

PHYSIQUE POUR LES GEOSCIENCES (2)
Éléments de mécanique classique des solides et
des planètes

Frédéric Perrier

2005-2006

Chapter 1

L'univers de la mécanique classique

Ce chapitre propose une vue d'ensemble de la mécanique classique qui comprend la mécanique de Newton que vous connaissez et une autre formulation que l'on appelle la mécanique analytique.

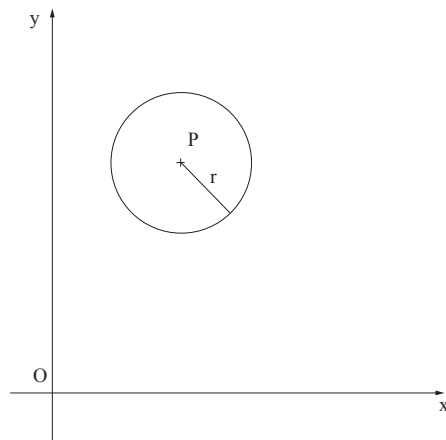


Figure 1.1: Représentation géométrique vs analytique d'un cercle

Qu'est-ce que la mécanique analytique ? Et, tout d'abord, que signifie le mot "analytique" ? Au XVII^{em} siècle, Descartes et Fermat inventent la "géométrie analytique". Qu'est-ce que cela veut dire ? Descartes avait eu cette idée de caractériser la position d'un point P dans un plan par deux nombres, ses coor-

données x_P et y_P par rapport à deux axes orthogonaux se coupant en un point O , l'origine. Pour représenter un cercle de centre P et de rayon r (Figure 1.1), on peut alors écrire

$$(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 = r^2. \quad (1.1)$$

De même pour une ellipse de demi-axes a et b , on écrit

$$\frac{(x - x_P)^2}{a^2} + \frac{(y - y_P)^2}{b^2} = 1. \quad (1.2)$$

Les objets géométriques sont alors représentés par ces équations. On n'a plus besoin de dessins, en fait, on peut travailler directement avec ces équations et en déduire des tas de propriétés dont certaines sont difficiles à voir directement sur les figures. La "mécanique analytique" est la poursuite de cette idée. Son objectif est de remplacer le dessin de trajectoires dans l'espace par des équations et on va déduire de ces équations les propriétés du mouvement qui nous intéressent. C'est bien l'objet de la "mécanique", décrire les mouvements et leurs causes. Parmi ceux-ci, depuis l'Antiquité, un des premiers objectifs de la mécanique est de décrire et de comprendre les mouvements des corps célestes, planètes, comètes et autres. C'est aussi dans ce but que Lagrange inventa sa "mécanique analytique".

L'objectif de cette série de cours est de fournir quelques bases sur cette mécanique analytique et de mettre en évidence les raisons pour lesquelles, plus de deux cents ans après sa création, elle demeure une discipline intéressante à étudier.

Mais la "mécanique analytique" n'est pas qu'une reformulation de la mécanique de Newton ; elle est aussi construite sur des principes différents et plus généraux. Pour le comprendre nous allons revenir sur le développement de la mécanique.

1.1 Les précurseurs de la dynamique : Kepler, Galilée et Huygens

Dans l'Antiquité, les Grecs voulaient décrire le mouvement des corps célestes avec une approche très théorique, basée sur la recherche de la perfection. Ainsi ils exigeaient que les planètes de déplaassent sur des cercles avec un mouvement circulaire (MCU). Cet a priori resta ancré dans les mentalités jusqu'à la Renaissance. Kepler, qui étudiait soigneusement l'orbite de Mars, jeta cette idée au panier. Il montra au contraire que cette orbite était une ellipse dont le soleil était un des foyers.

Le soleil est donc à une distance c du centre O . Le rapport c/a est ce que l'on appelle *l'excentricité*. Ceci constitue la *première Loi de Kepler* (1603).

