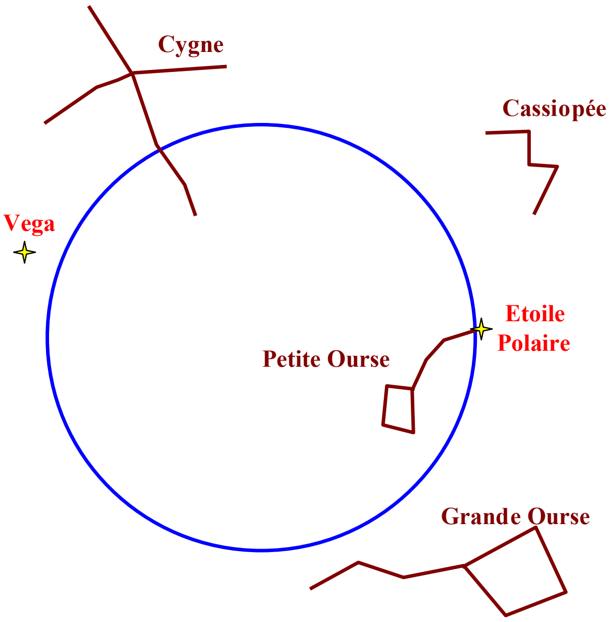
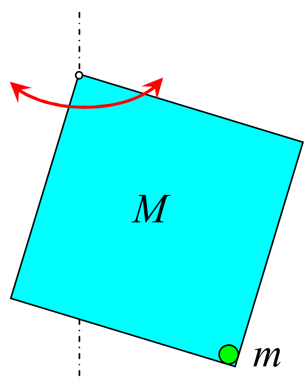
04/04/2008

Licence STEP L2 Module Physique pour les géosciences S4

Mécanique des solides et des planètes

Examen écrit du 23 avril 2007 suivi du corrigé

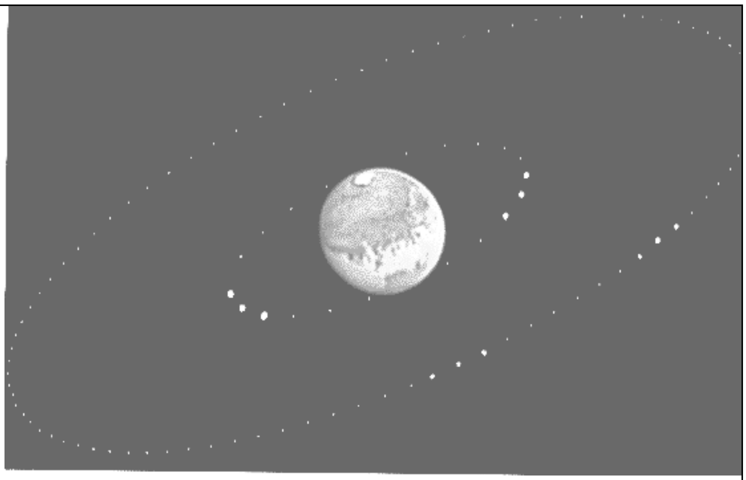
Documents autorisés: néant, calculette : tolérée. Veillez à soigner la rédaction. Durée : 4 heures
On prendra l'accélération de la gravité g égale à 10 m/s^2.

n°1 (4 pt)	1) Qu'appelle-t-on précession des équinoxes? Quelle est son origine physique? Faire qualitativement une analogie avec le mouvement de la toupie posée sur un point fixe. 2) Dans la figure ci-dessous, le cercle bleu décrit la position vers laquelle pointe l'axe de rotation de la Terre au cours du temps. Dans quel sens est parcouru ce cercle? Quelle est l'ouverture angulaire de ce cercle? Où pointait l'axe de rotation de la Terre au moment de la première civilisation dans la vallée du Nil (5000 ans avant JC)? 
n°2 (2 pt)	Considérons un disque homogène de masse 10 kg et de diamètre 1 m. Quel est le moment d'inertie de ce disque par rapport à un axe perpendiculaire à son plan passant par un point du bord? Plaçons ce disque verticalement et faisons le osciller autour d'un axe horizontal perpendiculaire à son plan et passant par un point du bord. Quelle est la fréquence des petites oscillations autour de la position d'équilibre?
n°3 (4 pt)	1) Quelle est la matrice d'inertie par rapport à son centre d'inertie d'une plaque de fer fine, homogène, ayant la forme d'un carré de masse M et de côté a? 2) Plaçons cette plaque verticalement et faisons-la osciller par rapport à un axe perpendiculaire à son plan et passant par un coin. Quelle est la période des petites oscillations? Ajoutons à cette plaque un aimant de masse m sur le coin opposé à l'axe. La période des petites oscillations est multipliée par un facteur $2/\sqrt{3}$. Quelle est la masse m de l'aimant? 

n°4

(6 pt)

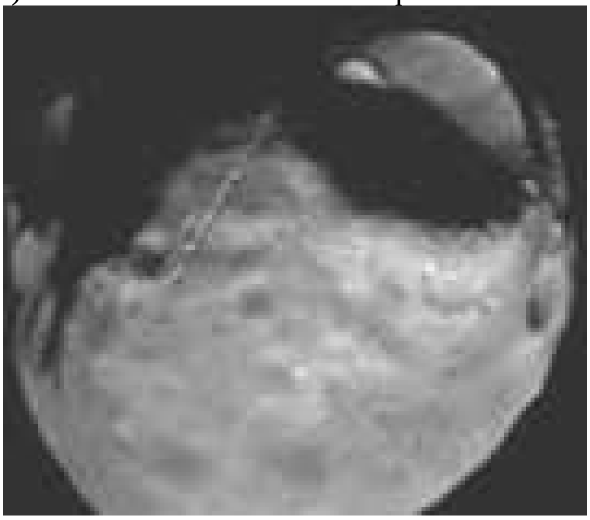
1) Redémontrer la troisième loi de Kepler dans le cas d'une orbite circulaire.



