Rappels d'analyse

O. de Viron

2006-2007

Table des matières

Avertissement

Ces quelques pages ont été écrites en guise de rappel des notions fondamentales d'analyse, telles la notion de *limite*, celle de *dérivée*, et celle d'*intégrale*. Elles ne sont nullement supposées remplacer un cours d'analyse. J'ai opté sciemment pour la simplicité, parfois au détriment de la rigueur. J'ose espérer n'être pas voué aux gémonies par les lecteurs mathématiciens. A ma connaissance, toutefois, il n'y a pas d'erreur dans ce texte, tout au plus de grosses simplifications. Par exemple, la définition de l'intégrale, si elle se rapproche de celle de l'intégrale au sens de Riemann, fait l'impasse sur nombre de subtilités fascinantes. Je me permettrai de renvoyer le lecteur intéressé ou insatisfait à l'un des très nombreux livres d'analyse qui ne manqueront pas de le divertir.

Chapitre 1

Les limites

1.1 Définitions et conséquences

Définition 1.1.1. Le *domaine* de définition de $f(x)$ est le sous-ensemble des réels ou, plus généralement, de l'ensemble des valeurs possibles pour x, telles que $f(x)$ est définie.

Je rappelle simplement quelques cas pathologiques :

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas définie en zéro.
2. $f(x) = \sqrt{x}$ n'est définie que pour les valeurs positives.
3. $f(x) = \sqrt[n]{x}$ n'est définie que pour les valeurs positives si n est pair.
4. $f(x) = \tan(x)$ n'est pas définie pour $x = k\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
5. $f(x) = \cot(x)$ n'est pas définie pour $x = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.
6. $f(x) = \log(x)$ n'est définie que pour les valeurs strictement positives.
7. $f(x) = \arcsin(x)$ n'est définie que sur [-1,1].
8. $f(x) = \arccos(x)$ n'est définie que sur [-1,1].

En outre, le domaine de définition n'inclut jamais les infinis.

L'idée du calcul de limite est de chercher ce qu'il advient de la fonction lorsque l'on se rapproche d'un cas pathologique. Par conséquent, (1) on ne cherche à calculer les limites que dans le voisinage du domaine de définition, (2) on ne peut les calculer que si x peut s'approcher aussi près que l'on veut de la valeur où l'on cherche la limite. Puisque x ne peut s'approcher de -1 par aucune voie, on ne peut donner aucun sens à la limite de $\sqrt{x}$ pour x tendant vers -1. Par contre, on peut chercher la limite de $\frac{\cos x - 1}{\sin x}$, pour x tendant vers zéro.

Définition 1.1.2. La limite de $f(x)$ pour x tendant vers a, notée $\lim_{x\to a} f(x)$, se définit de la façon suivante :

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \epsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists \delta > 0) : (\forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon.$$

Outre le plaisir esthétique évident que peut procurer le fait d'aligner ces symboles cabalistiques variés, et l'impression irrépressible que ce qui s'écrit aussi joliment ne peut qu'être malin, cette définition possède un sens précis. Décodons ensemble ce que cela veut dire. Avant tout, notons que cela se lit *dire que la limite de la fonction f pour x tendant vers a est égale à b équivaut à dire que, pour tout ϵ positif, on peut trouver un δ positif, tel que si x est δ-proche de a, f est ϵ-proche de b.*

On cherche à savoir ce que vaut la fonction f quand x est proche de a. Cependant, si on cherche à connaître la valeur de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, pour x proche de 1, c'est déjà plus utile. En effet, la fonction n'est pas définie en $x = 1$. Cependant, on peut se demander ce qu'il advient des valeurs de cette fonction quand x se rapproche aussi près que possible de 1. Le graphe de la fonction est représenté sur la Figure 1.1 On voit que la fonction présente un trou pour $x = 1$. Cependant, en regardant le graphe, on a l'impression que si on se rapproche, même très près, de 1, la fonction est de

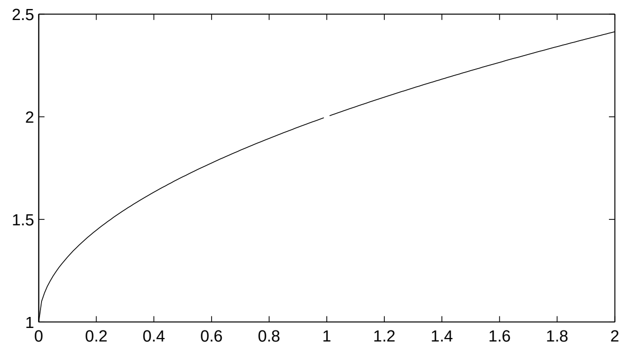

FIG. 1.1 – $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

plus en plus proche de 2. Par conséquent, si je m'impose une tolérance, aussi petite soit elle, je peux toujours être plus proche de 2 que cette tolérance, il suffit pour cela que je calcule suffisamment proche de 1. Prenons par exemple une tolérance de 0.001 (qui correspond à ϵ, dans la définition ci-dessus). Cherchons le δ correspondant. Sur la Figure 1.2, nous avons représenté $|f(x) - 2|$, avec une échelle log

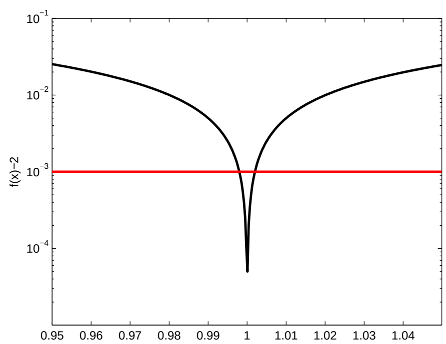

FIG. 1.2 – $f(x) - 2$

en y. On voit que, si on se rapproche suffisamment de 1, on peut être aussi près que l'on veut de 2 pour $f(x)$. Dans les équations qui suivent, je calcule δ dans le cas $x > 1$, le cas $x < 1$ est tout à fait similaire, avec deux changements de direction de l'inégalité, lorsque l'on divise par $\sqrt{x} - 1$. Si $x > 1$, $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} > 2$, ce qui permet de nous affranchir de la valeur absolue.

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - 2 &< \epsilon \\
(x-1) - 2(\sqrt{x}-1) &< \epsilon(\sqrt{x}-1) \\
x - 2\sqrt{x} + 1 &< \epsilon(\sqrt{x}-1) \\
(\sqrt{x}-1)^2 &< \epsilon(\sqrt{x}-1) \\
\sqrt{x} - 1 &< \epsilon \\
\sqrt{x} &< \epsilon + 1 \\
x &< \epsilon^2 + 2\epsilon + 1 \\
x - 1 &< \epsilon(\epsilon+2) \simeq 2\epsilon
\end{aligned}$$

Donc, si on se donne un ϵ, aussi petit qu'il soit, on peut toujours trouver un δ qui sera suffisamment petit pour que, si x est δ-proche de 1, $f(x)$ soit ϵ-proche de 2. En particulier, tout δ inférieur 2ϵ conviendra. Donc, dans l'exemple, ϵ=0.001 impose $\delta = 0.002$. En effet, $f(0.998) = 1.999$ et $f(1.002) = 2.001$.

Définition 1.1.3. La limite de $f(x)$ pour x tendant vers l'infini, ce qui se note $\lim_{x\to\infty} f(x)$, se définit de la façon suivante :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall\epsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists\delta > 0) : (\forall x \in \mathbb{R} : x > \delta), |f(x) - b| < \epsilon.$$

La même chose s'écrit presqu'identiquement pour x tendant vers $-\infty$.

Exemple 1.1. Prenons l'exemple de la fonction $\frac{x^2}{2x^2-1}$ qui tend vers $\frac{1}{2}$ en l'infini. Notons que, ici encore, la valeur absolue n'est pas nécessaire, puisque $\frac{x^2}{2x^2-1}$ est toujours plus grand que $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{2x^2-1} - \frac{1}{2} &< \epsilon && (1.1)\\
\frac{2x^2-2x^2+1}{4x^2-2} &< \epsilon && (1.2)\\
\frac{1}{4x^2-2} &< \epsilon && (1.3)\\
\frac{1}{\epsilon} &< 4x^2-2 && (1.4)\\
x &> \sqrt{\frac{1}{4\epsilon}+\frac{1}{2}} && (1.5)
\end{aligned}$$

Donc, si on choisit $\delta = \sqrt{\frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2}}$, quelle que soit la valeur de ϵ, on vérifie la définition. Prenons par exemple $\epsilon = 0.001$, ce qui correspond donc à $\delta = 15.7956$. Pour $x = \delta$, la valeur de $f(x)$ est 0.501, ce qui vérifie bien la définition.