Non seulement l'orbite n'est pas un cercle, mais Kepler avait même constaté auparavant (en 1600) que le mouvement n'était *pas uniforme*. Ce mouvement ne se fait pas n'importe comment car Kepler montra qu'il suit la *Loi des Aires* aussi dite *deuxième loi de Kepler*. Le corps en orbite balaie des aires égales en des temps égaux.

Figure 1.2: Illustration de la deuxième loi de Kepler

$$\frac{\mathcal{A}(S12)}{\mathcal{A}(S34)} = \frac{t_{12}}{t_{34}}. \quad (1.3)$$

On peut aussi écrire

$$\dot{\mathcal{A}} = \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \text{vitesse aréolaire} = \text{constante}. \quad (1.4)$$

Notons que qualitativement cela veut dire que le corps va plus vite quand il est plus près du soleil.

Plus tard, en 1618, Kepler, après des années de calculs monstrueux, pour les moyens de l'époque, mit en évidence une relation entre la période T et demi-grand axe a de l'ellipse. Si on a un corps 1 sur une orbite de demi-grand axe a_1 et de période T_1 et un corps 2 sur une orbite de demi-grand axe a_2 et de période T_2 , alors on a :

Figure 1.3: Illustration de la troisième loi de Kepler

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \text{cst}. \quad (1.5)$$

C'est la *troisième Loi de Kepler*. On peut aussi écrire

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{3/2}. \quad (1.6)$$

“Le rapport entre les périodes de deux planètes quelconques est en proportion précisément sesquilatère de celle de leurs distances moyennes” (Lindemann, p.110).

Entre parenthèses, il faut signaler que pour Kepler, les planètes et la Terre tournent autour du Soleil, comme avait dit Copernic en 1543.

Simultanément, en Italie, Galilée s'intéresse lui aussi au mouvement des planètes. Il invente sa lunette et il la pointe vers le Ciel. En 1610, il observe le relief de la Lune, les phases de Vénus, et il découvre quatre satellites qui tournent autour de Jupiter. Décidément, la Terre n'est pas au centre du Monde. Mais Galilée va plus loin, il met complètement en question les fondements de la physique des Grecs. Pour cela, il s'intéresse au mouvement dans le champ de pesanteur, mouvement qu'il étudie avec des expériences (première révolution), expériences qu'il réalise pour en extraire des principes (deuxième révolution). Il étudie notamment les trajectoires dites balistiques (boulets de canon), mais aussi le mouvement sur un plan incliné, et la chute de corps à partir de tours

Figure 1.4: Les expériences de Galilée

ou de mâtes de navires. Il définit précisément le mouvement rectiligne uniforme (MRU) et le mouvement uniformément accéléré (MUA) pour lequel

$$v = u + at, \quad (1.7)$$

où u est la vitesse initiale, v la vitesse au temps t et a l'accélération, et

$$x = \frac{1}{2}at^2 + ut. \quad (1.8)$$

Galilée montre alors que le mouvement balistique se décompose en un MRU horizontal et un MUA vertical et que la trajectoire est une parabole. Galilée montre aussi que la période des petites oscillations du pendule simple ne dépend que de la longueur l ,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1.9)$$

avec g l'accélération de la pesanteur.

Ainsi sont nées les bases de la cinématique, la description du mouvement. Remarquons que ces travaux de Kepler et Galilée n'en disent pas plus sur les causes de ce mouvement. Depuis Aristote, on pensait que le mouvement était dû à des forces, des actions, mais ces notions étaient restées vagues.

Descartes avait imaginé l'exemple de tourbillons, une sorte de fluide suspendu dans l'espace et qui portait les planètes. Il avait aussi constaté qu'au cours d'interactions de contact (chocs), une quantité

$$p = mxv \quad (1.10)$$

était conservée ; c'est la *quantité de mouvement*.

Huygens entre alors en scène. Il a été éduqué dans les cercles cartésiens, mais il va progressivement s'écarter de cette influence.