2) En 1877, l'astronome américain Asaph Hall (1829-1907) découvrait les deux satellites de Mars, Phobos et Deimos. Quelques données sur ces deux objets sont réunies dans la table ci-dessous. Calculer la masse de Mars et la comparer à la masse de la Terre et à la masse de la Lune.

	Masse (10^{16} kg)	Diamètre (km)	Période de rotation autour de Mars	Distance à Mars (km)
Phobos	1.1	28×23×20	7 h 39 min	9378
Deimos	0.2		1.263 jours terrestres	23459

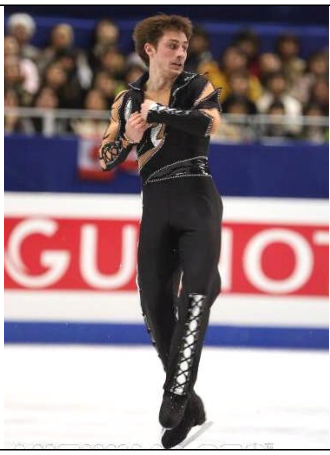
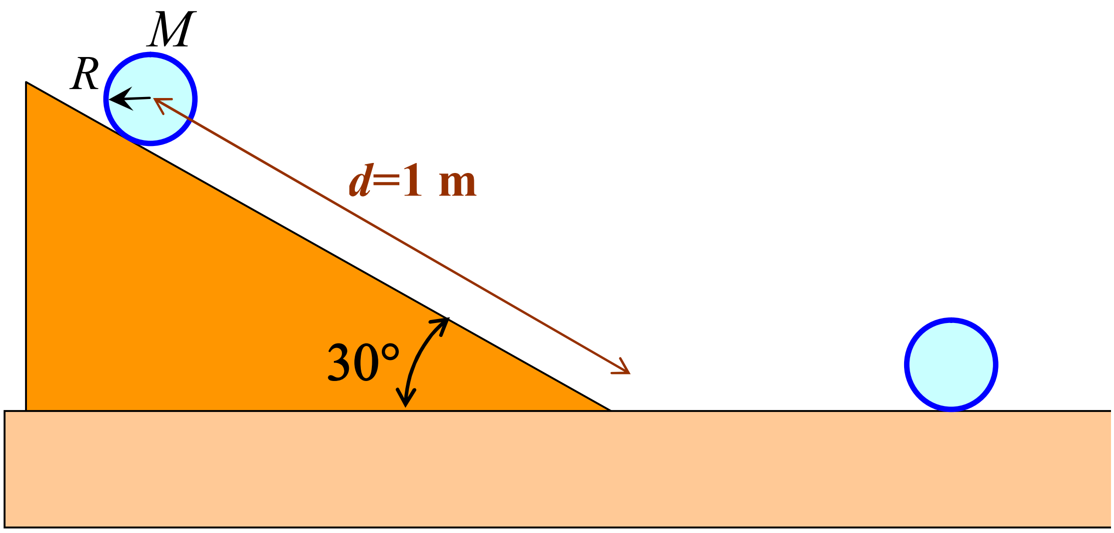
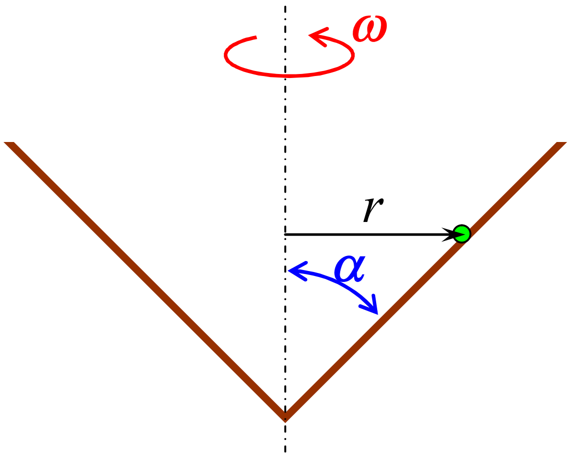
3) Calculer les moments cinétiques de Phobos et Deimos par rapport au centre de Mars.



4) Assimilons Phobos à un ellipsoïde homogène de masse M et de demi-grands axes a, b, c selon trois axes OX, OY, OZ, respectivement, avec $a>b>c$. Donner la valeur des trois composantes diagonales A, B, C de la matrice d'inertie principale centrale de Phobos. On utilisera le fait que le moment d'inertie C par rapport à l'axe OZ de l'ellipsoïde défini précédemment est égal à: $C = M\left(a^2+b^2\right)/5$. On en déduira les autres moments d'inertie par permutation circulaire.

