Mécanique des solides et des planètes

MS2: Exercices du 5 février 2007

2007MS1E1 :

Considérons un objet de masse m en MCU sur une orbite circulaire de rayon R autour d'un objet de masse M. La force qui maintient un objet sur une trajectoire circulaire est centripète et son intensité (module) est mV^2/R où $V=2\pi R/T$ est la vitesse. Cette force est ici la force d'attraction dont le module est GmM/R^2. On a donc :

$$m\frac{V^2}{R} = m4\pi^2\frac{R}{T^2} = G\frac{mM}{R^2}\,, \qquad (1)$$

soit

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}\,. \qquad (2)$$

C'est l'expression de la troisième loi de Kepler!

Titan se trouve à 1 220 000 km de Saturne et sa période de rotation est 383 heures. La masse de Saturne est donc :

$$M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6.67\times10^{-11}}\frac{(1.22\times10^9)^3}{(1.379\times10^6)^2} = \frac{4\pi^2}{6.67}\frac{(1.22)^3}{(1.379)^2}\times10^{26} = 5.7\times10^{26}\,\mathrm{kg}\,. \qquad (3)$$

Une unité astronomique (UA) est la distance moyenne Terre-Soleil, soit environ 150 millions de km ou plus précisément 1.49597871 10^{11} m. La période orbitale de la Terre est environ 365.25 jours soit 3.1558 10^7 s. La masse du Soleil obtenue par (2) est :

$$M_\Theta = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6.672\times10^{-11}}\frac{(1.4960\times10^{11})^3}{(3.1558\times10^7)^2} = \frac{4\pi^2}{6.672}\frac{(1.496)^3}{(3.1558)^2}\times10^{30} = 1.99\times10^{30}\,\mathrm{kg}\,. \qquad (4)$$

Cette valeur est identique à celle qu'on trouve dans les tables de données!

Pour estimer la masse de la Terre, on utilise la Lune. La distance moyenne Terre-Lune est 384 390 km, soit 3.8439 10^8 m pour une période orbitale de 27.322 jours soit 2.3606 10^6 s. La masse de la Terre obtenue par (2) est donc :

$$M_T = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6.672\times10^{-11}}\frac{(3.8439\times10^8)^3}{(2.3606\times10^6)^2} = \frac{4\pi^2}{6.672}\frac{(3.8439)^3}{(2.3606)^2}\times10^{23} = 6.0\times10^{24}\,\mathrm{kg}\,. \qquad (5)$$

Si la distance Terre-Lune est fausse de 0.01 %, alors la masse de la Terre sera fausse de 0.03 %.

2007MS1E2 :

D'après l'équation (1), la vitesse sur une orbite circulaire autour de la Terre est:

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R}}\,, \qquad (6)$$

soit, pour l'ISS:

$$V = \sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{6.75\times10^6}} = 7700\,\mathrm{m/s} = 17300\,\mathrm{mph}\,. \qquad (7)$$

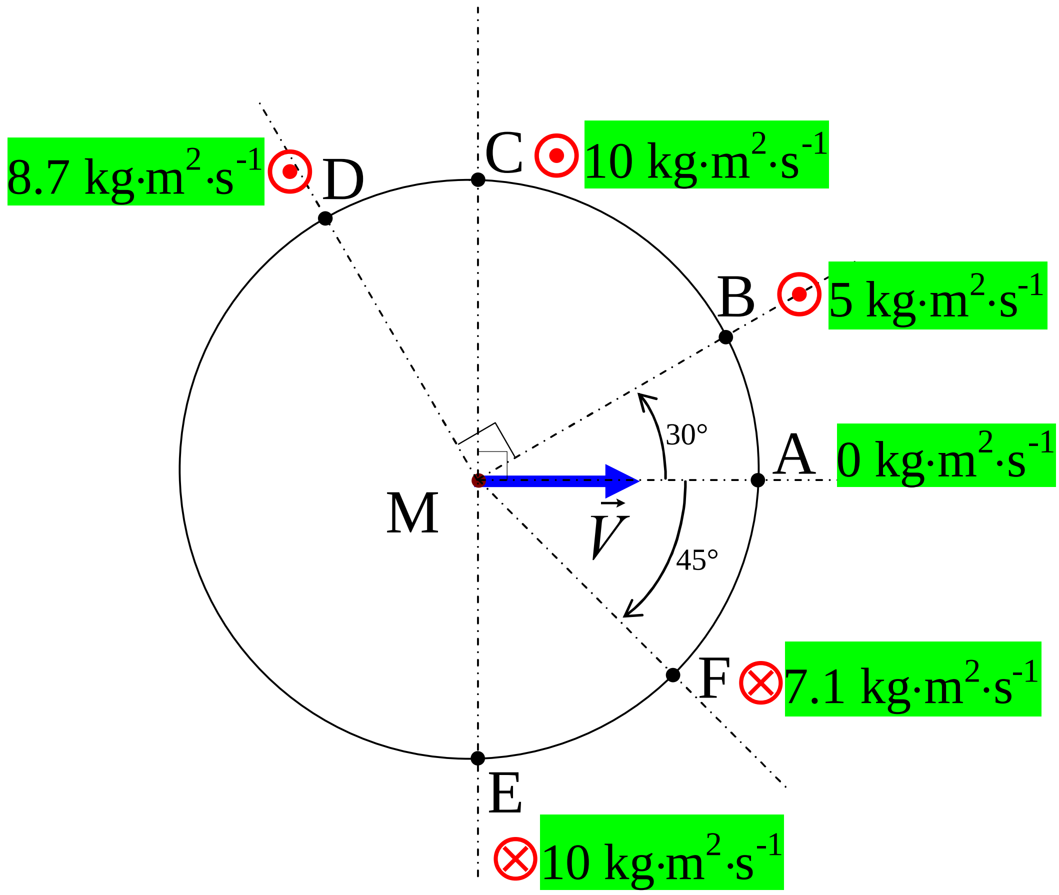
La valeur de la vitesse donnée par la NASA est donc raisonnable. L'énergie cinétique E_K de l'ISS est :