Comme Galilée, et peut-être plus que lui, il va s'appuyer sur de solides observations. Il construit une lunette qui est de meilleure qualité que celle Galilée et il observe les astres. En 1655, il découvre Titan, satellite de Saturne, et, l'année suivante, les anneaux de Saturne. Il étudie la théorie des chocs de Descartes, en corrige des erreurs et introduit une nouvelle grandeur conservée :

$$\sum mv^2, \quad (1.11)$$

on appellera plus tard cette quantité l'énergie cinétique.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1.12)$$

en ajoutant un facteur $1/2$.

Huygens précise aussi la notion de force. Il s'intéresse en particulier au mouvement de rotation et il donne l'expression de la force centripète :

$$F_c = m \frac{v^2}{r}, \quad (1.13)$$

dirigée vers l'extérieur. Si ω est la vitesse angulaire de rotation (en radian/s)

Figure 1.5: Force centripète

alors :

$$v = r\omega, \quad (1.14)$$

$$F_c = m\omega^2 r. \quad (1.15)$$

On voit ainsi que les choses se mettent progressivement en place. Cependant, c'est avec Newton que la mécanique va faire son développement le plus considérable.

1.2 La mécanique vectorielle de Newton

Newton (1642-1727) est né l'année de la mort de Galilée. En 1686 il publie le *Philosophiæ Naturalis Principia mathematica*, principes mathématiques de la physique. On dit plus simplement les *Principia*, et il s'agit d'un des plus importants ouvrages de l'histoire.

Newton clarifie tout d'abord les notions de force et de mouvement. Contrairement à Aristote et suivant des intuitions de Descartes et de Galilée, il pose que le MRU correspond à l'absence de force imprimée : " Tout corps persévère en son état de repos ou de MRU sauf si des forces imprimées le contraignent d'en changer". C'est la *première loi de Newton* ou *principe d'inertie de Galilée*.

La *deuxième force* stipule comment l'application d'une force F produit un changement de mouvement,

$$ma = F, \quad (1.16)$$

$$\frac{dp}{dt} = F. \quad (1.17)$$

Cette relation s'applique dans un référentiel en MRU, dit référentiel galiléen. Dans un repère (ou référentiel) accéléré, il faut tenir compte en plus des *forces d'inertie*, nous y reviendrons plus tard.

La *troisième loi de Newton* est le *principe d'Action et Réaction*. Ce principe dit que quand on a deux corps A et B en interaction, alors l'action (la force) exercée par A sur B est égale et opposée à celle exercée par B sur A.

Non seulement Newton pose ces trois principes, mais il invente, avec Leibniz, la méthode mathématique qui permet de résoudre les équations du mouvement (1.17) : le *calcul différentiel et intégral*.

Enfin, dans ses principes, Newton interprète le phénomène de la *gravitation* par une *force universelle* proportionnelle à la masse et inversement proportionnelle au carré de la distance. Si on a deux masses m_1 et m_2 séparées par une distance r_{12} alors

$$F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}, \quad (1.18)$$

où F_{21} est l'intensité de la force sur 2 due à 1. Newton démontre explicitement

Figure 1.6: Représentation de la force d'attraction gravitationnelle

les 3 lois de Kepler à partir de cette expression.

La mécanique de Newton est une révolution qui bouleverse complètement la physique. Malgré ses succès spectaculaires, la notion d'action à distance (force de gravitation) mettra du temps à être acceptée. On verra d'ailleurs que cette notion pose effectivement des problèmes théoriques, même encore aujourd'hui après Einstein.

Cette force d'attraction universelle est un exemple de *force centrale*. Un point M subit une force centrale \underline{F} par rapport à un point O (centre) si cette force est alignée avec le vecteur \underline{OM} et si son intensité ne dépend que de la distance OM.

L'oeuvre de Newton sera exportée rapidement dans tout l'Europe et notamment en France par le mathématicien Maupertuis (1698-1759) et diffusée grâce à Voltaire (1694-1778). Cependant, la mécanique continuait de butter sur certains problèmes, en particulier le *problème à trois corps*.