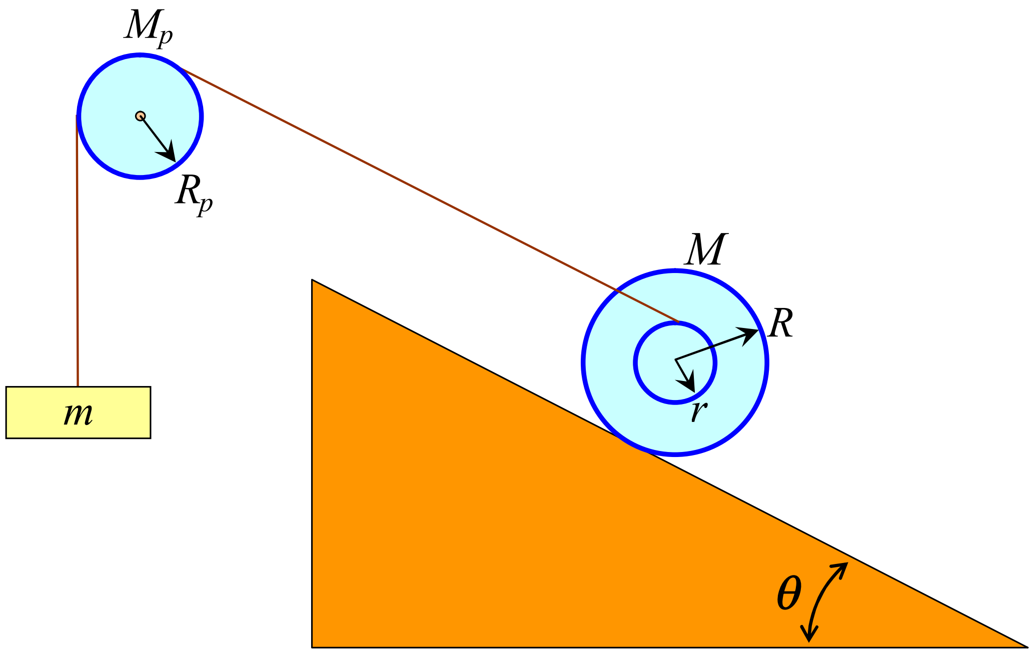
5) La mission Pathfinder a permis de déterminer que la vitesse de précession de l'axe de rotation de Mars vaut 7576±35 milli-seconde d'arc par an. Cette valeur correspond à quelle période de précession? La vitesse de précession d'une planète due à un objet de masse M_0 situé à une distance r_0 s'écrit: $\dot{\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{GM_0}{r_0^3}\alpha_I\frac{\cos\theta}{\omega_Z}$ où θ est l'angle d'inclinaison du plan équatorial de l'axe sur l'écliptique (25.19° pour Mars), ω_Z la vitesse angulaire de rotation de la planète sur elle-même et α_I l'aplatissement défini par $\alpha_I = \left(C-\left(A+B\right)/2\right)/C$. Considérons d'abord que la précession de l'axe de Mars est due uniquement au soleil. Déduire la valeur de α_I pour Mars. La période sidérale de rotation de Mars est 24.62 heures et sa distance au soleil est 1.524 UA. Comparer à la valeur de α_I pour la Terre. Quelle est la contribution de Phobos à la précession de l'axe de Mars par rapport à celle du soleil?

6) Considérons un pendule simple de période une seconde à la surface de la Terre. Quelle est sa période à la surface de Mars? Le rayon moyen de la planète Mars est de 3375 km. Quelle est sa période à la surface de Phobos?

n°5 (2 pt)	 Un patineur voit sa vitesse de rotation multipliée par deux quand il ramène ses bras sur son corps. On assimilera le patineur à un cylindre homogène vertical et on considérera que chaque bras correspond à une masse de 2 kg située initialement à quatre fois le rayon du cylindre du corps et que cette distance est divisée par deux quand les bras sont ramenés sur le corps. Quelle est la masse du patineur?
n°6 (3 pt)	 Considérons une bille de masse M et de rayon R qui peut rouler sans glisser sur un plan incliné faisant un angle de 30° avec l'horizontale. On lâche cette bille sans vitesse initiale et elle parcourt une distance de 1 m avant d'arriver sur une surface horizontale. Quelle est alors sa vitesse? Elle continue sur cette surface où elle glisse sans frottement avant d'entrer en collision frontale élastique avec une bille identique initialement au repos. Quelle est la vitesse finale de la deuxième bille? Que se passerait-il si la deuxième bille avait le même rayon mais une masse deux fois plus petite?
n°7 (2 pt)	Considérons un cône de révolution de demi-angle au sommet α en rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de son axe, le cône étant placé verticalement sur sa pointe. Un mobile qui glisse sans frottement sur la surface du cône est placé sans vitesse initiale à une distance r de l'axe. Que se passe-t-il ? Discuter les diverses situations possibles. 

<table>
<tr>
<td>n°8

(3 pt)</td>
<td>Un cylindre horizontal et homogène, de masse M et de rayon R, roule sans glisser sur un plan incliné qui fait un angle θ avec le plan horizontal. Ce cylindre est retenu par une ficelle qui passe dans une gorge de rayon r dans le cylindre. Cette ficelle est reliée par l'intermédiaire d'une poulie à une masse m qui se déplace verticalement. Quelle est l'expression de l'accélération du cylindre? On supposera que la ficelle n'est pas extensible et qu'elle ne glisse pas sur la poulie qu'on assimilera à un cylindre homogène de masse M_p et de rayon R_p. Ecrire la condition de roulement sans glissement pour le cylindre sur le plan incliné.

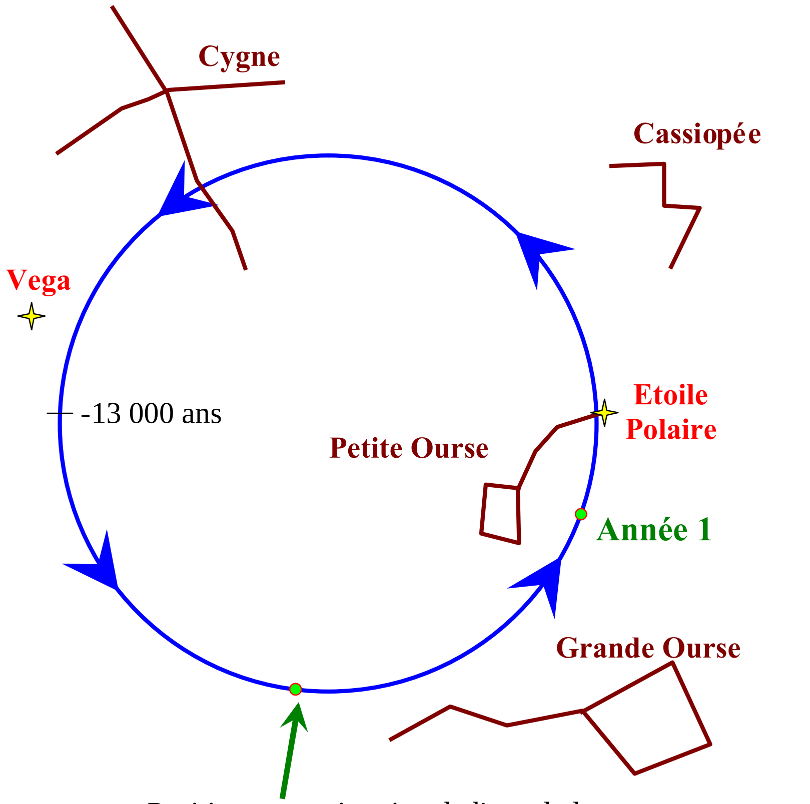

</td>
</tr>
</table>

Corrigé

n°1 :

1) Voir cours chapitre 5 et réponses aux questions du 11 février et 10 mars 2008.