$$E_K = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}1.8\times10^5(7700)^2 = 5.3\times10^{12}\text{ J}. \qquad (8)$$

Son moment cinétique $\vec{\sigma}_{ISS}$ par rapport au centre de la Terre est perpendiculaire au plan de sa trajectoire et son module vaut:

$$\sigma_{ISS} = 6.75\times10^6 \times 1.8\times10^5 \times 7700 = 9.3\times10^{15}\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}. \qquad (9)$$

2007MS1E3 :



2007MS2E1C :

La quantité de mouvement du wagon est :

$$p = mV = 10^3 \times \frac{144\times1000}{3600} = 4\times10^4\text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \qquad (10)$$

et son énergie cinétique :

$$E_K = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}10^3\times(40)^2 = 8\times10^5\text{ J}. \qquad (11)$$

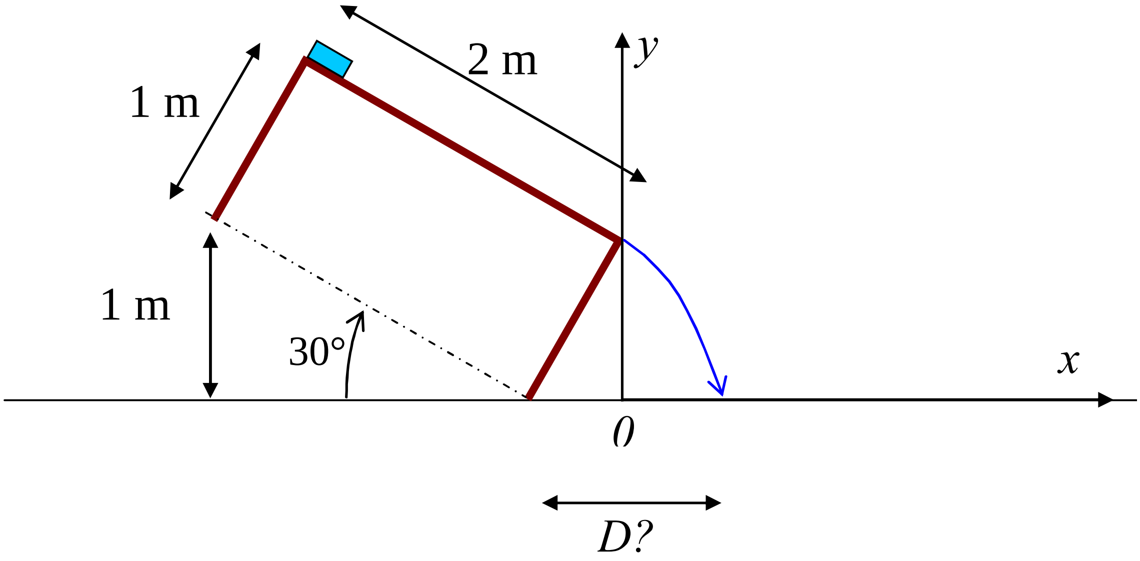
Au moment du choc, ce wagon se colle sur le deuxième wagon qui circule initialement à la vitesse de 72 km/h=20 m/s=$V/2$. La quantité de mouvement initiale totale est donc $mV+mV/2=3mV/2$. Après le choc, les deux wagons forment un petit train de masse $2m$ (il n'y a pas éjection de débris). Si la vitesse du train est V_f, alors sa quantité de mouvement est $2mV_f$, qui est égale à la quantité de mouvement initiale, soit $3mV/2$. On a donc :