1.1.1 Techniques de calcul

Fraction polynomiale

Pour x tendant vers a Si on cherche la limite pour x tendant vers a d'un quotient de deux polynômes, avec a, racine du dénominateur (pôle de la fraction), deux cas peuvent se présenter : (1) a n'est pas racine du numérateur, auquel cas la limite est $\pm\infty$, ou (2) a est également racine du numérateur, alors, on se contente de simplifier en haut et en bas par $x-a$, et on a la limite directement. L'exemple ci-dessus était une simple variation sur ce cas. Si les polynômes contiennent des différences de racines carrées ou cubiques, pensez à multiplier par les quantités conjuguées.

Pour x tendant vers l'infini Lorsque x tend vers l'infini, seuls importent les plus hauts degrés du numérateur n_n et du dénominateur n_d. Donc, on ne se préoccupe pas de tous les autres. Alors, trios cas peuvent se présenter :

1. $n_d > n_n$: dans ce cas, la fonction tend vers zéro.
2. $n_n > n_d$: dès lors, la fonction tend vers l'infini, et l'on détermine le signe à partir des signes des coefficients des plus hautes puissances du numérateur et du dénominateur.
3. $n_n = n_d$: la fonction tend alors vers un nombre réel non-nul, qui est obtenu par le rapport des coefficients des plus hautes puissances du numérateur et du dénominateur.

Exemple 1.2. Prenons la fonction $f(x) = \frac{4x^2-x+1}{2x^2-1}$. La règle ci-dessus permet de calculer immédiatement la limite pour x tendant vers $+\infty$: la plus haute puissance de x du numérateur est 2, et de même que celle du dénominateur. Les coefficients de x^2 valent 4 et 2 pour le numérateur et le dénominateur, respectivement. La limite est donc $\frac{4}{2} = 2$, et ce indépendamment des coefficients des autres puissances de x. Ici, il faut faire attention. En effet, si on y regarde de plus près, on voit que, dès que $x > 3$, la fonction est inférieure à 2. Comme x tend vers $+\infty$, la fonction sera toujours plus petite que 2, donc la valeur absolue impose de changer de signe dans l'inéquation de la définition. Même pas peur, repartons gaillardement de la définition. On veut

$$\begin{aligned}
2 - \frac{4x^2 - x + 1}{2x^2 - 1} &< \epsilon \\
\frac{\cancel{4}x^2 - 2 - \cancel{4}x^2 + x - 1}{2x^2 - 1} &< \epsilon \\
x - 3 &< \epsilon(2x^2 - 1)
\end{aligned}$$

De là, on peut tirer une équation du second degré en x, et résoudre... On obtient un truc compliqué et pas beau. D'un autre côté, si on reprend la définition, on voit qu'il suffit de trouver un (et un seul) δ pour vérifier la définition. Nul besoin d'exhiber le plus petit δ acceptable. Donc, on peut travailler à la tronçonneuse et simplifier l'expression ci-dessus. Par exemple, si le membre de droite est plus grand que x, il sera automatiquement plus grand que $x-3$, donc on peut remplacer l'un par l'autre sans inquiétude. Par contre, si on remplace $2x^2 - 1$ par $2x^2$, il faut être prudent. Cependant, pour de grande valeur de x, on se rend bien compte que le -1 ne sera pas influant très longtemps. Donc, on va essayer de travailler avec l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
x - 3 &< \epsilon(2x^2 - 1) \\
x &< \epsilon(2x^2) \\
x &> \frac{1}{2\epsilon}
\end{aligned}$$

Voyons si cela a l'air raisonnable. Si on prend $\epsilon = 0.001$, on trouve $x = 500$ et $f(x) - 2 = -9.994\ 10^{-4}$, ce qui vérifie la définition.

Quotient de fonctions

Parfois, la fraction comprend des fonctions qui ont une fâcheuse tendance à annuler le numérateur et le dénominateur pour la même valeur. Par exemple $f(x) = \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)}$, en $\pi/2$. Dans ce cas, la méthode la plus simple, dans le sens qu'elle fonctionne presque toujours, est la règle de Lhospital (1696), qui dit que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x}}{\frac{\partial g(x)}{\partial x}} = b.$$

Notons que ce résultat n'est vrai que si la limite donne zéro sur zéro ou l'infini sur l'infini. Dans l'exemple ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Fonctions avec des exposants non-entiers

Si vous avez une fonction avec un exposant non-entier, en général, on calcule la limite par celle de la limite de l'exponentielle du logarithme népérien du résultat. C'est pratique, parce que la limite d'une exponentielle, c'est l'exponentielle de la limite (car la fonction e^x est continue sur $\mathbb{R}$). Par exemple,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}(1-3t)^{\frac{-2}{t}} &= e^{\lim_{t\to 0}\ln\left((1-3t)^{\frac{-2}{t}}\right)} \\
&= e^{\lim_{t\to 0}\frac{-2}{t}\ln(1-3t)} \\
&= e^{-2\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-3t)}{t}} \\
&= e^{-2\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-3}{1-3t}}{1}} \\
&= e^{6\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-3t}} \\
&= e^{6}
\end{aligned}$$

Mais encore...

Notons que les limites ont toutes les propriétés que l'on peut espérer d'une opération de bon aloi : la limite d'une somme de termes est la somme des limites de chacun des termes (lorsqu'elles existent), la limite d'un produit est le produit des limites (lorsqu'elles existent), l'élévation à une puissance est aussi possible sans prise de tête. Dans la plupart des cas, on ne peut pas inverser deux opérations de passages à la limite. En général, il est prudent de se méfier du calcul des limites pour les fonctions de deux variables.

1.2 Exercices

Montrer que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x} &= 1 \\
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} &= -1 \\
\lim_{x\to 0} x^x &= 1 \\
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} &= \frac{3}{2} \\
\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} &= 3 \\
\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\sin x}{x^2} &= 0 \\
\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x} &= -1 \\
\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Chapitre 2

La dérivation

2.1 Définition

Supposons que j'observe un objet au cours du temps, et que je note à chaque instant sa position. La Figure 2.1 représente l'évolution temporelle d'un tel mobile. Si on cherche à caractériser le mouvement,

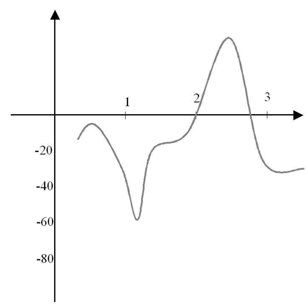

FIG. 2.1 – Position d'un mobile au cours du temps.

on peut étudier comment la position varie. Prenons comme repère les points $t = 1s$ et $t = 3s$. On note que $x(t = 1s) = -36m$, et que $x(t = 3s) = -32m$. On obtient donc la variation de la position entre les deux instants $x(t = 3) - x(t = 1) = 4m$. Pour trouver le taux de variation de la position au cours du temps, on prend donc le rapport entre la variation de la position Δx et le temps écoulé Δt, comme illustré sur la Figure 2.2. On peut alors calculer un taux de variation, qui représente le changement de

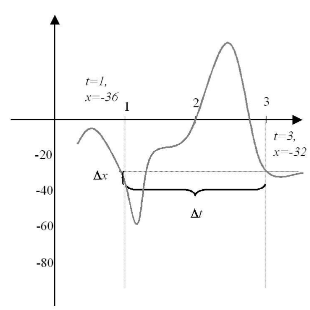

FIG. 2.2 – Position d'un mobile au cours du temps.

position du mobile divisé par le temps mis à réaliser ce changement de position :

$$\frac{x(t = 3) - x(t = 1)}{3 - 1} = 2m/s.$$

Un simple regard à la Figure 2.2 permet de se rendre compte que ce nombre ne décrit que fort inexactement le mouvement du mobile entre les deux instants. Ce taux de variation de la position au cours du temps représente beaucoup mieux celui d'un mobile imaginaire qui ferait, entre $t = 1s$ et $t = 3s$, le mouvement représenté sur la Figure 2.3. Pour se rapprocher du mouvement réel de l'objet, on peut

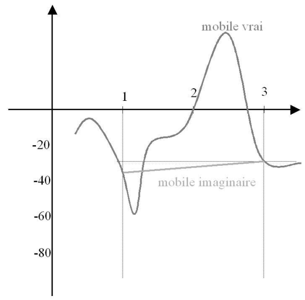

FIG. 2.3 – Position d'un mobile au cours du temps.