2) Le cercle est décrit dans le sens trigonométrique (direct). Son ouverture angulaire est égale à deux fois l'angle entre l'axe de rotation de la Terre et la normale au plan de l'écliptique (23°27') soit 46°54'. La position approximative de l'axe de rotation de la Terre en 5000 avant JC est indiquée sur le schéma.



n°2 :

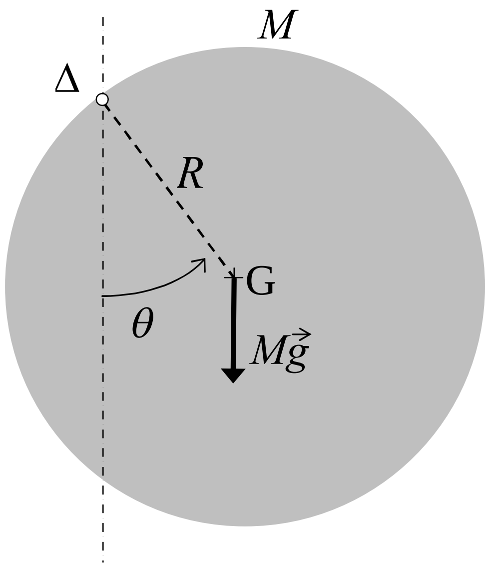
Soit I_Δ le moment d'inertie du disque par rapport à un axe horizontal perpendiculaire à son plan et passant par un point du bord. D'après la règle de Steiner-Huygens, I_Δ est lié au moment d'inertie I_G par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du disque et passant par son centre d'inertie G:

$$I_\Delta = I_G + MR^2 \qquad (1)$$

où M est la masse du disque et R son rayon.

On sait que $I_G = MR^2/2$, on a donc:

$$I_\Delta = \frac{3}{2}MR^2 = 1.5 \times 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3.75 \quad \text{kg·m}^{-2}\,. \qquad (2)$$



On sait (chapitre 4, section 4.4.2) que la période T des petites oscillations du pendule physique est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}\,, \tag{3}$$

où g est l'accélération de la gravité, d la distance entre son centre d'inertie et l'axe de rotation et I_Δ le moment d'inertie du pendule par rapport à cet axe. On a donc ici:

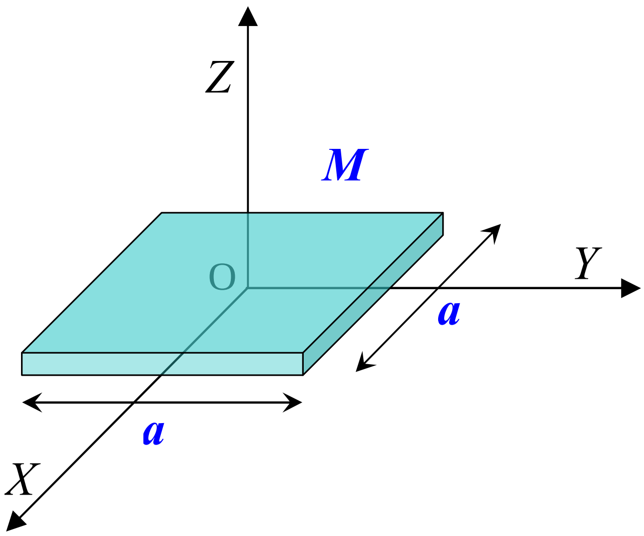
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{3MR^2}{2MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{40}} = \pi\sqrt{\frac{3}{10}}\,. \tag{4}$$

La fréquence f des petites oscillations du disque est donc :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{10}{3}} \cong \underline{581\ \text{mHz}}. \tag{5}$$

n°3 :

1) Considérons le repère central OXYZ lié à la plaque, OZ étant l'axe perpendiculaire à son plan, et les axes OX et OY parallèles à ses côtés.



Les moments d'inertie par rapport aux plans $I_{\Pi XY}$, $I_{\Pi YZ}$ et $I_{\Pi XZ}$ sont aisés à trouver. Il s'agit du moment par rapport à son plan médian d'un objet invariant par translation. On a donc:

$$I_{\Pi XZ} = I_{\Pi YZ} = \frac{1}{12}Ma^2 \quad \text{et} \quad I_{\Pi XY} = 0\,, \tag{1}$$

l'épaisseur de la plaque fine étant négligeable. On en déduit les moments d'inertie par rapport aux axes OX, OY et OZ:

$$I_{ZZ} = I_{\Pi XZ} + I_{\Pi YZ} = \frac{Ma^2}{6} \quad \text{et} \quad I_{XX} = I_{\Pi XZ} + I_{\Pi XY} = \frac{Ma^2}{12} = I_{YY}\,. \tag{2}$$

Par symétrie, les produits d'inertie sont tous nuls. La matrice d'inertie centrale s'écrit donc:

$$\boxed{\bar{I}_O = \frac{Ma^2}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}\,. \tag{3}$$

2) Comme pour l'exercice n°2, la période T des petites oscillations du pendule physique est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}\,. \tag{4}$$

