérités du plan (Figure 4.3) sur lesquelles l'objet s'accroche. On comprend que cette friction va dépendre fortement de la nature des deux surfaces.

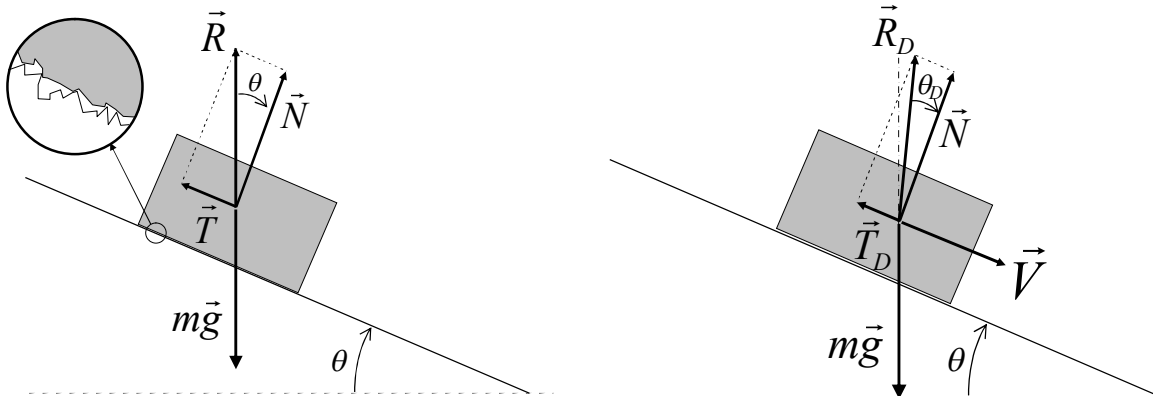


Figure 4.3. Friction sur un plan incliné.

Quand l'objet est immobile, la réaction \vec{R} de la surface demeure opposée au poids $M\vec{g}$. On peut décomposer cette réaction en une composante \vec{N} normale au plan et une composante tangentielle \vec{T} . Les modules N et T de ces deux composantes vérifient alors :

$$\begin{cases} T = Mg \sin \theta \\ N = Mg \cos \theta \end{cases} \quad (4.2)$$

et on a donc la relation :

$$\frac{T}{N} = \tan \theta . \quad (4.3)$$

Si on augmente l'angle θ , il apparaît un moment où l'objet commence à glisser. L'angle pour lequel l'objet commence à glisser s'appelle angle de frottement statique, noté θ_s . On peut maintenant écrire la condition de non-glisserment comme :

$$\frac{T}{N} = \tan \theta \leq \tan \theta_s \quad (4.4)$$

et on appelle $f_s = \tan \theta_s$ le coefficient de friction statique. Il dépend en général de la nature du plan, de la nature de l'objet, de la force de la surface de contact, et de la présence d'eau, d'huile ou autres fluides. Par exemple, pour du bois sur du bois sec, il vaut environ 0.5 mais environ 0.2 pour du métal sur du métal sec. Ces deux nombres deviennent respectivement 0.2 et 0.1 en présence d'huile.

Une fois que le solide est en mouvement (Figure 4.3), les choses sont différentes. On ne peut plus écrire la condition (4.2) car le solide n'est plus à l'équilibre ni en MRU, il accélère et la somme des forces appliquées n'est donc plus nulle. L'expérience montre que la situation peut être compliquée, avec une force de friction tangentielle T_D qui dépend de la vitesse de glissement. Souvent, cependant, on peut faire l'hypothèse que le rapport des composantes tangentielles et normales de la réaction est constant :

$$\frac{T_D}{N} = \tan \theta_D = f_D . \quad (4.5)$$

L'angle θ_D est l'angle de friction dynamique et la quantité $f_D = \tan \theta_D$ s'appelle le coefficient de friction dynamique. Pour du bois sec sur du bois sec, le coefficient de frottement dynamique vaut environ 0.2 et 0.1 pour un contact lubrifié entre deux pièces de bois. En général, le coefficient de friction dynamique est plus petit que le coefficient de friction statique. C'est d'ailleurs conforme à l'intuition. Il y a moins de frottement entre deux objets en mouvement relatif car les aspérités peuvent alors plus difficilement s'accrocher les unes aux autres, et elles peuvent même se casser les unes sur les autres, si bien que la friction diminue au cours du temps. C'est bien ce qui se passe quand on fait du polissage. Plus on frotte, plus c'est lisse.