Imaginons en effet trois masses m_1 , m_2 et m_3 en interaction. Chaque point

Figure 1.7: Le problème à trois corps

i subit une force venant des autres points j et k , soit

$$\frac{dp_i}{dt} = F_{ij} + F_{ik}. \quad (1.19)$$

Le principe d'action et réaction nous permet de simplifier un peu car on a

$$F_{ij} = F_{ji}, \quad (1.20)$$

mais cela fait encore beaucoup d'équations à résoudre et on ne savait pas comment faire. C'est embêtant car on avait un problème concret à résoudre : calculer

Figure 1.8: Le retour de la comète de Halley

le retour de la comète de Halley, et pour cela il fallait tenir compte au moins de Jupiter. En faisant des approximations astucieuses, Clairaut prédit le retour de la comète en avril 1759 plus ou moins un mois, et elle arriva en mars 1759. Quel succès pour la mécanique de Newton ! Mais le calcul avait été hasardeux et n'était pas général. Très vite on chercha d'autres méthodes pour traiter le problème à trois corps. Lagrange (1736-1813) puis Laplace (1749-1827) allaient être les grands artisans de cette nouvelle mécanique et son application à la mécanique céleste. Les premières idées cependant avaient été proposées avant eux.

1.3 La naissance de la mécanique scalaire

Leibniz (1646-1716), rival de Newton dans la création du calcul infinitésimal, avait défini *l'énergie cinétique* d'un mobile comme

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2), \quad (1.21)$$

où v_x , v_y et v_z sont les coordonnées de la vitesse dans un repère cartésien. Leibniz reliait la variation de cette énergie cinétique au travail des forces défini par

$$dW = Fdx. \quad (1.22)$$

Ainsi

$$dE_k = dW = Fdx, \quad (1.23)$$

soit

$$\begin{aligned} d\left[\frac{1}{2}mv^2\right] &= Fdx, \\ mvdv &= Fdx, \end{aligned}$$

mais $dx = vdt$, et donc

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

soit $ma = F$ avec $a = dv/dt$. Cette formulation est donc équivalente à la deuxième loi de Newton.

Regardons cependant le cas où F peut s'écrire comme la dérivée d'une fonction E_p . Cela signifie que les composantes de la force sur les trois axes s'écrivent

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} F_y &= -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \\ F_z &= -\frac{\partial E_p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ici E_p est une fonction de plusieurs variables : x , y et z , et on utilise les symboles ronds (dérivées partielles). On écrit aussi de façon plus synthétique

$$F = -\text{grad}E_p, \quad (1.25)$$

mais cela veut dire la même chose. E_p est appelée *énergie potentielle*, et on dit que F dérive de E_p .

Le travail élémentaire de cette force dW le long d'un déplacement élémentaire dr de coordonnées dx , dy , dz s'écrit :

$$\begin{aligned} dW &= F \cdot dr, \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz, \\ &= -\frac{\partial E_p}{\partial x} dx - \frac{\partial E_p}{\partial y} dy - \frac{\partial E_p}{\partial z} dz, \\ &= -dE_p. \end{aligned}$$

On dit alors que dE_p est une différentielle totale et on a

$$\begin{aligned} dE_k &= -dE_p, \\ d[E_k + E_p] &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

La quantité $E_p + E_k = E$ est donc conservée pendant le mouvement. C'est ce que l'on appelle l'énergie totale.

Prenons un exemple : considérons une masse m suspendue à un fil de longueur l qui oscille dans plan vertical ; un pendule. Soit θ l'angle avec la

Figure 1.9: Pendule

verticale. On a

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, \\ E_p &= mgl(1 - \cos\theta). \end{aligned} \quad (1.27)$$

On a donc

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) = \text{cst} = E_0,$$

soit

$$E_0 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) = mgl(1 - \cos\theta_0), \quad (1.28)$$

1.4. LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION ET LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE 11

avec θ_0 l'élongation maximale.

Dans cette approche de la mécanique, on travaille avec des quantités scalaires : E_k , E_p , E . Il se trouve que cette approche est très avantageuse pour des problèmes de mécanique céleste. En effet, la force de gravitation dérive d'un potentiel. Pour deux corps on a

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}}, \quad (1.29)$$

et pour trois corps

$$E_p = -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right). \quad (1.30)$$

On a tout mis dans une seule fonction E_p ! C'est plus simple que des ribambelles de vecteurs. Mais la réflexion ne s'arrête pas là. Maupertuis proposa de déduire les quantités vectorielles comme p de quantités scalaires et de montrer que la Deuxième Loi de Newton pouvait être déduite d'un principe plus général, le *principe de moindre action*.