Le moment d'inertie I_Δ par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de la plaque passant par un coin se trouve en utilisant le résultat de 1) et la règle de Steiner-Huygens:

$$I_\Delta = I_{ZZ} + Md^2 = \frac{1}{6}Ma^2 + M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{3}Ma^2\,. \tag{5}$$

On a alors:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}Ma^2}{Mg\frac{a}{\sqrt{2}}}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}a}{3g}}}\,. \tag{6}$$

Quand on ajoute la masse m, le moment d'inertie devient I'_Δ, la masse total M', la distance au centre d'inertie d' et la période T', donnée par:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{M'gd'}}\,. \tag{7}$$

Pour trouver I'_Δ, il suffit d'ajouter la contribution de m à I_Δ :

$$I'_\Delta = \frac{2}{3}Ma^2 + m\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2}{3}Ma^2 + 2ma^2 = \frac{2}{3}(M + 3m)a^2 = I_\Delta\left(1 + 3\frac{m}{M}\right)\,. \tag{8}$$

D'autre part, on a :

$$M'd' = M\frac{a}{\sqrt{2}} + m\sqrt{2}a = \frac{a}{\sqrt{2}}(M + 2m) = dM\left(1 + 2\frac{m}{M}\right)\,. \tag{9}$$

Le rapport des périodes au carré, qui vaut 4/3 d'après l'énoncé, s'écrit:

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{4}{3} = \frac{I'_\Delta}{I_\Delta}\frac{Mgd}{M'gd'} = \frac{M + 3m}{M + 2m}\,, \tag{10}$$

soit:

$$4(M + 2m) = 3(M + 3m)\,, \tag{11}$$

d'où:

$$\boxed{m = M}\,. \tag{12}$$

n°4 :

1) Voir détails dans les corrigés des exercices. On peut se place par exemple dans un repère (non galiléen) lié à l'objet en rotation autour de l'astre et, dans ce repère, à l'équilibre, la force d'attraction gravitationnelle compense la force d'inertie centrifuge, ce qui s'écrit:

$$G\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\,, \tag{1}$$

où M est la masse de l'astre attracteur, m celle de l'objet, R le rayon de l'orbite circulaire, ω la vitesse angulaire de rotation et T la période.

On a donc (Troisième Loi de Kepler):

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}\,. \tag{2}$$

2) On peut calculer la masse de Mars en utilisant (2) et les données de Phobos:

$$M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6.67\times10^{-11}}\frac{\left(9378\times10^3\right)^3}{\left(27540\right)^2} = 6.44\times10^{23}\text{ kg.} \tag{3}$$

Avec les données de Déimos:

$$M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6.67\times10^{-11}}\frac{\left(23459\times10^3\right)^3}{\left(109123\right)^2} = 6.42\times10^{23}\text{ kg.} \tag{4}$$

Les deux valeurs sont proches, ce qui indique que les deux satellites de Mars suivent approximativement la Troisième Loi de Kepler. La valeur de la masse de Mars est, en moyennant ces deux valeurs, 6.42×10^{23} kg, soit environ un dixième de la masse de la Terre ($\sim6\times10^{24}$ kg) et environ dix fois la masse de la Lune (7.4×10^{22} kg ou 1/81 fois la masse de la Terre).

3) Le moment cinétique σ d'un objet de masse m en rotation uniforme sur une orbite de rayon R et de vitesse V est:

$$\sigma = R\times mV = mR\times\frac{2\pi R}{T} = 2\pi m\frac{R^2}{T}\,, \tag{5}$$

soit, pour Phobos:

$$\sigma_{Phobos} = 2\pi\times1.1\times10^{16}\times\frac{\left(9378\times10^3\right)^2}{27540} = \boxed{2.2\times10^{26}\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}}. \tag{6}$$

et pour Déimos:

$$\sigma_{Deimos} = 2\pi\times0.2\times10^{16}\times\frac{\left(23459\times10^3\right)^2}{109123} = \boxed{6.3\times10^{25}\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}}. \tag{7}$$

4) Soient a=14 km, b=11.5 km et c=10 km, les demi-grands axes de l'ellipsoïde auquel on assimile Phobos. La matrice d'inertie principale s'écrit:

$$\bar{I}_{Phobos} = \frac{M}{5}\begin{bmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

soit:

$$\bar{I}_{Phobos} = \frac{1.1\times10^{16}}{5}\times10^6\begin{bmatrix} 11.5^2+10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 10^2+14^2 & 0 \\ 0 & 0 & 14^2+11.5^2 \end{bmatrix} = \frac{1.1\times10^{22}}{5}\begin{bmatrix} 232 & 0 & 0 \\ 0 & 296 & 0 \\ 0 & 0 & 328 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

d'où:

$$\boxed{\bar{I}_{Phobos} = 5.1\times10^{21}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1.3 & 0\\ 0 & 0 & 1.4\end{bmatrix}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}}. \qquad (10)$$

5) Soit T la période de précession de Mars en années. On a:

$$\dot{\varphi} = 7576\times10^{-3}\times\frac{1}{3600}\times\frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{T}. \qquad (11)$$

où $\dot{\varphi}$ est la vitesse angulaire de précession en radians par an.