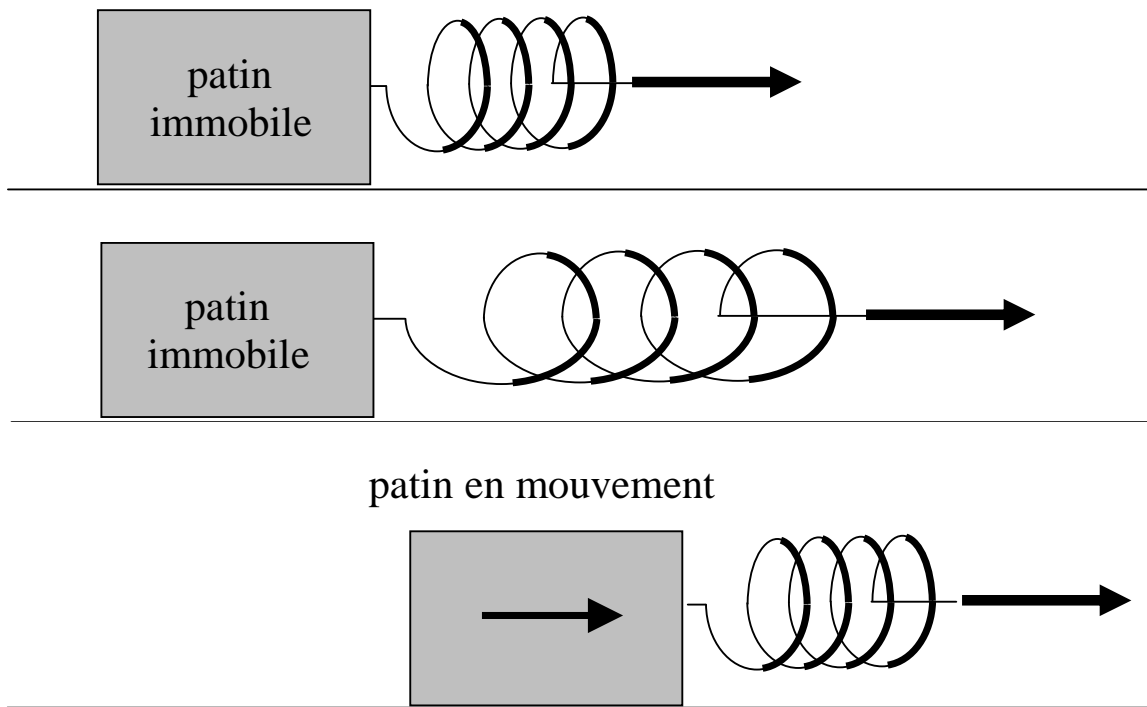


Figure 4.4. Patin et ressort : Accumulation et relâchement d'énergie élastique.

Il est assez amusant de déterminer les coefficients de friction par des expériences simples avec des plans inclinés. On cherche l'angle θ_S à partir duquel le glissement se produit, ce qui donne la valeur de f_S , et on étudie alors la force qui ralentit le mouvement, qui fournit f_D .

Imaginons maintenant l'expérience suivante (Figure 4.4) qui est une analogie simple d'un cycle sismique. Posons un patin sur un plan et tirons-le par l'intermédiaire d'un ressort. Au début, le patin ne bouge pas et le ressort s'étire. De l'énergie élastique est alors stockée dans le ressort. La force tangentielle subie par le patin est égale à la force de rappel du ressort et elle vérifie la relation (4.4). Puis, à un certain moment, le patin bouge, la force tangentielle a dépassé le maximum donné par le coefficient de friction statique. Pendant son mouvement, le patin subit une force de friction dynamique, plus petite, puisque le coefficient de friction dynamique est inférieur au coefficient de friction statique. Le mouvement du patin est ralenti par cette force de friction et parce que la force du ressort a diminué quand il s'est comprimé, jusqu'à ce qu'il s'arrête. Si on continue de tirer le ressort, le cycle recommence. On voit ainsi qu'on commence par accumuler de l'énergie dans le ressort, puis cette énergie se libère quand le patin bouge. Pendant ce mouvement, l'énergie élastique est convertie en chaleur dans la friction. Ce cycle est un analogue du contact entre deux failles tectoniques. Le mouvement

relatif des plaques est équivalent au mouvement que nous imprimons au ressort et quand le patin bouge, c'est l'équivalent d'un tremblement de terre. Cette analogie est en fait très riche et vous l'exploiterez abondamment dans vos études de tectonique et de sismologie.

Outre le frottement de glissement que nous venons d'évoquer, on rencontre aussi en pratique le frottement de pivotement et le frottement de roulement mais ces notions sont de peu d'intérêt en sciences de la Terre.

4.1.3 Friction visqueuse

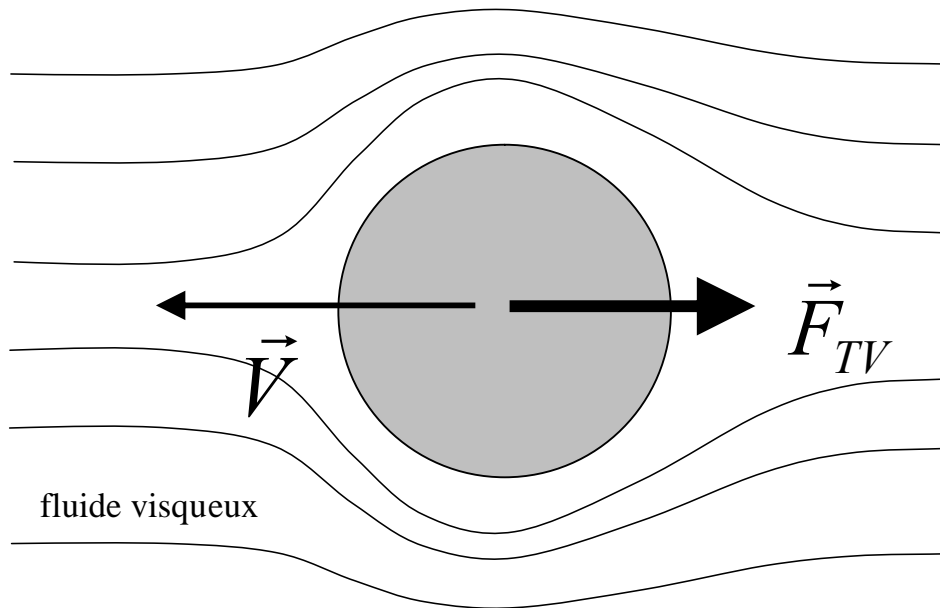


Figure 4.5. Force de friction visqueuse sur une sphère se déplaçant dans un fluide.

Considérons (Figure 4.5) une sphère de rayon R en mouvement avec une vitesse \vec{V} dans un fluide. La sphère subit une force, dite de traînée visqueuse, notée \vec{F}_{TV} , qui s'oppose au mouvement, et qui, quand la vitesse n'est pas trop grande, s'écrit:

$$\vec{F}_{TV} = -6\pi\mu R\vec{V} , \quad (4.6)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide. L'amplitude de cette traînée visqueuse est donc proportionnelle au rayon et à la vitesse. La relation (4.6) est connue sous le nom de loi de Stokes. Il est utile de se souvenir des valeurs numériques de la viscosité dynamique pour l'eau (10^{-3} Pa s) et l'air ($2 \cdot 10^{-5}$ Pa s) dans les conditions usuelles. Il faut aussi se souvenir que la loi de Stokes, très utile en pratique, n'est plus valable quand les vitesses deviennent grandes et que l'écoulement autour de l'objet devient turbulent. Il existe alors d'autres expressions qui ne seront pas évoquées dans notre cours.