regarder sur un plus petit intervalle de temps. Si on le garde centré sur 2, on peut diviser le temps par 2, et regarder ce qu'il advient du mobile entre les temps $t = 1.5s$ et $t = 2.5s$, comme illustré sur la Figure 2.4. On note alors que, sur cet intervalle, l'objet passe de $x = -16$ à $x = 43$. Ce qui veut dire que le

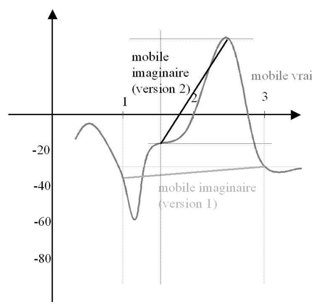

FIG. 2.4 – Position d'un mobile au cours du temps.

taux de variation de la position est donc

$$\frac{x(t = 2.5s) - x(t = 1.5s)}{2.5 - 1.5} = 59m/s.$$

On note sur la figure que le mouvement du mobile imaginaire qui parcourt la même distance en un même temps est beaucoup plus proche du mouvement réel, cette fois. On peut continuer à diviser l'intervalle de plus en plus, afin d'avoir les extrémités, toujours centrées sur 2, qui s'en rapprochent de plus en plus. Le résultat est montré sur la Figure 2.5. On note que, plus on se rapproche, plus le taux de variation que l'on peut estimer représente effectivement la variation de la position au point central. Donc, idéalement, il faudrait un intervalle de taille nulle. Bien entendu, on ne peut calculer ce que cela donnerait si l'intervalle était nul, puisque l'espace parcouru serait de longueur nulle. Mais on peut calculer ce qu'il adviendrait de ce nombre si on prenait des intervalles de plus en plus petits, *à la limite pour la longueur de l'intervalle tendant vers zéro*. Ce taux de variation instantané de la position de l'objet au cours du temps, que l'on appelle vitesse, est défini par

$$\lim_{h \to 0} \frac{x(2 + \frac{h}{2}) - x(2 - \frac{h}{2})}{h}$$

Ceci illustre la définition de la dérivée donnée ci-dessous :

Définition 2.1.1. La dérivée de la fonction f par rapport à x, notée $\frac{df(x)}{dx}$, $Df(x)$ ou $f'(x)$, est donnée par

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})}{h},$$

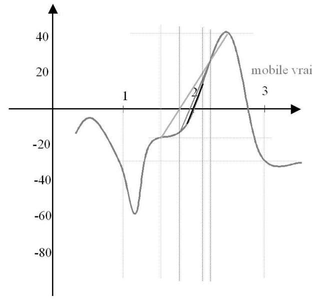

FIG. 2.5 – Position d'un mobile au cours du temps.

à condition que cette limite existe.

Notons encore, sur la Figure 2.5, que le trajet du mobile imaginaire se rapproche de plus en plus de la tangente à la courbe, au point central. Par conséquent, la dérivée donne également la pente de la courbe au point central.

2.2 Quelques exemples de calculs de dérivées

Avant de nous lancer tête baissée dans les calculs avec les formules classiques, nous allons en calculer l'une ou l'autre pédestrement :

$$\begin{aligned}
\frac{dx^2}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2hx}{h} + \frac{h^2}{h} = 2x \\
\frac{d(f(x)g(x))}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= g(x)\frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{dg(x)}{dx}
\end{aligned}$$

Plus drôle est la démonstration de la formule pour l'exponentielle, je vous la donne juste pour ceux que cela amuse. Il en est probablement de plus simple, mais moi, je n'ai trouvé que celle-ci :

$$\frac{de^x}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}.$$

Malheureusement, je n'ai pas trouvé de formule simple pour calculer cela. Par contre, si on se souvient que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{j!}x^j + \ldots$$

où $n!$ dénote la factorielle de n. On peut alors faire la différence entre les deux développements :

$$\begin{aligned}
e^{x+h}-e^x &= 1+(x+h)+\frac{1}{2!}(x+h)^2+\frac{1}{3!}(x+h)^3+...+\frac{1}{j!}(x+h)^j+...-1-x-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3-...-\frac{1}{j!}x^j-... \\
&= h+\frac{1}{2!}(2xh+h^2)+\frac{1}{3!}(3x^2h+3xh^2)+...+\frac{1}{j!}\left((x+h)^j-\frac{1}{j!}x^j\right)+...
\end{aligned}$$

La formule du binôme nous dit que

$$(x+h)^j=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k}h^k$$

On a donc

$$e^{x+h}-e^x=h+\frac{1}{2!}(2xh+h^2)+\frac{1}{3!}(3x^2h+3xh^2)+...+\frac{1}{j!}\left(x^j-x^j+\frac{j!}{(j-1)!}x^{j-1}h+\frac{j!}{2!(j-2)!}x^{j-2}h^2+...\right)+...$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{de^x}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+...+\frac{1}{j!}x^j+...\right)}{h} \\
&= \left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+...+\frac{1}{j!}x^j+...\right)=e^x
\end{aligned}$$

2.3 Les dérivées partielles

En toute généralité, une fonction dépend de n variables. Dans ce cas, il y a lieu de distinguer deux types de dérivée : la dérivée totale, dont je ne parlerai pas du tout, et la dérivée partielle. Pour vous montrer à quel point vous ne souhaitez pas en savoir plus sur la dérivée totale, en voici la définition :

Définition 2.3.1. Pour une fonction f de $x\in\mathbb{R}^p$ (p fini), prenant valeur dans $\mathbb{R}^q$, (q fini également), on appelle ***dérivée totale*** de f en $a\in\mathbb{R}^p$, l'application linéaire T_a , lorsqu'elle existe, définie par

$$f(a+h)=f(a)+T_a(h)+||h||\omega(h),$$

où $\omega(h)$ s'annule quand h tend vers zéro.

Définition 2.3.2. Soit la fonction $f(x,y)$, une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$. Si elle existe, la limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

est appelée *la dérivée partielle de f par rapport à x*, et est classiquement notée $\frac{\partial f}{\partial x}$

Les règles de dérivation sont les mêmes pour les dérivées partielles que pour les dérivées de fonction à une seule variable. Notons que, lorsqu'on dérive par rapport à l'une des variables, les autres variables sont prises constantes.

Exemple 2.1. Soit, à dériver, la fonction $f(x,y)=\frac{3y\cos(2x)}{x\sin y}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{3y}{\sin y}\frac{\partial\frac{\cos 2x}{x}}{\partial x} \\
&= \frac{3y}{\sin y}\left(-2\frac{\sin(2x)}{x}-\frac{\cos(2x)}{x^2}\right) \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{3\cos(2x)}{x}\frac{\partial\frac{y}{\sin y}}{\partial x} \\
&= \frac{3\cos(2x)}{x}\left(\frac{1}{\sin y}-y\frac{\cos y}{\sin^2 y}\right)
\end{aligned}$$

2.4 Extrema locaux et multiplicateurs de Lagrange

L'une des utilisations fréquentes de la dérivation est de localiser un minimum ou un maximum. En effet, comme nous l'avons mentionné plus haut, la dérivée donne aussi la pente de la fonction. Par conséquent, à une dérivée qui change de signe correspond soit un maximum soit un minimum.

Exemple 2.2. On envoie un objet avec une vitesse initiale verticale $v_0 = 10m/s$ dans le champ de pesanteur terrestre. Quelle est la hauteur maximum atteinte ? La hauteur au cours du temps s'écrit $x = x_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2$. Dérivons cette expression par rapport au temps. On trouve $\frac{dx}{dt} = v_0 - gt$, qui s'annule pout $t_{\max} = v_0/g$. On trouve alors $x(t_{\max}) = v_0^2/(2g)$. Pour $g = 9.78m/s^2$, on trouve une hauteur maximum atteinte de $5.11m$ par rapport à la hauteur initiale.

Parfois, on souhaite que le minimum ou le maximum que l'on cherche réponde à une contrainte donnée. Par exemple, on cherche le minimum de la pesanteur à la surface de la Terre, ou en restant sur le géoïde. La méthode classiquement employée est alors celle des multiplicateurs de Lagrange. Nous l'illustrerons sur un exemple.