On a donc:

$$T = \frac{3600\times180\times2}{7576\times10^{-3}} \cong 171\,000 \text{ ans}. \qquad (12)$$

En exprimant la vitesse de précession $\dot{\varphi}$ en radians par seconde, on a:

$$\dot{\varphi} = 7576\times10^{-3}\times\frac{1}{3600}\times\frac{\pi}{180}\times\frac{1}{3.1\times10^{7}} = \frac{3}{2}\frac{6.67\times10^{-11}\times2\times10^{30}}{\left(1.524\times1.5\times10^{11}\right)^3}\alpha_I\frac{\cos(25.19°)}{\left(\frac{2\pi}{3600\times24.62}\right)}. \qquad (13)$$

On en déduit la valeur de l'aplatissement α_I:

$$\alpha_I = 7576\times10^{-3}\times\frac{1}{3600}\times\frac{\pi}{180}\times\frac{1}{3.1\times10^{7}}\times\frac{2}{3}\frac{\left(1.524\times1.5\times10^{11}\right)^3}{6.67\times10^{-11}\times2\times10^{30}}\frac{2\pi}{0.90\times3600\times24.62}, \qquad (14)$$

soit:

$$\boxed{\alpha_I \cong 6\times10^{-3}}. \qquad (14)$$

L'aplatissement de Mars est donc approximativement deux fois plus grand que celui de la Terre (1/306).

Le rapport de la contribution de Phobos à celle du Soleil sur la précession de Mars est donné par:

$$\frac{M_{Phobos}}{M_{Soleil}}\left(\frac{1.524AU}{9378km}\right)^3, \qquad (15)$$

soit:

$$\frac{1.1\times10^{16}}{2\times10^{30}}\left(\frac{1.524\times1.5\times10^{11}}{9378\times10^{3}}\right)^3 \cong 0.08. \qquad (16)$$

L'effet de Phobos est en première approximation négligeable sur la précession de Mars, contrairement à l'effet de la Lune sur la précession de la Terre qui est dominant.

6) La période du pendule est inversement proportionnelle à la racine de l'accélération de la gravité. L'accélération de la gravité à la surface de Mars g_{Mars} est:

$$g_{Mars} = 6.67\times10^{-11}\frac{6.4\times10^{23}}{\left(3375\times10^{3}\right)^2} \cong 3.7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}, \qquad (16)$$

et à la surface de Phobos:

$$g_{Phobos} = 6.67\times10^{-11}\frac{1.1\times10^{16}}{\left(12\times10^{3}\right)^2} \cong 5\times10^{-3}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}, \qquad (17)$$

La période du pendule à la surface de Mars est donc:

$$T_{Mars} = 1s\sqrt{\frac{10}{3.7}} \cong \boxed{1.6\ \mathrm{s}}, \qquad (18)$$

et à la surface de Phobos:

$$T_{Phobos} = 1s\sqrt{\frac{10}{5\times10^{-3}}} \cong \boxed{45\text{ s}}. \qquad (19)$$

n°5 :

Notons I_1 et I_2 les moments d'inertie du patineur par rapport à son axe vertical, avant et après, respectivement, avoir ramené les bras sur le corps, et de même ω_1 et ω_2 les vitesses angulaires de rotation. Comme il n'y pas de force extérieure, le moment cinétique du patineur est conservé pendant le mouvement. On a donc:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2\,, \qquad (1)$$

soit

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2\,. \qquad (2)$$

Soit M la masse du patineur (sans les bras) et m la masse de chaque bras (m=2 kg). On assimile le patineur à un cylindre de rayon R et chaque bras à une masse ponctuelle m située à une distance d. Au début, on a $d=4R$ et, à la fin, $d=2R$. On a donc:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2}MR^2 + 2m(4R)^2 \\ I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + 2m(2R)^2 \end{cases} \qquad (3)$$

d'où:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + 32mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + 8mR^2} = \frac{M+64m}{M+16m} = 2\,. \qquad (4)$$

soit:

$$M = 32m\,. \qquad (5)$$

La masse du patineur (corps avec les deux bras, soit $M+2m$!) est donc de <u>68 kg</u>.

n°6 :

Une sphère homogène qui roule sans glisser sur un plan incliné d'angle θ avec l'horizontale effectue un mouvement uniformément accéléré d'accélération a:

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta = \frac{5}{7}\times10\times\frac{1}{2} = \frac{25}{7}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}. \qquad (1)$$

où g est l'accélération de la pesanteur. La vitesse V acquise après une distance d=1 m est donnée par:

$$V^2 = 2ad = 2\times\frac{25}{7}\times1 = \frac{50}{7}\quad \text{soit}\quad \boxed{V = \sqrt{\frac{50}{7}} \cong 2.7\text{ m/s}}. \qquad (2)$$

Soit V_1 et V_2 les vitesses après le choc de la première bille (celle qui descend du plan incliné) et de la deuxième bille (celle initialement au repos), respectivement. Comme le choc est élastique, on a conservation de l'énergie cinétique totale. Comme les billes ont la même masse, la conservation de la quantité de mouvement totale et de l'énergie cinétique totale s'écrivent:

$$\begin{cases} V = V_1 + V_2 \\ \frac{1}{2}V^2 = \frac{1}{2}V_1^2 + \frac{1}{2}V_2^2 \end{cases}, \qquad (3)$$

d'où:

$$(V_1+V_2)^2 = V_1^2+V_2^2\,, \tag{4}$$

ce qui implique que le produit V_1V_2 est nul, et donc que soit $V_1=0$, soit $V_2=0$. La seule solution acceptable physiquement est V_1=0. On a alors $V_2=V$.