Pour fixer les idées, estimons la traînée visqueuse dans l'air pour une balle de ping-pong (masse 2.4 g et rayon 19 mm) de vitesse 10 m/s. On a :

$$F_{TV} = 6\pi \cdot 210^{-5} \times 0.019 \times 10 \approx 7 \times 10^{-5} \text{ N} , \quad (4.7)$$

ce qui est petit par rapport au poids (0.024 N).

Une autre famille très importante de forces qui interviennent dans les fluides, et en particulier les fluides géophysiques, est la famille des forces de pression et de poussée d'Archimède (qui est, petite parenthèse en passant, égale au poids du volume de fluide déplacé). Nous n'en parlerons pas ici mais elles font l'objet d'attention dans d'autres cours de votre cursus.

4.1.4 Moment d'une force

Considérons la balance à fléau de la Figure 4.6a. A gauche, un objet de masse m_1 est à une distance d_1 de l'axe, tandis qu'un objet de masse m_2 est suspendu à une distance d_2 de l'axe. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que :

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 . \quad (4.8)$$

En fait, la forme du fléau n'intervient pas. Si le fléau était tordu comme indiqué en Figure 4.6b, pour obtenir l'équilibre, on aurait la même condition mais, cette fois, on prendra pour d la distance mesurée horizontalement. C'est assez intuitif mais on le montrera explicitement plus loin. Ce qui compte, c'est la distance entre la force, vue comme une quantité vectorielle et l'axe.

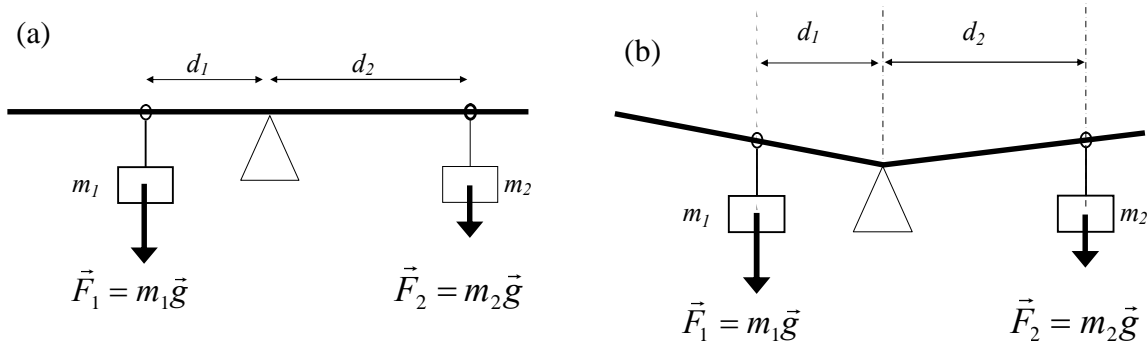


Figure 4.6. Equilibre d'une balance à fléau.

Définissons la quantité suivante, appelée moment par rapport à un point P de la force \vec{F} appliquée en M (Figure 4.7), et notée $\vec{\Gamma}_P$:

$$\vec{\Gamma}_P = \overrightarrow{PM} \times \vec{F} . \quad (4.9)$$

Dans l'exemple de la Figure 4.6a, le moment du poids de m_1 est perpendiculaire au plan de la page, dirigé vers le lecteur. Le signe du moment indique le sens dans lequel la force appliquée tend à faire tourner l'objet autour du point de référence. Le moment du poids de m_2 est perpendiculaire au plan de la page, dirigé vers la page. L'équation d'équilibre (4.8) revient à dire que le moment total des forces est nul.

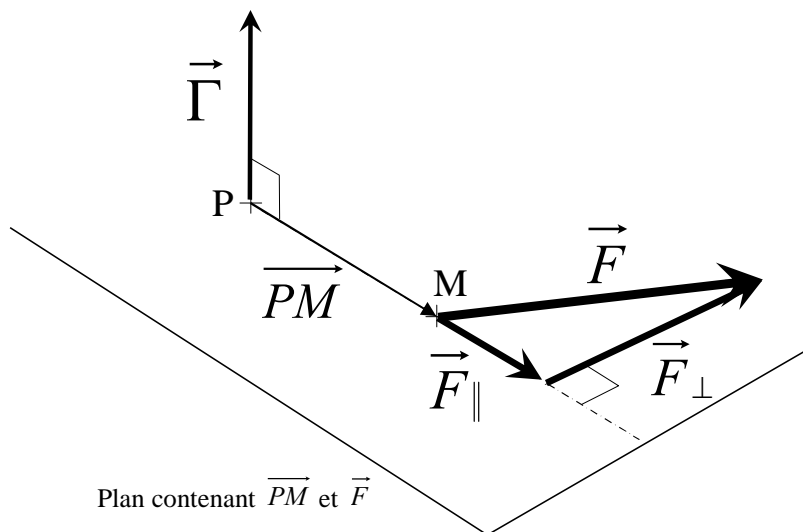


Figure 4.7. Moment d'une force appliquée en M par rapport à un point P.

La forme vectorielle nous dit immédiatement que le moment de la force est nul si P coïncide avec M et si la force est parallèle avec le rayon vecteur. Comme nous l'avions vu à

propos de la balance à fléau plus haut, seule la distance perpendiculaire à la force intervient. De même, seule la composante de la force perpendiculaire au rayon vecteur \overrightarrow{PM} intervient. Montrons-le en décomposant la force \vec{F} en ses composantes parallèle \vec{F}_{\parallel} et perpendiculaire \vec{F}_{\perp} à \overrightarrow{PM} (Figure 4.7). On a alors:

$$\vec{\Gamma}_P = \overrightarrow{PM} \times \vec{F} = \overrightarrow{PM} \times (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}) = \overrightarrow{PM} \times \vec{F}_{\parallel} + \overrightarrow{PM} \times \vec{F}_{\perp} = \overrightarrow{PM} \times \vec{F}_{\perp} . \quad (4.10)$$

Comme pour le moment cinétique, le moment d'une force \vec{F} par rapport à un axe Δ de vecteur directeur \vec{u} est :

$$\Gamma_{\Delta} = \vec{\Gamma}_P \cdot \vec{u} , \quad (4.11)$$

où P est un point quelconque de l'axe.