Exemple 2.3. On cherche les minima de la fonction $Z = x^4 - 2x^2 + y^2$ qui sont situés sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$. La fonction est représentée graphiquement sur la Figure 2.6. Pour trouver le maximum

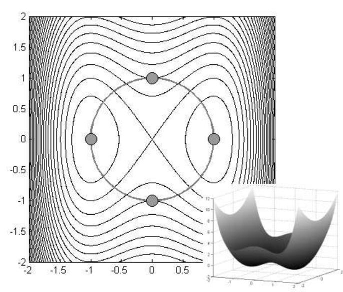

FIG. 2.6 – $Z = x^4 - 2x^2 + y^2$. Le cercle centré sur (0,0) est défini par $x^2 + y^2 = 1$. Les points gris sont les minima identifiés.

général, on dériverait la fonction par rapport à x et y, et on chercherait les zéro. Pour trouver des maxima sous contraintes, on définit une nouvelle fonction :

$$\mathcal{R} = x^4 - 2x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Cette fonction comprend la fonction de départ, et on rajoute λ fois la contrainte. Pour trouver un minimum de $\mathcal{R}$, il faut trouver un minimum à la fois de Z et de la contrainte. Plus la valeur de λ est importante, plus la contrainte joue fortement dans le fait que l'on trouve un minimum. En particulier, pour $\lambda = 0$, la contrainte ne joue pas du tout.

Dérivons $\mathcal{R}$ par rapport à chacune de ses trois variables, et imposons que chaque dérivée soit nulle :

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 2\lambda x = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{2.3}$$

Ce système d'équations cherche un minimum de $\mathcal{R}$. Notons que la troisième équation (2.3) reprend exactement la contrainte, ce qui assure qu'elle sera respectée. Par contre, la première et la seconde sont les équations que l'on aurait si on dérivait Z perturbées par la présence de la contrainte. Donc, en résolvant le système d'équations, on trouve des paires de valeurs (x, y) qui respectent la contrainte (condition stricte) et qui minimise $\mathcal{R}$.

Partons de l'équation (2.2). Elle ne peut être vraie que dans deux cas : (1) $\lambda = -1$ ou (2) $y = 0$.

$\lambda = -1$ **:** L'équation (2.1) donne alors $4x^3 - 6x = 0$, qui a 2 solutions : $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{3/2}$. Si on substitue la première solution dans (2.3), on trouve $y = \pm 1$. Si on substitue la seconde, on trouve une équation qui n'a pas de solution réelle : $y^2 + \frac{1}{2} = 0$. Donc, pour $\lambda = -1$, les seules solutions acceptables sont $x = 0, y = \pm 1$.

$y = 0$ **:** L'équation (2.3) impose alors que $x = \pm 1$. Si on substitue ces valeurs dans (2.1), on note que les 2 premiers termes sont nuls dans les 2 cas, et que $\lambda = 0$ satisfait l'équation.

On a donc quatre solutions possibles : $x = 0, y = \pm 1$ et $x = \pm 1, y = 0$. Elles sont représentées par un disque gris sur la figure 2.6.

La valeur absolue des multiplicateurs de Lagrange donne une information sur l'effet de la contrainte. En particulier, dans le cas $y = 0$, on trouve que $\lambda = 0$, ce qui veut dire que la contrainte n'a pas joué. En effet, $x = \pm 1, y = 0$ sont des minima de la fonction, indépendamment de la contrainte. En revanche, dans le cas $\lambda = -1$, c'est à cause de la contrainte que l'on trouve ces points, qui ne sont pas des minima locaux.

2.5 Les développements limités

Dans de nombreux domaines de la physique, les équations qui régissent les problèmes sont bien connues. En mécanique, ce sont des variantes plus ou moins alambiquées de $F = m\gamma$, l'équation fondamentale de la dynamique de Newton (1687). En mécanique quantique, elles se présentent souvent comme des variations de l'équation de Schrödinger. Ces équations sont fort jolies, mais la plupart du temps, il est impossible de les résoudre.

L'art du physicien consiste alors à faire la bonne approximation, c'est-à-dire à laisser tomber tout ce qui est inutile, de façon à avoir une équation qu'on puisse résoudre *sans que cela change notablement le résultat.*

Le développement de Taylor permet de faire de telles approximations.

Supposons la fonction $f(x) = (1 + x)^3$. Je connais sa valeur en $x = 0$, c'est 1. Je souhaite maintenant avoir sa valeur en un nombre très proche de zéro, par exemple $x = 0.0001$. Bien sûr, je peux la calculer, mais est-ce vraiment nécessaire. Si je peux me contenter d'une réponse précise au dix-millième, je peux me souvenir que $f(x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$. Le premier terme vaut 1, le second vaut 0.0003, mais le troisième ne vaut déjà plus que 0.0000009, et le quatrième est encore plus petit. Donc, je peux me satisfaire de $f(x) = 1 + 3x$ tant que je suis *suffisamment proche* de $x = 0$.

Ce que l'on a fait, dans ce raisonnement, c'est approcher, autour de zéro, la variation de f par une variation linéaire. Nous avons vu, ici plus haut, que la dérivée de f en un point donne la pente en ce point. Par conséquent, on peut se servir de la dérivée pour connaître la variation linéaire qui approche le mieux la variation réelle de la fonction en un point donné. Dès lors, tant que l'on reste suffisamment proche de ce point, l'approximation sera bonne.

On aura donc

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\delta x$$

En faisant cela, nous avons approximé la variation de f autour de x par une droite. Parfois, cette approximation n'est pas suffisante, soit parce que la fonction varie trop rapidement, soit parce qu'on est pas assez près de x. Dans ce cas, on peut faire une approximation plus précise, mais plus lourde, en ajoutant des termes au développement.

En particulier, la dérivée seconde indique comment la dérivée première varie, elle permet de corriger l'approximation linéaire en une approximation quadratique, et ainsi de suite pour les termes plus élevés.

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\delta x + \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\frac{\delta x^2}{2} + \ldots + \frac{d^k f(x)}{dx^k}\frac{\delta x^2}{k!} + \ldots$$

Ce développement convergera pour autant que $\lim_{N\to\infty} \delta x^N = 0$, c'est-à-dire si $\delta x < 1$.

Exemple 2.4. Soit, à developper, la fonction $f(x) = (1+x)^n$, pour un n quelconque. On sait que

$$\begin{aligned} f' &= n(1+x)^{n-1} \\ f'' &= n(n-1)(1+x)^{n-2} \\ f''' &= n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}. \end{aligned}$$

Evaluées en $x=0$, on trouve $f'(0) = n, f''(0) = n(n-1), f'''(0) = n(n-1)(n-2)$. Le développement sera donc

$$\begin{aligned} (1+x)^n &\simeq f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + ... \\ &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 \end{aligned}$$

Si on a un produit ou un quotient de fonctions, on peut développer chaque fonction indépendamment et redévelopper le résultat. Cela permet d'éviter de calculer des dérivées interminables.

Exemple 2.5. Soit, à développer jusqu'à l'ordre 2,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$$

On sait que

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \\ &\simeq 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}{2}x^2 \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1+(-x))^{-\frac{1}{2}} \\ &\simeq 1 + \frac{-1}{2}(-x) + \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}}{2}(-x)^2 \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} \\ \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} &\simeq \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}\right) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{8} \\ &= 1 + x + \frac{3x^2}{8} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{8} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Exemple 2.6. Soit un élément de masse à l'extérieur de la Terre, en $\vec{r}$, et un autre à l'intérieur de la Terre en $\vec{\rho}$, comme illustré sur la Figure 2.7. Le potentiel exercé sur le point extérieur par le point intérieur est donné par

$$V = G\frac{m}{r'}$$

On voudrait écrire cela en fonction des distances par rapport au centre de la Terre. Notons que

$$r'^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\psi$$

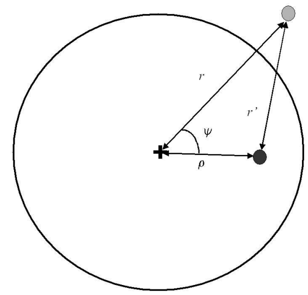

FIG. 2.7 – Potentiel exercé par un point à l'intérieur de la Terre par rapport à un autre, à l'extérieur

Comme $\rho < r$, on peut faire un développement limité autour de zéro pour ρ/r.

$$\begin{aligned}
V &= G\frac{m}{r'} && (2.4)\\
&= G\frac{m}{r\sqrt{1-2\frac{\rho}{r}\cos\psi+\frac{\rho^2}{r^2}}} && (2.5)\\
&= G\frac{m}{r}\left(1+\left(\frac{\rho}{r}\cos\psi-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{r^2}\right)+\left(\frac{3}{2}\frac{\rho^2}{r^2}\cos^2\psi+\frac{3}{8}\frac{\rho^4}{r^4}\right)+...\right) && (2.6)\\
&\simeq G\frac{m}{r}\left(1+\frac{\rho}{r}\cos\psi+\frac{\rho^2}{r^2}\frac{3\cos^2\psi-1}{2}\right) \quad \text{si l'on se limite à l'ordre 2.} && (2.7)
\end{aligned}$$

Ceux qui les ont déjà vu passer auront reconnu les polynômes de Legendre.