Si la masse de la deuxième bille est deux fois plus petite, alors:

$$\begin{cases} V = V_1 + \frac{1}{2}V_2 \\ \frac{1}{2}V^2 = \frac{1}{2}V_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}V_2^2 \end{cases}, \tag{5}$$

d'où:

$$\left(V_1+\frac{1}{2}V_2\right)^2 = V_1^2+\frac{1}{2}V_2^2\,, \tag{6}$$

soit:

$$\left(V-\frac{1}{2}V_2\right)V_2 = \frac{1}{4}V_2^2\,, \tag{7}$$

ce qui donne, $V_2=0$ n'étant pas physiquement acceptable,

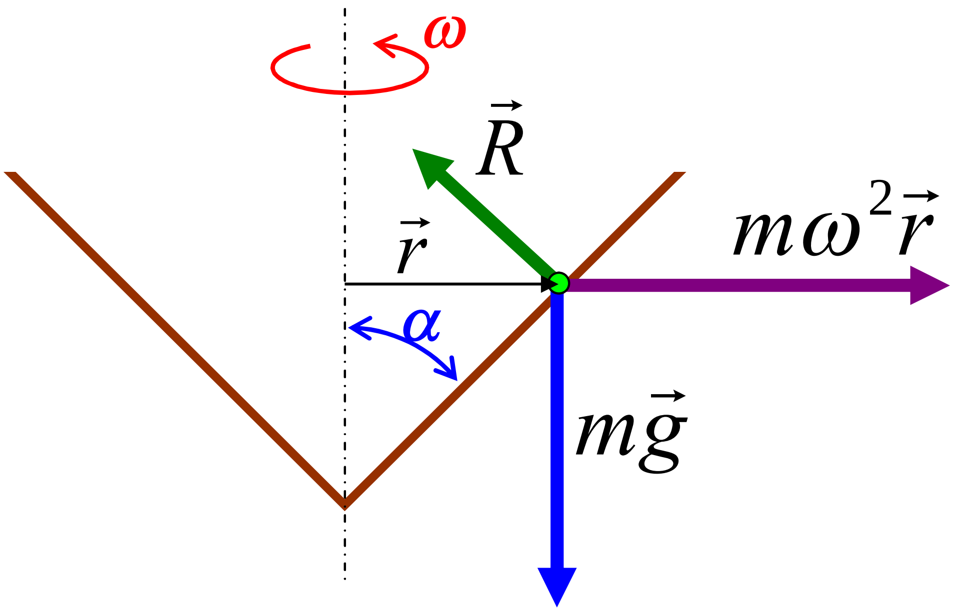
$$V-\frac{1}{2}V_2 = \frac{1}{4}V_2\,, \tag{8}$$

et on obtient:

$$\boxed{V_2 = \frac{4}{3}V \cong 3.6 \text{ m/s}} \text{ et } \boxed{V_1 = \frac{1}{3}V \cong 0.9 \text{ m/s}}. \tag{9}$$

<u>Remarque:</u> Au lieu de la conservation de l'énergie cinétique totale, on peut aussi écrire que la composante horizontale (normale au plan tangent au point de choc) s'inverse au cours du mouvement, soit: $V_1-V_2=-V$. Mais $V=V_1+1/2V_2$. On obtient ainsi directement $V-3/2V_2=-V$ soit $V_2=4/3V$.

<u>n°7 :</u>



Considérons la situation au début du mouvement, quand la vitesse du mobile est encore nulle. Le mobile de masse m est soumis à la réaction du cône, à son poids et à la force d'inertie centrifuge.

Projetons ces trois forces sur le cône, le long d'une génératrice Ox orientée vers l'extérieur. La projection du poids est:

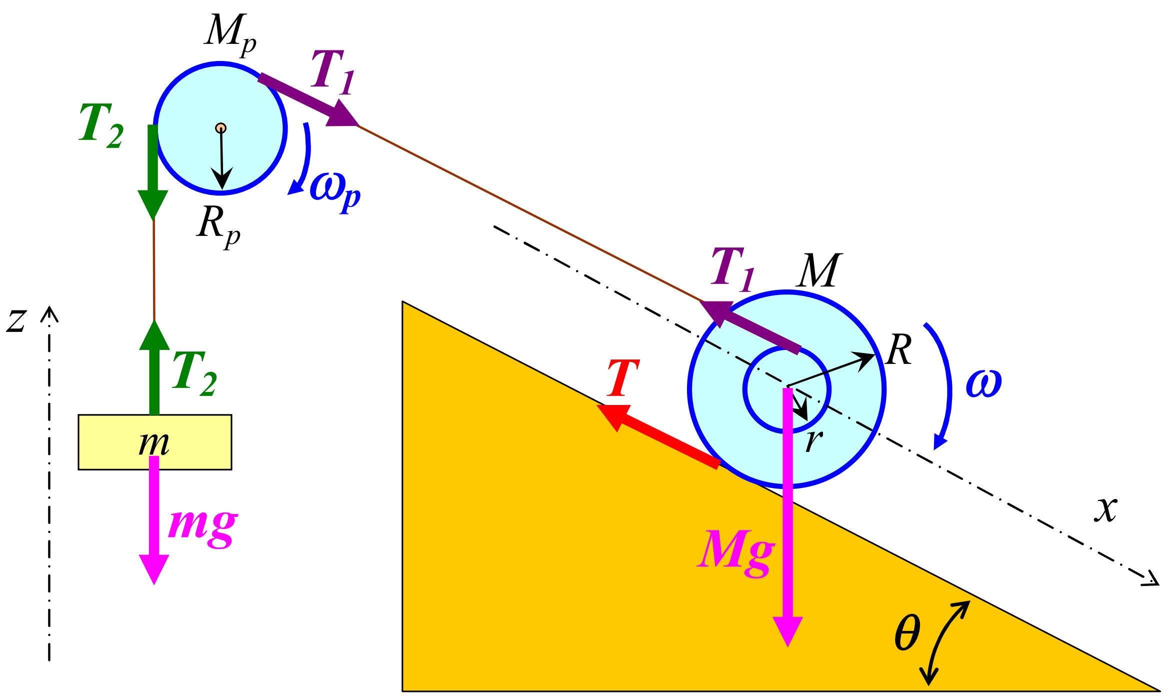
$$-mg\cos\alpha \ . \qquad (1)$$

La projection de la force d'inertie centrifuge est:

$$m\omega^2 r\sin\alpha \ . \qquad (2)$$

Il existe donc un rayon critique $r_0 = g\cot\alpha/\omega^2$ tel que la somme de ces deux projections s'annule. Le mobile reste alors immobile! Si le rayon initial est plus grand que r_0, alors le mobile est éjecté. Si le rayon initial est plus petit que r_0, le mobile tombe au fond du cône.

