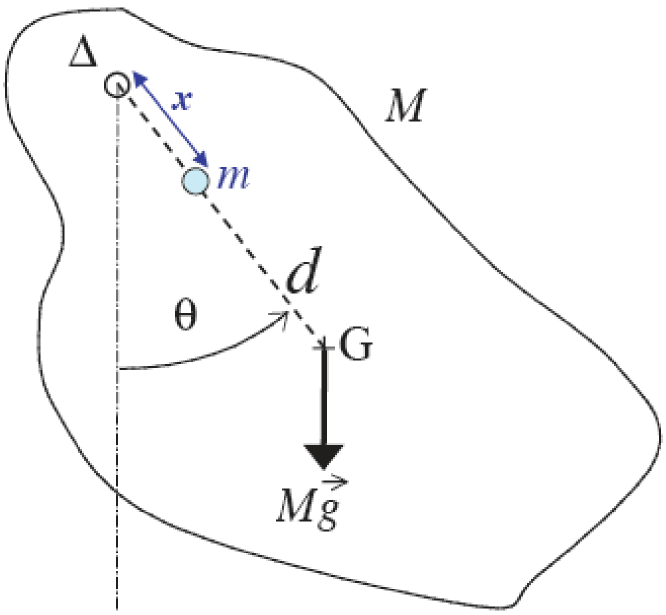
Licence STEP L2

Module Physique pour les géosciences 2

Mécanique des solides et des planètes

MS6: Corrigé du TD du 17 mars 2008

Exercice 1 :



La période des petites oscillations du pendule physique de masse *M* est:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} \quad . \tag{1}$$

Quand on ajoute la petite masse *m*, on obtient un nouveau pendule physique caractérisé par une masse $M'=M+m$, un moment d'inertie $J=I+mx^2$ et un centre d'inertie situé à une distance d' de l'axe Δ telle que $M'd'=Md+mx$. La période devient T' donnée par:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M'gd'}} = 2\pi\sqrt{\frac{I+mx^2}{g(Md+mx)}} \quad . \tag{2}$$

Expérimentalement, on connaît *M*, *m*, *x*; on peut mesurer *T* et *T'*. On peut donc écrire:

$$\begin{cases} \dfrac{T^2}{4\pi^2} gMd = I \\ \dfrac{T'^2}{4\pi^2} g(Md + mx) = I + mx^2 \end{cases} \quad . \tag{3}$$

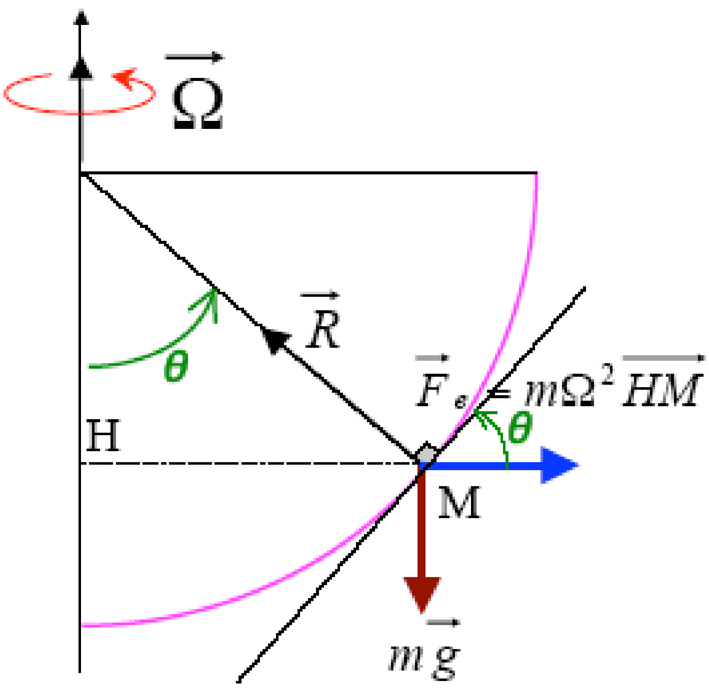
et éliminer *d*:

$$\frac{T'^2}{T^2} I + \frac{T'^2}{4\pi^2} gmx = I + mx^2 , \qquad (4)$$

$$I = \frac{mx^2 - \frac{T'^2}{4\pi^2} gmx}{\frac{T'^2}{T^2} - 1} . \qquad (5)$$

On pourra faire la mesure de T' pour différentes valeurs de x et vérifier que le moment d'inertie I obtenu en appliquant (5) reste stable.

Exercice 2 :



A l'équilibre, la somme des forces agissant sur le mobile est nulle. Ces forces sont son poids, la force d'inertie d'entraînement, qui est horizontale, et la réaction du plan qui, en l'absence de frottement, est normale à la calotte sphérique. Projetons ces forces sur la droite d'intersection du plan vertical et du plan normal à la calotte sphérique. On a alors:

$$mg \sin\theta = F_e \cos\theta , \qquad (6)$$

où q est l'angle avec la verticale de la droite joignant le point de contact au centre de la sphère et F_e le module de la force d'inertie d'entraînement. On a:

$$F_e = m\Omega^2 HM = m\Omega^2 R \sin\theta . \qquad (7)$$

En reportant dans (6), on obtient:

$$g = \Omega^2 R \cos\theta \ . \tag{8}$$

La position d'équilibre vérifie donc:

$$\cos\theta = \frac{g}{\Omega^2 R} \ . \tag{9}$$

Quand la vitesse angulaire devient très grande, l'angle tend vers 90°, le mobile se retrouve plaqué contre l'extérieur de la calotte sphérique.

<u>Exercice 3 :</u>

Quand on va poser la toupie sur sa pointe, elle va effectuer un mouvement de précession dans le même sens que sa rotation propre, avec une vitesse angulaire donnée par (cf chap. 5):

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgd}{C\omega_Z} , \tag{10}$$

où M est sa masse, C son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation propre, ω_Z la vitesse de rotation propre et d la distance entre le point de contact et le contre d'inertie.

Utilisons les résultats de l'exercice sur le moment d'inertie d'une cône homogène. On a:

$$d = \frac{3}{4}h \quad \text{et} \quad C = \frac{3}{10}MR^2 \ , \tag{11}$$

où h est la hauteur du cône et R le rayon de sa base. On obtient:

$$\dot{\varphi} = \frac{Mg\frac{3}{4}h}{\frac{3}{10}MR^2\omega_Z} = \frac{5gh}{2R^2\omega_Z} = \frac{5\times10\times0.1}{2\times25\times10^{-4}\times2\times\pi\times20} = \frac{25}{\pi}\text{s}^{-1}. \tag{12}$$

La période de précession P est donc:

$$P = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = \frac{2\pi^2}{25} = 0.8 \text{ tours par seconde} \tag{13}$$