$$V_f = \frac{3V}{4} = 30 \text{ m/s} . \quad (12)$$

On peut vérifier que, dans ce choc, l'énergie cinétique totale n'est pas conservée, mais est diminuée. C'est en effet un choc mou. Une partie de l'énergie cinétique initiale est utilisée pour absorber le choc; elle est convertie en chaleur.

2007MS2E2C :

L'énoncé n'étant pas excessivement précis, on peut proposer l'interprétation suivante, attrayante car elle permet de poser que l'angle de la table est 30° :



L'équation de la trajectoire est :

$$y = y_0 - \tan 30° x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_1^2 \cos^2 30°} , \quad (13)$$

où V_1 est la vitesse du mobile à la fin du glissement sur la table. Ce glissement est un MRUA d'accélération $g\sin 30° = 5 \text{ m·s}^{-2}$, on a donc :

$$V_1 = \sqrt{2 \times 5\text{ms}^{-2} \times 2\text{m}} = 2\sqrt{5} \text{ m/s} . \quad (14)$$

Soit x_1 le point de contact avec le sol. On a :

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 - \frac{x_1^2}{3} . \quad (15)$$

La solution positive de cette équation du deuxième degré est :

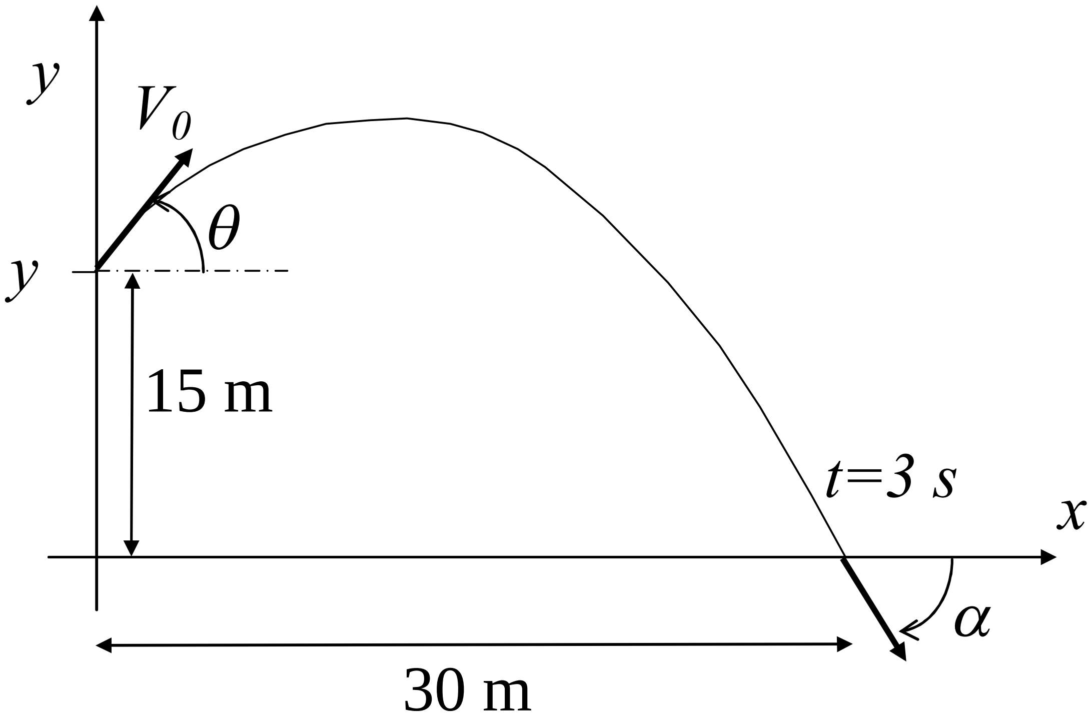
$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{3}}\right] . \quad (16)$$

Le mobile tombe à une distance D du pied de la table, donnée par :

$$D = \frac{1}{2} + x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}\left[\sqrt{1 + 2\sqrt{3}} - 1\right]}{2} , \quad (17)$$

soit à 1.46 m du pied de la table.