2.6 Gradients, divergences, et rotationnels

2.6.1 Quelques exemples de mouvements plans élémentaires

La translation

A un instant t, les composantes u et v de la vitesse sont indépendantes de la position (x, y). Il y a déplacement d'ensemble de toutes les particules dans la même direction, le même sens, et à la même vitesse. Les lignes de courants sont des droites parallèles, comme illustré sur la Figure 2.8.

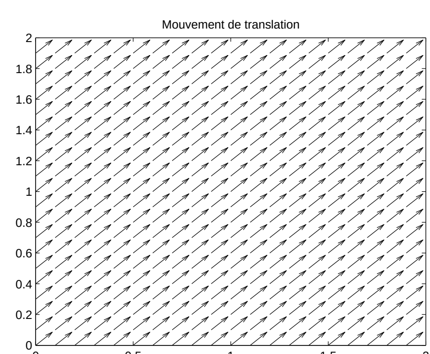

FIG. 2.8 – MOUVEMENT DE TRANSLATION.

Le mouvement de rotation

L'ensemble des particules du plan tourne autour d'un point. A un instant t, la vitesse angulaire de rotation Ω est identique pour toute les particules. Ce mouvement est caractérisé par un vecteur (appelé *vecteur instantané de rotation* $\vec{\Omega}$). Si le mouvement de rotation est dans le plan x, y, le vecteur $\vec{\Omega}$ est normal à ce plan. Le vecteur vitesse, en tout point $\vec{r}$ du plan, se calcule par

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$$

Les lignes de courant sont des cercles concentriques centré sur 0, comme illustré sur la Figure 2.9.

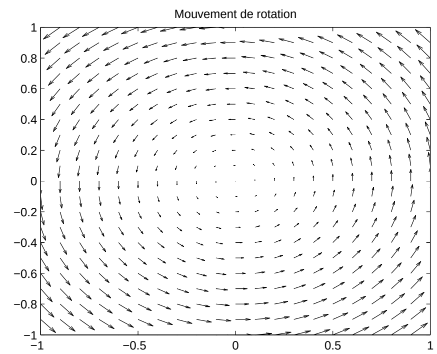

FIG. 2.9 – MOUVEMENT DE ROTATION.

2.6.2 Le mouvement de divergence

Les deux mouvements précédents pouvait se concevoir pour un corps rigide. La divergence est un mouvement particulier au milieu fluide. À un instant t, les particules, qui se déplacent toujours par hypothèse dans le plan (x, y) ont des vecteurs vitesses dont les supports sont concourants en un point appelé *centre de divergence*, ici en 0. Dans ce cas, le vecteur vitesse au point $\vec{r}$ est simplement

$$\vec{v} = a \cdot \vec{r},$$

où a est un scalaire. Si a est positif, le mouvement est divergent, si a est positif, il est convergent. Notons que, à l'instant t, toutes les particules situées sur un cercle de rayon r ont des vecteurs vitesse de même norme. Les lignes de courant sont des droites qui se croisent en l'origine, comme illustré sur la Figure 2.10.

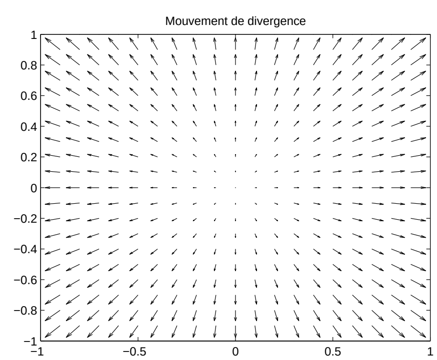

FIG. 2.10 – MOUVEMENT DE DIVERGENCE.

2.6.3 L'opérateur nabla

Pour plus de facilité dans l'écriture, nous allons définir un "vecteur", le vecteur *nabla*, avec

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Il faut noter que cette notation vectorielle risque d'induire en erreur. En effet, ce vecteur n'obéit pas à la définition d'un espace vectoriel (en particulier, il ne permet pas la commutativité de la multiplication scalaire, ni l'anticommutativité du produit vectoriel) et n'est donc pas un vrai vecteur.

2.6.4 Gradient d'une fonction scalaire

Prenons une fonction scalaire, par exemple celle de l'exemple ci-dessus. $Z = x^4 - 2x^2 + y^2$ et prenons un point $\vec{r}$ en $x = -0.4$ et $y = 1$. Je connais sa position et son équation, je peux donc calculer sa valeur : 0.71. Supposons que je veuille connaître la valeur de cette fonction en un point très proche de $(-0.4, 1)$, en $[-0.4+dx, 1+dy]$. Pour estimer la valeur de Z en $\vec{r'}$ en $x+dx$ et $y+dy$. Si dx et dy sont suffisamment

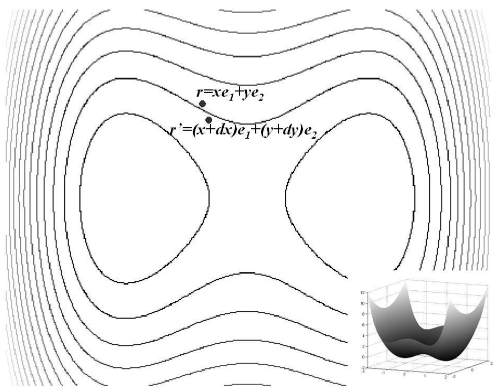

FIG. 2.11 – La fonction scalaire $Z = x^4 - 2x^2 + y^2$.

petits, je peux faire un développement limité de la fonction Z autour du point $\vec{r}$, et l'on trouve :

$$Z(\vec{r}\,') = Z(\vec{r}) + \frac{\partial Z(\vec{r})}{\partial x} dx + \frac{\partial Z(\vec{r})}{\partial y} dy.$$

Si on note $\vec{dr}$ le vecteur déplacement entre $\vec{r}$ et $\vec{r'}$, $\vec{dr} = (dx, dy)$, on peut écrire

$$Z(\vec{r}\,') = Z(\vec{r}) + \vec{dr} \cdot \vec{\nabla} Z$$

avec $\vec{\nabla} Z$ un vecteur, nommé *gradient de Z*, qui a pour composantes les dérivées partielles par rapport à chacune des composantes. Dans l'exemple donné ici, le gradient sera donné par

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x} &= 4x(x^2 - 1) \\ \frac{\partial Z}{\partial y} &= 2y \end{aligned}$$

Bien entendu, ce que j'ai montré ici à deux dimensions est parfaitement valide à autant de dimensions que l'on veut. Le vecteur gradient représente et quantifie la variabilité de la fonction autour d'un point en fonction de sa position dans l'espace. C'est un vrai vecteur, au sens où il relève d'une structure d'espace vectoriel, avec tous les propriétés sympathiques qui y sont associées. En particulier, la commutativité de la multiplication.

$$dZ = \vec{dr} \cdot \vec{\nabla} u = \vec{\nabla} u \cdot \vec{dr} \tag{2.9}$$

Deux remarques pour terminer :

– Le gradient est un vecteur. En tant que tel, il dépend du système d'axes dans lequel il est calculé.
– Le gradient de l'équation d'une surface représente la normale à la surface. Par exemple, le gradient de l'équipotentielle de pesanteur est perpendiculaire à sa surface, c'est l'accélération de la pesanteur (en se préoccupant des dimensions physiques, bien entendu).

Calculons, par exemple, le gradient des composantes des champs de vecteurs définis ci-dessus.

– Pour la translation, chaque composante est constante dans l'espace, donc le gradient de chacune des composantes est nul.
– Pour la rotation, on montre que les composantes du champs de vitesses sont

$$\begin{aligned} u &= -\Omega y \\ v &= \Omega x \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\Omega \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

– Pour la divergence, puisque

$$\begin{aligned} u &= ax \\ v &= ay, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a \end{aligned}$$

2.6.5 Divergence

Soit un petit élément de volume dV, délimité par des surfaces imaginaires formant un parallélépipède dans un fluide. La masse du fluide comprise à l'intérieur de dV est alors

$$M = \rho dV \tag{2.10}$$

où ρ est la masse volumique du fluide.