Cette notion de moment d'une force va nous servir à formuler les lois de Newton dans le cas d'un système en la combinant au moment cinétique.

4.2 Théorèmes fondamentaux de la dynamique vectorielle pour un système de points

4.2.1 Considérations préliminaires

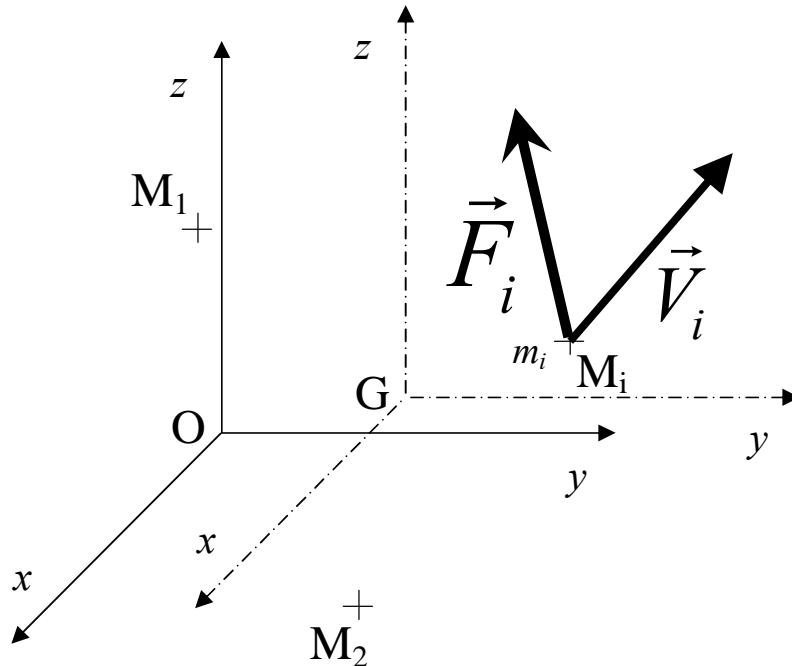


Figure 4.8. Dynamique d'un système de points.

Considérons (Figure 4.8) un système de points rapportés à un référentiel Oxyz. Nous ferons maintenant l'hypothèse, pour pouvoir appliquer les lois de Newton, que ce référentiel est Galiléen. C'est par exemple un repère fixe par rapport aux étoiles, ou tout autre référentiel en MRU par rapport à celui-ci. On utilisera aussi beaucoup un autre référentiel, dit référentiel barycentrique. C'est un repère dont l'origine est le centre d'inertie G de notre système et dont les axes Gx, Gy et Gz sont parallèles aux axes correspondants du repère fixe. A priori, le repère barycentrique n'est pas Galiléen.

Nous supposons en outre qu'en chaque point M_i du système s'applique une force \vec{F}_i et nous supposons que, en chaque point M_i , cette force \vec{F}_i se décompose en deux parties :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^E + \sum_{j \neq i} \vec{F}_i^j , \quad (4.12)$$

où \vec{F}_i^E désigne la force en M_i due à des causes extérieures au système, et \vec{F}_i^j désigne la force en M_i due au point M_j . Les forces \vec{F}_i^j peuvent correspondre à des interactions gravitationnelles dans le vide ou, dans le cas d'un système sur table, à des forces de liaisons, rigides ou pas.

La troisième loi de Newton (principe d'action et réaction) nous indique que :

$$\vec{F}_j^i = -\vec{F}_i^j , \quad (4.13)$$

ce qui implique que :

$$\sum_{i,j \neq i} \vec{F}_i^j = 0 . \quad (4.14)$$

Autrement dit, la somme vectorielle de toutes les forces d'interaction est nulle.

Nous pouvons maintenant appliquer la deuxième loi de Newton à chaque point M_i :

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \vec{F}_i , \quad (4.15)$$

ce qui représente beaucoup d'équations. En pratique, comme on va le voir, on n'a pas besoin de résoudre toutes ces équations.

4.2.2 Théorème de la quantité de mouvement

Faisons la somme sur tous les points des équations (4.13) :

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i . \quad (4.16)$$

Le premier terme peut se réécrire:

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{V}_i = \frac{d}{dt} \vec{P} , \quad (4.17)$$

où \vec{P} désigne comme au chapitre 2 la quantité de mouvement totale.

Quant au deuxième terme :

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{F}_i^E + \sum_{j \neq i} \vec{F}_i^j \right) = \sum_i \vec{F}_i^E = \vec{R}_E \quad (4.18)$$

d'après (4.12). La quantité \vec{R}_E s'appelle la résultante des forces extérieures. On a ainsi montré qu'une conséquence des lois de Newton est que :

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{R}_E , \quad (4.19)$$

résultat connu sous le nom de théorème de la quantité de mouvement ou théorème du centre d'inertie. Il dit ainsi que :

la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement totale d'un système est égale à la résultante de toutes les forces extérieures.

4.2.3 Conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé

Considérons maintenant le cas particulier important où le système est isolé. La résultante des forces extérieures est donc nulle et la quantité de mouvement totale est conservée pendant le mouvement.

Il y a de nombreuses conséquences et applications de ce fait.

- Si la quantité de mouvement totale est conservée, alors la vitesse du centre d'inertie est constante. Le référentiel barycentrique est alors un référentiel Galiléen.
- Chocs. Dans un système isolé de points en collision, la quantité de mouvement ne peut varier, quelle que soit la complexité des forces d'interaction qui interviennent pendant le choc.
- Principe de la propulsion: Considérons un système isolé comprenant un objet de masse m dans un véhicule de M initialement au repos (Figure 4.9). Supposons maintenant que la masse m est éjectée avec la vitesse v par rapport au véhicule. Comme la quantité de mouvement totale est conservée, le véhicule doit acquérir une vitesse V telle que $MV=mv$. De nombreux véhicules, comme les fusées ou les avions à réaction, sont propulsés selon ce principe. C'est aussi cette conservation de la quantité de mouvement totale qui explique le recul des canons et armes à feu.