2007MS2E3C :



Au bout du temps t donné, la trajectoire de la moto passe à $y=0$ pour x vérifiant :

$$0 = y_0 + x\tan\theta - \frac{1}{2}gt^2 \text{ ,} \tag{18}$$

d'où on tire :

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt^2 - y_0}{x} = \frac{5\times 9 - 15}{30} = 1 \text{ ,} \tag{19}$$

ce qui fournit $\theta = 45°$ et $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La vitesse initiale est alors :

$$V_0 = \frac{x}{\cos\theta t} = 10\sqrt{2} = 14.1 \text{ m/s}. \tag{20}$$

L'angle α à l'arrivée vérifie :

$$\tan\alpha + \tan\theta = 2\frac{y-y_0}{x} = 2\frac{-15}{30} = -1 \text{ ,} \tag{21}$$

soit $\tan\alpha = -2$ ou α=-63°.

<u>Remarque:</u> L'équation (21) est très utile car elle ne contient que des distances. Pour la démontrer, on écrit la définition de α:

$$\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{V_0\sin\theta - gt}{V_0\cos\theta} = \frac{V_0\sin\theta t - gt^2}{V_0\cos\theta t} \text{ .} \tag{22}$$

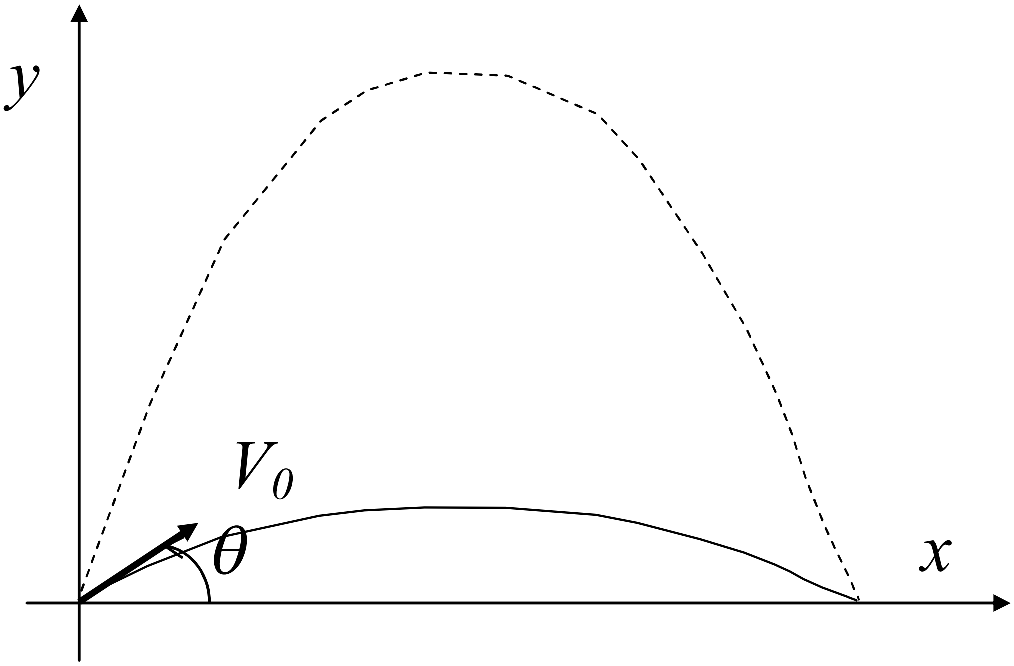
Mais gt^2 peut s'exprimer en fonction de y, y_0 et $V_0\sin\theta\, t$:

$$-gt^2 = 2\left(y - y_0 - V_0\sin\theta t\right) \text{ .} \tag{23}$$

On obtient donc:

$$\tan\alpha = \frac{2(y-y_0)-V_0\ \sin\theta t}{V_0\cos\theta t} = \frac{2(y-y_0)}{x} - \tan\theta\ . \qquad (24)$$

<u>2007MS2E4C :</u>



La portée R vérifie :

$$R = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\theta\ , \qquad (25)$$

d'où :

$$\sin 2\theta = \frac{Rg}{V_0^2} = \frac{1}{2}\ , \qquad (26)$$

soit $\theta=\theta_1=15°$ ou $\theta=\theta_2=75°$.