En un temps dt, cette masse changera de

$$\frac{\partial \rho dV}{\partial t} dt = dV \frac{\partial \rho}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt \tag{2.11}$$

Soient u, v et w, les composantes du vecteur vitesse du fluide au centre du petit volume. Si on regarde les changements de masse dû au mouvement dirigé le long de l'axe $\vec{e}_2$, on voit que par la face située à $-\frac{1}{2}dy$, il est entré

$$\left(\rho v - \frac{1}{2}\frac{\partial \rho v}{\partial y} dy\right) dx dz dt \tag{2.12}$$

De même, par la face située en $\frac{1}{2}dy$, il est entré

$$\left(\rho v + \frac{1}{2}\frac{\partial \rho v}{\partial y}dy\right) dxdzdt \tag{2.13}$$

Le bilan des entrées et sorties donnera donc un changement de masse total de

$$\frac{\partial \rho v}{\partial y} dV dt \tag{2.14}$$

De même, selon les direction $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_3$, on a des changements de masse de

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} dV dt, \; \frac{\partial \rho w}{\partial z} dV dt \tag{2.15}$$

respectivement. S'il n'y a pas de source de masse dans le petit volume, le changement de masse tout entier est dû au transport de matière. Par (2.11,2.14,2.15), on aura

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \tag{2.16}$$

Cette équation (appelée équation de continuité) nous apprend simplement que si la densité change dans un volume donné, c'est que de la masse y a été apporté ou en a été enlevé.

Cette équation (2.16) peut s'écrire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{2.17}$$

où le *scalaire* $\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}$ est appelé *divergence de* $\rho \vec{v}$. Supposons maintenant que le fluide soit incompressible. Dans ce cas, la densité est une constante. L'équation de continuité (2.17) devient alors

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{2.18}$$

La divergence de la vitesse est donc nulle, et le mouvement est dit *indivergenciel*. Il y a autant de masse apportée au parallélépipède que de masse emportée hors de ce parallélépipède.

Si le mouvement du fluide converge vers un point, il va se créer une augmentation de masse autour de ce point, la divergence de la vitesse ne sera donc pas nulle.

Si le mouvement du fluide diverge en un point, il va s'y creer un déficit de masse en ce point. La divergence ne sera donc pas nulle en ce point, et le mouvement est dit *divergenciel*.

La divergence d'une fonction en un point représente donc le flux de cette fonction à travers les faces d'un parallélépipède élémentaire centré en ce point.

Calculons à présent la divergence des écoulements définis plus haut :

- La translation est à divergence nulle, puisque toutes les dérivées s'annulent.
- La rotation est à divergence nulle, puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial(-\Omega y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial \Omega x}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

- La divergence d'un mouvement de divergence est

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial(ax)}{\partial x} = a \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial(ay)}{\partial y} = a \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2a \end{aligned}$$

2.6.6 Rotationnel

On peut montrer que la circulation d'une fonction vectorielle $\vec{u}$ de composante u, v et w le long d'un contour fermé C infinitésimal dans le plan $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ est

$$\int_C \vec{u} \cdot \vec{dr} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.19}$$

De même, le long d'un contour fermé infinitésimal dans le plan $\vec{e}_1, \vec{e}_3$, la circulation de $\vec{u}$ est

$$\int_C \vec{u} \cdot \vec{dr} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.20}$$

et le long d'un contour fermé infinitésimal dans le plan $\vec{e}_2, \vec{e}_3$, la circulation de $\vec{u}$ est

$$\int_C \vec{u} \cdot \vec{dr} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \tag{2.21}$$

Si on prend un contour fermé de normale quelconque, on montre alors que la circulation projetée sur une face de normale $\vec{e}_3$ est $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, si la normale est selon $\vec{e}_2$, on a $\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$ et, si la normale est selon $\vec{e}_1$, on a $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$.

On définit alors un vecteur appelé *rotationnel* de $\vec{u}$ dont les composantes sont les circulations définies ci-dessus soit

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Le vecteur rotationnel est donc le vecteur qui exprime la *tendance à la rotation* d'un champ de vecteur.

Avec les notations ci-dessus, le rotationnel se notera

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \tag{2.23}$$

Calculons le rotationel des champs de vitesse plan élémentaires :

- Le rotationel d'une translation est nul.
- Le rotationel d'un mouvement de divergence est nul, puisque :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial (ax)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial (ay)}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

- Le rotationel d'un mouvement de rotation est

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial (-\Omega y)}{\partial y} = -\Omega \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial (\Omega x)}{\partial x} = \Omega \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{v} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2\Omega \end{aligned}$$

  La moitié du rotation de la vitesse lors d'une rotation uniforme est donc le vecteur rotation, c'est-à-dire le vecteur normal au plan de rotation (au plan de l'équateur, dans le cas de la Terre).

2.6.7 Quelques mises au point

Sur la divergence

- La divergence est un scalaire, qui se calcule pour un champ vectoriel. La divergence appliquée à un scalaire n'a aucun sens.
- La divergence correspond intrinsèquement à un changement de volume. Il faut qu'il y ait convergence ou divergence. Si un champ correspond à une rotation en bloc, il est par essence indivergentiel, c'est-à-dire que sa divergence est nulle. Prenons par exemple $\vec{v} = \hat{z} \wedge \vec{r}$[1], qui correspond à une

[1] $\hat{z}$ correspond au vecteur unitaire dans la direction de Z

rotation autour de l'axe Z, dans le plan XY. Si on calcule la divergence de $\vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \hat{z} \wedge \vec{r} & (2.24)\\
&= (-y, x, 0)^T & (2.25)\\
\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} & (2.26)\\
&= 0 & (2.27)
\end{aligned}$$

De même, une translation en bloc n'est associée à aucune divergence, puisqu'une translation correspond, par définition, à un champ de vitesse constant dans l'espace.
- La divergence d'un rotationnel est toujours nulle, et ce, quel que soit le champ rotationnel.

2.6.8 Sur le rotationel

- Le rotationnel est un vecteur, qui se calcule pour un champ vectoriel. On ne peut pas l'appliquer à un scalaire.
- Le rotationnel, en gros, mesure la rotation d'un champ vectoriel. Les champs efficaces pour le rotationel sont les rotations en bloc. Par exemple, la circulation géostrophique dans l'atmosphère (associée aux cyclones). Le rotationnel d'un champ divergentiel ou d'une translation en bloc donne zéro.
- Le rotationel d'un gradient est toujours nul, et ce quel que soit le champ scalaire dont on calcule le gradient.

2.6.9 Sur le gradient

Le gradient est un vecteur, lorsqu'on calcule le gradient d'une quantité scalaire. On peut également calculer le gradient d'un vecteur, et l'on obtient alors un tenseur. C'est le cas, par exemple, en mécanique des milieux continus.

2.6.10 Le théorème d'Helmoltz

Par le théorème de Helmholtz , un champ de vecteurs est caractérisé entièrement par sa divergence et son rotationnel, et se décompose donc par linéarité en une composante dite à rotationnel nul et une composante à divergence nulle.

Chapitre 3

Intégration

3.1 Le calcul de la surface sous une courbe

Supposons que l'on ait une fonction telle que représentée sur la Figure 3.1. On désire connaître l'aire

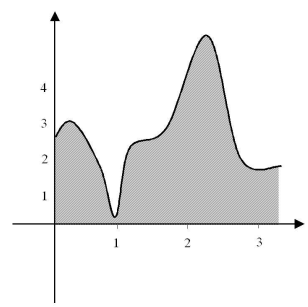

FIG. 3.1 – Une jolie fonction, avec un peu de hachure grise.

sous cette courbe, c'est-à-dire l'aire de la surface hachurée en gris sur la figure. On ne connaît pas, *a priori* la valeur, mais deux choses dont on est sûr, c'est que cette surface est plus grande que celle d'un rectangle de même longueur mais de largeur équivalente au minimum de la courbe (en noir), et plus petite que celle du rectangle de même longueur mais de largeur équivalente au maximum de la courbe (en gris), comme on peut le voir sur la Figure 3.2. Donc, la surface sous la courbe est comprise entre la

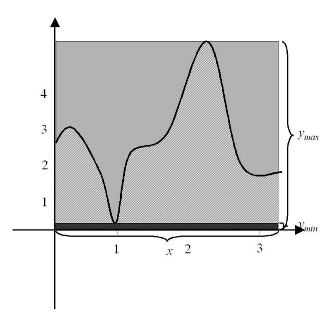

FIG. 3.2 – Une jolie fonction, avec un peu de hachure grise, un grand rectangle gris clair et un petit rectangle noir.