n°8 :



Soit x la position du centre d'inertie du cylindre roulant sur le plan incliné, de moment d'inertie I par rapport à son axe de symétrie, et soit ω sa vitesse de rotation angulaire, comptée positivement quand le cylindre roule vers le bas. Notons ω_p la vitesse de rotation angulaire de la poulie, comptée positivement quand la masse m monte, et z la position verticale de la masse m, comptée positivement vers le haut. Soit I_p le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe de rotation. La condition de roulement sans glissement du cylindre s'écrit:

$$\dot{x} = \omega R \ . \qquad (1)$$

Si la ficelle frotte sans glisser sur la poulie et sur la gorge du cylindre, alors, on a:

$$\dot{z} = \omega_p R_p = \dot{x} + \omega r = \left(1 + \frac{r}{R}\right)\dot{x} \ . \qquad (2)$$

Soit N et T les modules des composantes normales et tangentielles, respectivement, de la réaction du plan incliné sur le cylindre. Soit T_1 le module de la tension de la ficelle entre la poulie et le cylindre, et T_2 entre la poulie et la masse m (cf figure ci-dessus).

Le théorème de la quantité de mouvement appliqué au cylindre fournit:

$$\begin{cases} 0 = N - Mg\cos\theta \\ M\ddot{x} = Mg\sin\theta - T - T_1 \end{cases} \qquad (3)$$

et appliqué à la masse m:

$$m\ddot{z} = T_2 - mg \ . \tag{4}$$

D'autre part, le théorème du moment cinétique appliqué au cylindre et à la poulie:

$$\begin{cases} I\dot{\omega} = RT - rT_1 \\ I_p\dot{\omega}_p = R_pT_1 - R_pT_2 \end{cases} . \tag{5}$$

La deuxième équation s'écrit, en utilisant (2):

$$\frac{I_p}{R_p{}^2}\ddot{z} = T_1 - T_2 \ , \tag{6}$$

puis, en utilisant (4):

$$\left(m + \frac{I_p}{R_p{}^2}\right)\ddot{z} = \left(m + \frac{I_p}{R_p{}^2}\right)\left(1 + \frac{r}{R}\right)\ddot{x} = T_1 - mg \ . \tag{7}$$

On peut par ailleurs éliminer T entre la deuxième équation de (3) et la première équation de (5). On obtient:

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{x} = Mg\sin\theta - \left(1 + \frac{r}{R}\right)T_1 \ . \tag{8}$$

Pour trouver l'accélération, éliminons T_1 entre (7) et (8). Il vient:

$$\left[M + \frac{I}{R^2} + \left(m + \frac{I_p}{R_p{}^2}\right)\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2\right]\ddot{x} = Mg\sin\theta - mg\left(1 + \frac{r}{R}\right) . \tag{9}$$

soit:

$$\boxed{\ddot{x} = g\frac{M\sin\theta - m\left(1 + \frac{r}{R}\right)}{M + \frac{I}{R^2} + \left(m + \frac{I_p}{R_p{}^2}\right)\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2}} . \tag{10}$$

La condition de roulement sans glissement est $T/N<f$, où f est le coefficient de frottement statique entre le cylindre et le plan incliné. Pour trouver T, utilisons la première équation de (5):

$$T = \frac{I}{R^2}\ddot{x} + \frac{r}{R}T_1 \ . \tag{11}$$

Or, on peut obtenir T_1 de la relation (7):

$$T_1 = mg + \left(m + \frac{I_p}{R_p{}^2}\right)\left(1 + \frac{r}{R}\right)\ddot{x} \ . \tag{12}$$

On a donc:

$$T = \frac{r}{R}mg + \left[\frac{I}{R^2} + \frac{r}{R}\left(m + \frac{I_p}{R_p{}^2}\right)\left(1 + \frac{r}{R}\right)\right]\ddot{x} \ , \tag{13}$$

soit:

$$T = g\left[m\frac{r}{R} + \frac{M\sin\theta - m\left(1 + \frac{r}{R}\right)}{M + \frac{I}{R^2} + \left(m + \frac{I_p}{R_p{}^2}\right)\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2}\left[\frac{I}{R^2} + \frac{r}{R}\left(m + \frac{I_p}{R_p{}^2}\right)\left(1 + \frac{r}{R}\right)\right]\right] . \tag{14}$$

La condition de roulement sans glissement s'écrit donc:

$$\boxed{\frac{1}{\cos\theta}\left[\frac{m}{M}\frac{r}{R}+\frac{\sin\theta-\frac{m}{M}\left(1+\frac{r}{R}\right)}{M+\frac{I}{R^2}+\left(m+\frac{I_p}{R_p{}^2}\right)\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}\left[\frac{I}{R^2}+\frac{r}{R}\left(m+\frac{I_p}{R_p{}^2}\right)\left(1+\frac{r}{R}\right)\right]\right]\leq f}. \qquad (15)$$

Si la poulie et le cylindre sont homogènes, alors on a $I=1/2MR^2$ et $I_p=1/2M_pR_p{}^2$. Les résultats s'écrivent alors:

$$\boxed{\ddot{x}=g\frac{\sin\theta-\frac{m}{M}\left(1+\frac{r}{R}\right)}{\frac{3}{2}+\frac{m+\frac{M_p}{2}}{M}\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}} \qquad (16)$$

et:

$$\boxed{\frac{1}{\cos\theta}\left[\frac{m}{M}\frac{r}{R}+\frac{\sin\theta-\frac{m}{M}\left(1+\frac{r}{R}\right)}{\frac{3}{2}+\frac{m+\frac{M_p}{2}}{M}\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{r}{R}\frac{m+\frac{M_p}{2}}{M}\left(1+\frac{r}{R}\right)\right]\right]\leq f}. \qquad (17)$$