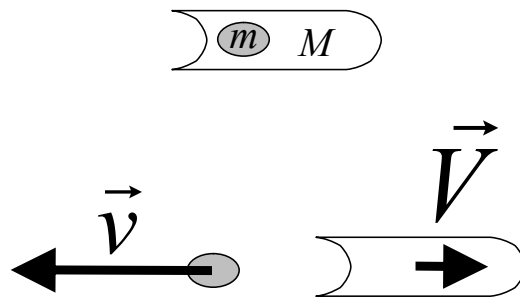


Figure 4.9. Conservation de la quantité de mouvement et propulsion.

4.2.4 Théorème du moment cinétique

Les lois de Newton (4.13) permettent d'obtenir une deuxième série de relations utiles.

Considérons en effet le moment cinétique $\vec{\sigma}_P$ par rapport à un point fixe P et dérivons-le par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_P = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \overrightarrow{PM}_i \times \vec{p}_i \right) = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{PM}_i \right) \times \vec{p}_i + \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times \frac{d}{dt} \vec{p}_i . \quad (4.20)$$

Le premier terme est nul car la dérivée par rapport au temps du vecteur \overrightarrow{PM}_i est la vitesse de M_i , parallèle à \vec{p}_i . Quant au deuxième terme, il donne :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_P = \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times \vec{F}_i . \quad (4.21)$$

Cette dernière quantité est le moment total $\vec{\Gamma}_P$ des forces par rapport au point P :

$$\vec{\Gamma}_P = \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times \vec{F}_i \quad (4.22)$$

et on a :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_P = \vec{\Gamma}_P . \quad (4.23)$$

résultat connu sous le nom de théorème moment cinétique. Il dit ainsi que :

la dérivée par rapport au temps du moment cinétique total d'un système par rapport à un point fixe P est égale au moment résultant par rapport à P de toutes les forces.

Remarque : Il existe un cas particulier important, le cas où toutes les forces de liaisons \vec{F}_i^j sont alignées avec le rayon vecteur $\overrightarrow{M_i M_j}$. C'est le cas d'un système en interaction gravitationnelle ou un système de points liés par des ressorts. Le moment total des forces s'écrit alors :

$$\vec{\Gamma}_P = \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times \left(\vec{F}_i^E + \sum_{j \neq i} \vec{F}_i^j \right) = \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times \vec{F}_i^E + \sum_i \sum_{j \neq i} \overrightarrow{PM}_i \times \vec{F}_i^j . \quad (4.24)$$

Le deuxième terme peut être réordonné en faisant apparaître tous les couples i, j :

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{j \neq i} \overrightarrow{PM}_i \times \vec{F}_i^j &= \sum_{i < j} \left(\overrightarrow{PM}_i \times \vec{F}_i^j + \overrightarrow{PM}_j \times \vec{F}_j^i \right) \\ &= \sum_{i < j} \left(\overrightarrow{PM}_i \times \vec{F}_i^j - \overrightarrow{PM}_j \times \vec{F}_i^j \right) = \sum_{i < j} \left(\overrightarrow{PM}_i - \overrightarrow{PM}_j \right) \times \vec{F}_i^j = \sum_{i < j} \overrightarrow{M_j M_i} \times \vec{F}_i^j = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Dans ce cas de forces d'interaction alignées avec les rayons vecteurs, on voit que le moment total des forces par rapport à un point P est égal au moment des forces extérieures uniquement. On peut donc oublier les forces de liaison quand on évalue le moment total des forces. C'est très utile dans de nombreux cas pratiques de mouvement de solides au laboratoire.

Ce moment total des forces extérieures possède une expression particulièrement simple dans le cas du poids dans un champ de gravité constant \vec{g} . On a alors :

$$\vec{\Gamma}_P = \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times \vec{F}_i^E = \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times (m_i \vec{g}) = \left(\sum_i m_i \overrightarrow{PM}_i \right) \times \vec{g} = M \overrightarrow{PG} \times \vec{g} \quad (4.26)$$

ce qui peut s'écrire :

$$\vec{\Gamma}_P = \overrightarrow{PG} \times M \vec{g} . \quad (4.27)$$

Le moment total par rapport à un point P dû au poids est ainsi égal au moment par rapport à P du poids total appliqué au centre d'inertie. Ce fait est très utile en pratique comme nous le verrons dans la suite et dans de nombreux exercices.

Enfin, dans le cas du mouvement d'un système autour d'un axe fixe Δ , on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \sigma_\Delta = \Gamma_\Delta . \quad (4.28)$$

Quand il s'agit d'un système rigide, on a :

$$I_\Delta \dot{\omega} = \Gamma_\Delta , \quad (4.29)$$

où I_Δ est le moment d'inertie par rapport à Δ .

4.2.5 Conservation du moment cinétique pour un système isolé

Revenons maintenant sur le cas particulier important du système isolé. Le moment total des forces est extérieures est nul mais le moment total des forces ne sera nul que dans le cas déjà évoqué où les forces d'interaction sont alignées avec les rayons vecteurs. Alors, et alors seulement pourrons-nous dire que le moment cinétique total par rapport à un point fixe est conservé pendant le mouvement. La condition restrictive est vérifiée dans la plupart des cas pratiques, notamment le cas important en sciences de la Terre d'un nuage de points en interaction gravitationnelle.

Ainsi, si on considère que le système Terre-Lune est isolé, son moment cinétique total doit être conservé. De même le moment cinétique total de la nébuleuse donnant naissance au système solaire est conservé. Nous verrons d'autres applications plus loin.

Avec le théorème de la quantité de mouvement et le théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe, on peut traiter un grand nombre des problèmes de mécanique qui nous

préoccupent. Cependant, il est parfois intéressant d'utiliser des variantes du théorème du moment cinétique par rapport à des points mobiles.