surface du rectangle gris foncé ($x \cdot y_{\text{min}}$) et celle du rectangle gris clair ($x \cdot y_{\text{max}}$). Vu la différence entre les deux surfaces, (dans l'exemple, de l'ordre d'un facteur 15 entre les 2), il est souhaitable d'affiner. Divisons l'intervalle de temps en 2, et reprenons le même raisonnement. La surface sous la courbe est

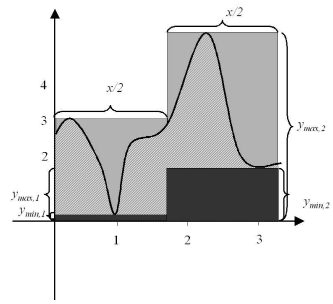

FIG. 3.3 – Une jolie fonction, avec plus de rectangles.

comprise entre la somme des aires des surfaces gris clair et celles des surfaces gris foncé. On a donc

$$\frac{x}{2}y_{\min,1} + \frac{x}{2}y_{\min,2} < S < \frac{x}{2}y_{\max,1} + \frac{x}{2}y_{\max,2}.$$

Si on reitère cette division par 2 des intervalles, on obtient la Figure 3.4. On note que les *escaliers* des

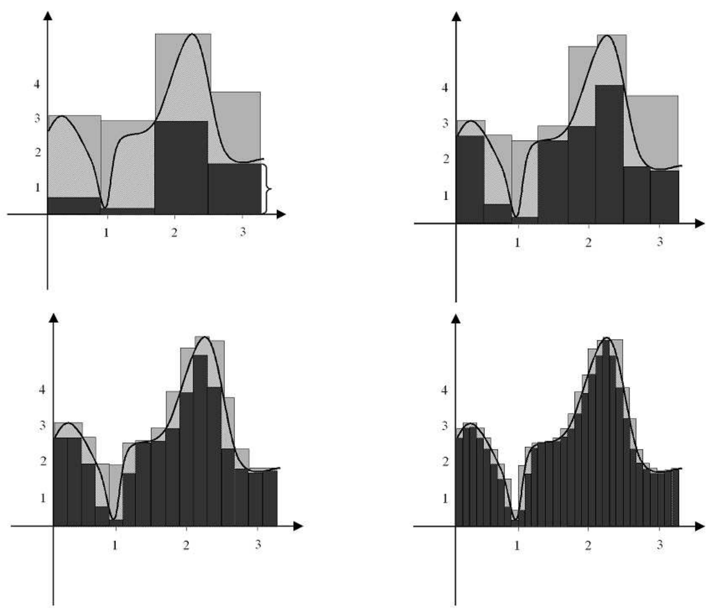

FIG. 3.4 – Une jolie fonction, où il y a des rectangles à n'en plus finir.

minima et des maxima se rapprochent de plus en plus l'un de l'autre, et chacun de la surface hachuré. Les aires totales des zones grises sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} A_{\text{clair}} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{x}{N} \max(f(X), \forall X \in [(i-1)\frac{x}{N}, i\frac{x}{N}]) \\ A_{\text{foncé}} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{x}{N} \min(f(X), \forall X \in [(i-1)\frac{x}{N}, i\frac{x}{N}]) \end{aligned}$$

Si on calcule cela, à la limite pour N tendant vers l'infini, les 2 aires se confondent avec l'aire hachurée, et les *escaliers* se lissent pour suivre exactement la fonction. Le résultat de la somme tend alors vers l'aire de la surface sous la courbe.

Définition 3.1.1. Soit f, une fonction définie (au moins) sur un intervalle $[a, b]$. Si

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\frac{b-a}{N}\max(f(x),\forall x\in[(i-1)\frac{b-a}{N},i\frac{b-a}{N}]) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\frac{b-a}{N}\min(f(x),\forall x\in[(i-1)\frac{b-a}{N},i\frac{b-a}{N}]),$$

on dira que f est intégrable sur $[a, b]$. En outre, on notera

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

cette limite, et on l'appelera l'*intégrale de f(x) entre a et b.*

Une grande partie des fonctions que l'on rencontre dans la nature est intégrable. En effet, il suffit que la fonction soit continue, au moins par morceaux, pour qu'elle soit intégrable. Cela ne veut nullement dire que l'intégrale est simple à calculer.

Exemple 3.1. Soit, à calculer, l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 x dx.$$

Si je prends la définition, je sais que

$$I = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\max(x,\forall x\in[(i-1)\frac{1}{N},i\frac{1}{N}]) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}N\min(x,\forall x\in[(i-1)\frac{1}{N},i\frac{1}{N}])$$

Commençons par la première limite. Le maximum de x est bien entendu $\frac{i}{N}$, et la limite devient.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{N}$$

On sait que $\sum_{i=1}^{N} i = N(N+1)/2$. En effet[1], pour $N = 1$ et $N = 2$, le résultat est immédiat. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour $N - 1$, appliquons ce résultat au calcul pour N. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} i &= \sum_{i=1}^{N-1} i + N\\ &= (N-1)\frac{N}{2} + N\\ &= N\frac{N+1}{2}.\end{aligned}$$

Ce qui montre que, si c'est vrai pour $N - 1$, c'est vrai pour N. Donc, comme c'est vrai pour 2, c'est vrai pour 3, et donc pour 4, et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

Essayons maintenant de calculer (3.1).

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{N} &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} i\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}N\frac{N+1}{2}\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{N(N+1)}{2N^2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

[1] Pour ceux qui ne connaissent pas, les raisonnements du type de celui qui suit sont connus sous le nom de *démonstration par récurrence*

Pour la limite inférieure, le raisonnement est similaire, si ce n'est que le minimum de x sur l'intervalle est $\frac{i-1}{N}$. On montre aisément que $\sum_{i=1}^{N}(i-1) = \sum_{i=1}^{N} i - N = N(N-1)/2$, et donc que la limite est également $\frac{1}{2}$. Par conséquent, puisque les deux limites existent et sont égales, la fonction est intégrable, et l'intégrale vaut $\frac{1}{2}$.

Exemple 3.2. Calculons à présent l'intégrale $\int_0^1 x^2\, dx$. Nous ne calculerons que la limite "max", la limite "min" se calcule exactement de la même façon. Soit donc

$$\int_0^1 x^2\, dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \max(x^2, \forall x \in [(i-1)\frac{1}{N}, i\frac{1}{N}]).$$

Toujours par récurrence, on montre que $\sum_{i=1}^{N-1} i^2 = \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N$. Dès lors, puisque $\max(x^2, \forall x \in [(i-1)\frac{1}{N}, i\frac{1}{N}]) = \frac{i^2}{N^2}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\, dx &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{i^2}{N^2} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^3} \sum_{i=1}^{N} i^2 \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^3} \left(\frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^3} \left(\frac{1}{3}N^3\right) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

3.2 Et les primitives, là-dedans ?

Dans les deux exemples ci-dessus, nous avons pu constater deux choses. D'une part, on peut calculer les limites associées à la définition d'intégrale. D'autre part, en général, c'est assez compliqué, puisqu'il faut calculer des limites de séries. Heureusement est arrivé le résultat suivant.

Théorème 3.2.1. Si f est une fonction sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ dont il existe une primitive, alors, f est intégrable sur $[a, b]$, et, si on note F une primitive quelconque de f sur $[a, b]$, on a,

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Donc, pour estimer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle, il suffit de pouvoir calculer la primitive de la fonction, et de faire la différence entre les bornes de l'intégrale. Le problème c'est que les fonctions dont on peut calculer une primitives sont rares. Enfin, pas vraiment rares mais, par rapport à l'ensemble des fonctions, elles ne sont pas bien nombreuses. Même certaines fonctions simples, comme e^{x^2} par exemple, n'ont pas de primitive. Pour ces cas-là, il faut trouver une autre méthode.