La durée T du vol du boulet est donnée par :

$$T = \frac{2V_0\ \sin\theta}{g}\ . \qquad (27)$$

Or, on a :

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{2\pm\sqrt{3}}{4}\ , \qquad (28)$$

et donc pour les deux trajectoires possibles on a :

$$T_1 = 4\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2.1\,s \text{ et } T_2 = 4\sqrt{2+\sqrt{3}} = 7.7\,s\ . \qquad (29)$$

La hauteur maximale H de la trajectoire du boulet est donnée par :

$$H = \frac{V_0^2\sin^2\theta}{2g}\ , \qquad (30)$$

et donc pour les deux trajectoires possibles on a :

$$H_1 = 20\left(2-\sqrt{3}\right) = 5.4m \text{ et } H_2 = 20\left(2+\sqrt{3}\right) = 75m\,. \qquad (31)$$

Remarques: Si on a oublié la formule (5), on peut la retrouver facilement en écrivant que pour une ordonnée R l'abscisse de la trajectoire est nulle, soit :

$$0 = 0 + R\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{R^2}{V_0^2\cos^2\theta}\,. \qquad (32)$$

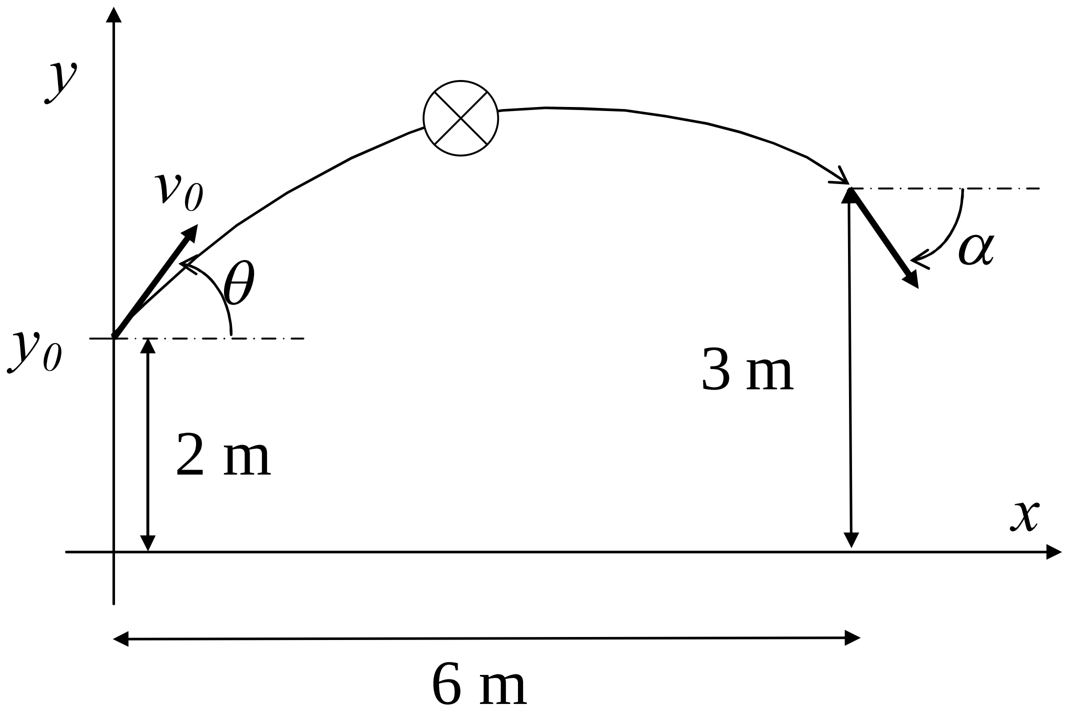
De même, on peut retrouver facilement (7) en écrivant que la vitesse verticale v_y est nulle pour le maximum de la trajectoire, qui correspond à $t=T/2$:

$$0 = V_0\sin\theta - g\frac{T}{2}, \qquad (33)$$

et on peut alors déduire (10) :

$$H = \sin\theta\, V_0\frac{T}{2} - \frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{V_0^2\sin^2\theta}{2g}\,. \qquad (34)$$

2007MS2E5C :



On a :

$$\tan\alpha + \tan\theta = 2\frac{y-y_0}{x} = 2\frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \qquad (35)$$

d'où, puisque tanα=-1 est donné, on tire la valeur de l'angle de lancée :

$$\tan\theta = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \qquad (36)$$

soit θ=53°.

On en déduit :

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{9}{25}, \qquad (37)$$

qui fournit :

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \text{ et } \sin\theta = \frac{4}{5}. \tag{38}$$

La durée t du vol du ballon vérifie :

$$3 = 2 + x\tan\theta - \frac{1}{2}gt^2, \tag{39}$$

soit :

$$t = \sqrt{\frac{7}{5}} = 1.2 \text{ s} \tag{40}$$

et :

$$V_0 = \frac{x}{\cos\theta t} = 10\sqrt{\frac{5}{7}} = 8.5 \text{ m/s}. \tag{41}$$