4.3 Enoncés du théorème du moment cinétique par rapport à des points mobiles

4.3.1 Cas du repère barycentrique

Le centre d'inertie est un point particulier qui nous intéresse évidemment, surtout une fois qu'on aura résolu son mouvement grâce au théorème de la quantité de mouvement. Ce centre d'inertie présente cependant un inconvénient; en général, il n'est pas immobile. Cependant, on peut voir que le théorème du moment cinétique s'y applique.

En effet, on a vu au chapitre 3 que le moment cinétique par rapport à tout point fixe P peut se décomposer en deux parties :

$$\vec{\sigma}_P = \vec{\sigma}_{/G} + \overrightarrow{PG} \times M\vec{V}_G . \quad (4.30)$$

C'est le premier théorème de Koenig !

Dérivons par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_P = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{/G} + \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{PG} \right) \times M\vec{V}_G + \overrightarrow{PG} \times \left(\frac{d}{dt} M\vec{V}_G \right) . \quad (4.31)$$

Le deuxième terme est nul car on retrouve la dérivée donne encore la vitesse. On obtient alors, en appliquant le théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_P = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{/G} + \overrightarrow{PG} \times \vec{R}_E . \quad (4.32)$$

Par ailleurs, le moment total des forces par rapport à P peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_P &= \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times \vec{F}_i = \\ &= \sum_i \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GM}_i \right) \times \vec{F}_i = \overrightarrow{PG} \times \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \overrightarrow{GM}_i \times \vec{F}_i = \overrightarrow{PG} \times \vec{R}_E + \vec{\Gamma}_G . \end{aligned} \quad (4.33)$$

En comparant (4.27) et (4.25), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{/G} = \vec{\Gamma}_G . \quad (4.34)$$

Le théorème du moment cinétique s'applique donc dans le référentiel barycentrique :

la dérivée par rapport au temps du moment cinétique total d'un système par rapport à son centre d'inertie est égale au moment résultant par rapport à celui-ci de toutes les forces.

Remarque : Quand les forces de liaison sont parallèles aux rayons vecteurs, le moment de toutes les forces par rapport au centre d'inertie est égal au moment total des forces extérieures.

Nous avons maintenant, conformément au programme esquissé au chapitre 3, séparé l'étude du mouvement de notre solide en deux parties indépendantes : l'étude du mouvement du centre d'inertie et l'étude du mouvement du système autour du centre d'inertie.

4.3.2 Cas général du théorème du moment cinétique par rapport à un point mobile

Considérons maintenant un point P quelconque de vitesse \vec{V}_P . Le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ par rapport au point fixe O peut s'exprimer en fonction du moment cinétique $\vec{\sigma}_P$ par rapport à P. En effet :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \sum_i \overrightarrow{OM_i} \times m_i \vec{V}_i = \sum_i (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM_i}) \times m_i \vec{V}_i = \overrightarrow{OP} \times \left(\sum_i m_i \vec{V}_i \right) + \sum_i \overrightarrow{PM_i} \times m_i \vec{V}_i. \quad (4.35) \\ &= \vec{\sigma}_P + \overrightarrow{OP} \times M \vec{V}_G\end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_O = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_P + \vec{V}_P \times M \vec{V}_G + \overrightarrow{OP} \times \vec{R}_E \quad (4.36)$$

en utilisant le théorème de la quantité de mouvement. Par ailleurs, en procédant comme en (4.30) plus haut :

$$\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{R}_E + \vec{\Gamma}_P. \quad (4.37)$$

En comparant (4.36) et (4.37), on a donc :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_P = \vec{\Gamma}_P - \vec{V}_P \times M \vec{V}_G. \quad (4.38)$$

Dans le cas général, on constate donc que le théorème du moment cinétique dans sa forme simple ne s'applique pas par rapport à un point mobile autre que le centre d'inertie. Il y a un terme supplémentaire $-\vec{V}_P \times M \vec{V}_G$. Souvenons-nous surtout du fait qu'il vaut mieux être prudent quand on travaille avec des points mobiles.

Cependant, dans le cas particulier où \vec{V}_P et \vec{V}_G sont parallèles, le produit vectoriel de ce terme supplémentaire s'annule. Il se trouve que c'est un cas intéressant en pratique. Considérons en effet le cas d'un objet circulaire qui roule sans glisser sur une surface. Soit P le point du plan qui coïncide à tout instant avec le point de contact. Alors que la vitesse du point C du solide au point de contact est nulle (condition de roulement sans glissement), le point P se déplace, il a une vitesse qui est exactement égale à la vitesse du centre d'inertie. On peut donc appliquer directement le théorème du moment cinétique par rapport à ce point P.

Maintenant que nous sommes bien outillés, nous allons commencer à manipuler ces théorèmes à travers quelques exemples qui nous initieront aux autres exemples étudiés en exercices.

4.4 Quelques exemples d'application du théorème du moment cinétique

4.4.1 Rotation d'un objet déformable autour d'un axe fixe

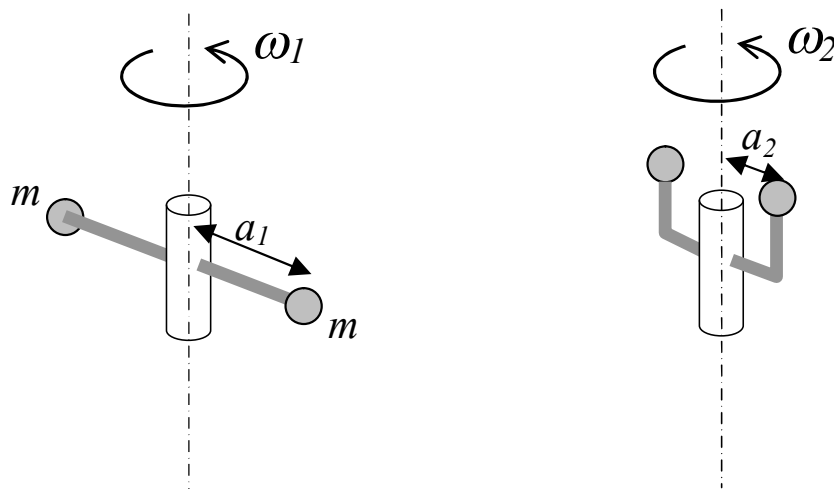


Figure 4.10. Rotation de deux masses soutenues par un support déformable.