3.3 Les intégrales, pour quoi faire ?

Bien sûr, il y a un grand intérêt esthétique à évaluer la surface sous une courbe. Mais, en outre, les applications en physique sont nombreuses. En effet, dès qu'il s'agit de cumuler les effets de causes qui varient de façon continue (ou discontinue), on utilise l'intégrale. Par exemple, si on connait la distribution de densité dans un corps, par exemple une planète, on peut en calculer le champ de pesanteur. En effet, le potentiel gravitationnel exercé par un objet de masse m situé au point $\vec{x}_m$, mesuré au point $\vec{x}$ est donné par

$$V = G\frac{m}{\|\vec{x} - \vec{x}_m\|}$$

où G est la constante de gravitation universelle. Si j'ai plusieurs objets de masses m_i, $i = 1...n$, le potentiel total sera donné par

$$V = G \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\|\vec{x} - \vec{x}_{m_i}\|}$$

Si j'ai une distribution continue de matière, je peux la décomposer en petits cubes de matière, en attribuant à chacun la densité soit maximum soit minimum du cube, et puis faire tendre la taille des cubes vers 0, et l'on trouve alors :

$$V = G \int_V \frac{\rho}{\|\vec{x} - \vec{x}\|} \, dV.$$

Partout où l'on a des propriétés qui varient à l'intérieur d'un milieu continu, on trouvera des intégrales. On en trouvera aussi pour passer de l'accélération à la vitesse, de la vitesse à la position,...

En effet, supposons un mobile qui a une vitesse qui varie au cours du temps, et dont on veut connaître la position. On peut calculer la position si la vitesse est constante, simplement par le produit entre le temps écoulé et la vitesse. Mais, comme elle varie, on peut prendre des petits intervalles de temps pendant lesquels on la suppose constante, et dire que la distance parcourrue est donnée par

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} v \cdot \Delta t = \int_0^t v \, dt.$$

La physique de la Terre fait aussi appel à de nombreuses fonctions spéciales (Polynômes de Legendre, de Laguerre, harmoniques sphériques,...), qui sont orthogonales entre elles, et pour lesquelles on utilise l'intégrale dans le cadre des propriétés d'orthogonalité.

Chapitre 4

Formulaire

4.1 Formules générales de calcul de primitives

$$
\begin{aligned}
\int a \; dx &= ax \\
\int a \; dx &= ax \\
\int af(x) \; dx &= a \int f(x) \; dx \\
\int (u \pm v \pm w \pm ...) \; dx &= \int u \; dx \pm \int v \; dx \pm \int w \; dx \pm ... \\
\int udv \; dx &= uv - \int v \; du \\
\int f(ax) \; dx &= \frac{1}{a} \int f(u) \; du \\
\int F\{f(x)\} \; dx &= \int \frac{F(u)}{f'(x)} \; du \\
\int u^n \; du \; du &= \frac{u^{n+1}}{n+1} \quad n \neq 1 \\
\int \frac{du}{u} &= \ln |u| \\
\int e^u \; du &= e^u \\
\int a^u \; du &= \frac{a^u}{\ln a} \quad a > 0, \; a \neq 1 \\
\int \sin x \; dx &= -\cos x \\
\int \cos x \; dx &= \sin u \\
\int \tan x \; dx &= -\ln \cos x \\
\int \cot x \; dx &= \ln \sin x \\
\int \frac{dx}{\cos x} &= \ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\
\int \frac{dx}{\sin x} &= \ln \tan \frac{x}{2} \\
\int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x \\
\int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\cot x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \tan^x \ dx &= tanx - x \\
\int \sin^2 x \ dx &= \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right) \\
\int \cos^2 x \ dx &= \frac{1}{2}\left(x + \sin x \cos x\right) \\
\int \frac{1}{\cos x} \tan x \ dx &= \frac{1}{\cos x} \\
\int \frac{1}{\sin x} \tan x \ dx &= -\frac{1}{\sin x} \\
\int \sinh x \ dx &= \cosh x \\
\int \cosh x \ dx &= \sinh x \\
\int \tanh x \ dx &= \ln \cosh u \\
\int \frac{dx}{\cosh x} &= \sinh^{-1} \tanh x \\
\int \frac{dx}{\sinh x} &= \ln \tanh \frac{x}{2} \\
\int \frac{dx}{\cosh^2 x} \ dx &= \tanh x \\
\int \frac{dx}{\sinh^2 x} \ dx &= -\coth x \\
\int \tanh^2 x \ dx &= x - \tanh x \\
\int \frac{1}{x^2 + a^2} \ dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \\
\int \frac{1}{x^2 - a^2} \ dx &= \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} = \frac{1}{2a} \coth^{-1} \frac{x}{a} \quad u^2 > a^2, \\
\int \frac{1}{a^2 - x^2} \ dx &= \frac{1}{2a} \ln \frac{x+a}{a-x} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a} \quad a^2 > u^2, \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \ dx &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \ dx &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) \\
\int \frac{1}{u\sqrt{x^2 - a^2}} \ dx \ dx &= \frac{1}{a} \arccos |\frac{a}{x}| \\
\int \frac{1}{u\sqrt{x^2 + a^2}} \ dx &= -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right) \\
\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - x^2}} \ dx &= -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)
\end{aligned}
$$

4.2 Formules générales de dérivation

4.2.1 Fonctions simples

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(c) &= 0 \\
\frac{d}{dx}(cx) &= c \\
\frac{d}{dx}(cx^n) &= ncx^{n-1} \\
\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm ...) &= \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm ... \\
\frac{d}{dx}(cu) &= c\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(uv) &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \\
\frac{d}{dx}(u^n) &= nu^{n-1}\frac{du}{dx}
\end{aligned}
$$

4.2.2 Fonctions circulaires et fonctions circulaires inverses

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sin u) &= \cos u\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\cos u) &= -\sin u\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\tan u) &= \frac{1}{\cos^2 u}\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\cot u) &= -\frac{1}{\sin^2 u}\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos u}\right) &= \frac{\tan u}{\cos u}\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin u}\right) &= -\frac{\cot u}{\sin u}\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\arcsin u) &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \arcsin u < \frac{\pi}{2}\right) \\
\frac{d}{dx}(\arccos u) &= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \quad (0 < \arcsin u < \pi) \\
\frac{d}{dx}(\arctan u) &= \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \arctan u < \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

4.2.3 Fonctions logarithmes, exponentielles, hyperboliques et hyperboliques inverses

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\log_a u) &= \frac{log_a e}{u}\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\ln u) &= \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(a^u) &= a^u \ln a \frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(e^u) &= e^u \frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(u^v) &= vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\sinh u) &= \cosh u \frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\cosh u) &= \sinh u \frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\tanh u) &= \frac{1}{\cosh^2 u}\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\coth u) &= \frac{-1}{\sinh^2 u}\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cosh u}\right) &= \frac{\tanh u}{\cosh u}\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sinh u}\right) &= -\frac{\coth u}{\sinh u}\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} u\right) &= \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1} u\right) &= \pm\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \quad \left(+\,si\ \cosh^{-1} u > 0,\ -\,si\ \cosh^{-1} u < 0\right) \\
\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} u\right) &= \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx} \quad (-1 < u < 1)
\end{aligned}
$$

4.3 Produit vectoriel et produit scalaire

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \wedge \vec{b} &= -\vec{b} \wedge \vec{a} \\
\vec{a} \wedge \left(\vec{b} + \vec{c}\right) &= \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \\
\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) &= \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{a}\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \\
\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} &= \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{a}\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \\
\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \wedge \vec{d}\right) &= \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \\
\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \left(\vec{c} \wedge \vec{d}\right) &= \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \wedge \vec{d}\right)\right) - \vec{d}\left(\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)\right) \\
\frac{d}{du}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) &= \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{du} + \frac{d\vec{a}}{du} \cdot \vec{b} \\
\frac{d}{du}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) &= \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{du} + \frac{d\vec{a}}{du} \wedge \vec{b}
\end{aligned}
$$

4.4 Formules diverses comprenant $\vec{\nabla}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\left(\psi + \phi\right) &= \vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}\phi \\
\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} \cdot \vec{b} \\
\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{a} + \vec{b}\right) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{a} + \vec{\nabla} \wedge \vec{b} \\
\vec{\nabla} \cdot \left(\phi\vec{a}\right) &= \left(\vec{\nabla}\phi\right) \cdot \vec{a} + \phi\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right) \\
\vec{\nabla} \wedge \left(\phi\vec{a}\right) &= \left(\vec{\nabla}\phi\right) \wedge \vec{a} + \phi\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}\right) \\
\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) &= \vec{b} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}\right) - \vec{a} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{b}\right) \\
\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) &= \left(\vec{b} \cdot \nabla\right)\vec{a} - \vec{b}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right) - \left(\vec{a} \cdot \nabla\right)\vec{b} + -\vec{a}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}\right) \\
\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla}\phi\right) &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}\right) &= 0 \\
\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}\right) &= \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right) - \nabla^2\vec{a} \\
\vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) &= \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{a} + \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b} + \vec{b} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}\right) + \vec{a} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{b}\right)
\end{aligned}
$$