Considérons (Figure 4.10) un support sans masse en rotation autour d'un axe fixe Δ avec une vitesse angulaire ω_1 . Sur ce support sont attachés deux bras sans masse qui soutiennent, perpendiculairement à l'axe, deux points M_1 et M_2 de masse m à une distance a_1 de l'axe. Le moment cinétique σ_1 par rapport à l'axe s'écrit :

$$\sigma_1 = I_{\Delta} \omega_1 = 2ma_1^2 \omega_1 . \quad (4.39)$$

Supposons maintenant que les bras se replient (Figure 4.9) sans qu'aucune force extérieure n'intervienne. La distance a_2 des points M_1 et M_2 à l'axe devient $a_2=a_1/2$. Que se passe-t-il?

En l'absence de forces extérieures, on sait que le moment cinétique est conservé. On a donc :

$$\sigma_2 = I_{\Delta} \omega_2 = 2ma_2^2 \omega_2 = \sigma_1 = 2ma_1^2 \omega_1 . \quad (4.40)$$

On a donc :

$$\omega_2 = \frac{a_1^2}{a_2^2} \omega_1 = 4\omega_1 . \quad (4.41)$$

Le système se met donc à tourner quatre fois plus vite ! C'est une expérience qui est facile à réaliser, je vous y encourage, par exemple avec un siège tournant, mais avec la précaution de ne tourner qu'avec de faibles vitesses angulaires pour éviter les accidents. C'est aussi cette même conservation du moment cinétique qui explique pourquoi les patineurs ramènent leurs bras sur eux pour accélérer un mouvement de rotation, ou au contraire écartent les bras pour ralentir. C'est très efficace, l'effet va approximativement comme l'extension latérale au carré. Il y a de nombreuses autres applications de cet effet que nous explorerons dans certains exercices.

4.4.2 Le pendule physique

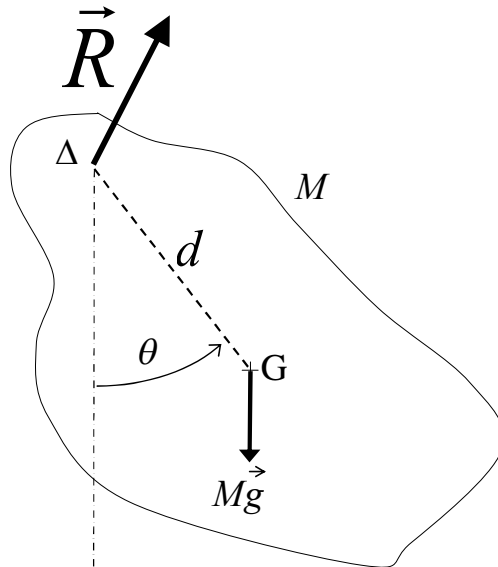


Figure 4.11. Mouvement du pendule physique autour d'un axe Δ .

Considérons maintenant un objet de forme quelconque qui peut tourner librement autour d'un axe fixe Δ (Figure 4.11). Soit O le point de l'axe dans le plan perpendiculaire à l'axe passant par le centre d'inertie, $d=OG$ la distance entre l'axe et le centre d'inertie G, et I_{Δ} le moment d'inertie de l'objet par rapport à Δ . Le seul degré de liberté de ce système est l'angle entre OG et la verticale, noté θ . La vitesse angulaire de rotation est $\omega = \dot{\theta}$.

Faisons le bilan des forces extérieures qui s'appliquent sur cet objet. On a d'abord le poids qui s'applique au centre d'inertie G . Il y aussi la réaction \vec{R} de l'axe. Appliquons le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ . Le moment de la réaction est nul. Le seul moment à considérer est donc le moment du poids :

$$\frac{d}{dt}\sigma_{\Delta} = \Gamma_{\Delta} = -Mgd \sin \theta . \quad (4.42)$$

Mais on a :

$$\frac{d}{dt}\sigma_{\Delta} = \frac{d}{dt}(I_{\Delta}\omega) = I_{\Delta} \frac{d}{dt}(\omega) = I_{\Delta} \frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = I_{\Delta}\ddot{\theta} . \quad (4.43)$$

Ainsi l'équation du mouvement est :

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgd}{I_{\Delta}} \sin \theta . \quad (4.44)$$

Dans la limite des petits angles, comme on a vu dans l'encadré 1.2, cette équation admet une solution périodique de période T donnée par :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{Mgd}} . \quad (4.45)$$

On vérifie bien que dans le cas d'une masse ponctuelle, $I_{\Delta} = Md^2$, et on retrouve bien la formule de la période du pendule simple.

4.4.3 Roulement sans glissement d'un cylindre sur un plan incliné

Considérons (Figure 4.12) un cylindre homogène, de masse M et de rayon R , qui roule sans glisser le long d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Dans cette hypothèse du roulement sans glissement, ce système ne possède qu'un seul degré de liberté. Soit x la coordonnée du centre d'inertie G le long d'un axe parallèle au plan incliné et orienté vers le bas (Figure 4.12). La vitesse instantanée de rotation ω autour du centre d'inertie est, comme on l'a vu au début du chapitre 3, $\omega = \dot{x} / R$.

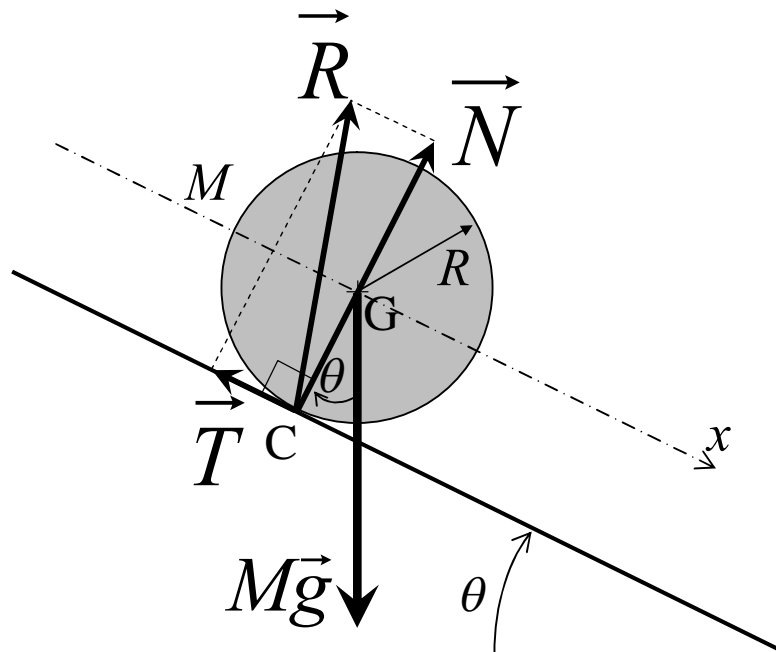


Figure 4.12. Cylindre homogène roulant sans glisser sur un plan incliné.

Cherchons les forces appliquées à notre cylindre. Il y a d'abord son poids $M\vec{g}$. Il y a aussi la réaction \vec{R} du plan que nous pouvons, comme au début de ce chapitre, décomposer en une composante tangentielle \vec{T} et une composante normale \vec{N} .

Appliquons tout d'abord le théorème de la quantité de mouvement. Si \vec{a} est l'accélération du centre d'inertie, on a :

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{R} . \quad (4.46)$$

Projetons cette relation sur l'axe Gx :

$$M\ddot{x} = Mg \sin \theta - T . \quad (4.47)$$

Si on projette sur un axe perpendiculaire à Gx et au plan incliné :

$$0 = -Mg \cos \theta + N . \quad (4.48)$$

Appliquons maintenant le théorème du moment cinétique par rapport au centre d'inertie G . Le moment de la force de réaction par rapport à G se limite à RT . Le moment du poids par rapport à G est nul. On a donc :

$$\frac{d}{dt} \sigma_{\Delta} = I_{\Delta} \dot{\omega} = I_{\Delta} \frac{\ddot{x}}{R} = \Gamma_{\Delta} = RT . \quad (4.49)$$

ce qui, connaissant l'expression du moment d'inertie d'un cylindre homogène par rapport à son axe de symétrie $I_{\Delta} = MR^2/2$ (voir chapitre 2), fournit l'expression de la réaction tangentielle en fonction de l'accélération du centre d'inertie :

$$T = \frac{I_{\Delta} \ddot{x}}{R^2} = \frac{M\ddot{x}}{2} . \quad (4.50)$$

En injectant cette expression dans (4.44), on obtient :

$$M\ddot{x} = Mg \sin \theta - \frac{M\ddot{x}}{2} . \quad (4.51)$$

d'où :

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \theta . \quad (4.52)$$

On constate que le cylindre ne se comporte pas comme une masse ponctuelle qui glisse sans frottement le long du plan incliné ($g \sin \theta$). Le roulement du cylindre a un effet : son accélération est $2/3$ celle de la masse qui glisse sans frottement.

Pour que la condition de roulement sans glissement soit vérifiée, il faut que, comme on l'a vu au début de ce chapitre :

$$\frac{T}{N} \leq f_s . \quad (4.53)$$

On obtient T à partir de la relation (4.46) et N à partir de la relation (4.45). On obtient alors la condition :

$$\frac{1}{3} \tan \theta \leq f_s . \quad (4.54)$$

Il y a donc un angle limite θ_0 à ne pas dépasser qui est donné par :

$$\tan \theta_0 = 3f_s . \quad (4.55)$$

Pour un cylindre de bois sec roulant sur du bois sec, on a $f_s=0.5$ et on obtient $\theta_0=56^\circ$. Pour un cylindre de bois roulant sur du bois lubrifié, on a $f_s=0.2$ et on a alors $\theta_0=31^\circ$. On remarque que ces angles sont assez élevés. Un cylindre roule plutôt bien sans glisser pour une large gamme d'angle du plan incliné.

Remarque : On aurait pu choisir d'appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à C . Soit I_{AC} le moment d'inertie du cylindre par rapport à C . Le moment de la force

de réaction par rapport à C est nul. Seul le moment du poids doit être considéré. Il vaut $MgR\sin\theta$. On a alors :

$$\frac{d}{dt}\sigma_{\Delta C} = I_{\Delta C}\dot{\omega} = I_{\Delta C}\frac{\ddot{x}}{R} = \Gamma_C = MgR\sin\theta . \quad (4.56)$$

Mais, d'après la règle de Steiner-Huygens, on a :

$$I_{\Delta C} = I_{\Delta} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 . \quad (4.57)$$

On obtient donc à nouveau le résultat (4.52), ce qui certes est rassurant. On voit qu'il existe plusieurs façons d'appliquer le théorème du moment cinétique. Si ces différentes approches sont équivalentes, dans certains cas, certaines voies sont considérablement plus faciles que d'autres.

Equipés de nos théorèmes généraux, en particulier le théorème du moment cinétique, nous pouvons nous pencher sur le mouvement d'un solide en rotation autour d'un point fixe ou autour de son centre d'inertie, et, parmi ceux-ci, nous souhaitons élucider quelques situations mécaniques concernant notre planète Terre. C'est l'objet du prochain chapitre.

Ce qu'il faut retenir de ce chapitre :

- La notion de force et de coefficient de friction
- La notion de moment d'une force
- Le théorème de la quantité de mouvement
- Le théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe
- Le théorème du moment cinétique par rapport au centre d'inertie
- Savoir appliquer la conservation de la quantité de mouvement
- Savoir appliquer la conservation du moment cinétique
- Retrouver la période des petites oscillations du pendule physique
- Décrire le roulement sans glissement d'un solide sur un plan incliné