1.4 Le principe de moindre action et les équations de Lagrange

Maupertuis postule l'existence d'une fonction \mathcal{A} qu'il appelle l'action et qui serait minimale pour la trajectoire réelle.

Figure 1.10: Trajectoire d'un mobile

Par exemple, si on a un mobile qui se balade entre deux points A et B, alors on peut trouver la trajectoire $x(t)$ à partir de la connaissance de F en tout point et à chaque instant et à partir de la deuxième loi de Newton

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

Le nouveau principe, qu'Hamilton (1805-1865) appellera plus tard principe de moindre action, dit que l'on peut trouver la trajectoire autrement : en cherchant la fonction $x(t)$ qui minimise la quantité

$$\mathcal{A} = \int_A^B L dt, \quad (1.31)$$

où $L = E_k - E_p$ est le *Lagrangien* défini par Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Cela veut dire que si on imagine une trajectoire différente (appelons la une *trajectoire virtuelle*) alors sur cette trajectoire', $\mathcal{A}' > \mathcal{A}$.

A priori, pour trouver la vraie trajectoire, il faut chercher parmi toutes les trajectoires virtuelles celle qui minimise \mathcal{A} . Il n'est pas évident qu'on ait ainsi simplifié le problème... Pourtant, Lagrange montra l'intérêt considérable de cette façon de procéder. Ce mathématicien était connu pour sa grande modestie et pourtant c'est bien le plus fameux des mathématiciens du dix huitième siècle. Il contribua à de nombreux domaines des mathématiques. En mécanique, il montra que les équations du mouvement peuvent être déduites à partir du principe que l'intégrale \mathcal{A} est stationnaire,

$$d\mathcal{A} = 0, \quad (1.32)$$

qui équivaut à

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Pour un point matériel :

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - E_p,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} = mv, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial E_p}{\partial x} = F. \end{aligned}$$

On a donc $d(mv)/dt=F$, soit $dp/dt=F$. On retrouve effectivement la deuxième loi de Newton.

Cette formulation est donc équivalente à celle de Newton, mais en pratique elle est considérablement avantageuse. Si notre système est décrit par un ensemble de variables indépendantes q_i , on aura toujours

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (1.33)$$

On appelle ces équations les équations de Euler-Lagrange ; elles sont complètement indépendantes du choix des variables. Il suffit de connaître l'expression de L en fonction de q_i et \dot{q}_i . Nous verrons de nombreux exemples dans les exercices mais regardons le cas du pendule simple. On a vu

$$E_k = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2,$$

et

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta).$$

donc

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta).$$

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2 \dot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl \sin \theta,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) &= -mgl \sin \theta, \\ ml^2 \ddot{\theta} &= -mgl \sin \theta,\end{aligned}$$

soit

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (1.34)$$

Dans le cas de petites oscillations, on a

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta, \quad (1.35)$$

et on retrouve la période du pendule simple :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.36)$$

Ainsi est née la mécanique analytique, en quête d'élégance et de simplicité. En outre, un nouveau principe fondamental était apparu. Ce "principe de moindre action" devait donner lieu à de nombreuses divagations philosophiques. Maupertuis y voyait par exemple une présence divine. Lagrange refusait ce genre de dérive hors sujet. Par contre, ce qui est sûr, c'est que cette histoire de moindre action évoque le *principe de moindre temps* de Fermat. De quoi s'agit-il ?

1.5 Le principe de Fermat et les principes variationnels

En 1657, Fermat s'est interrogé sur l'origine des lois de la réfraction $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ (Snell-Descartes). Il montra que cette relation pouvait être déduite d'un principe de moindre temps. Bien plus tôt, Heron (celui du théorème sur l'aire d'un triangle) avait remarqué que la trajectoire d'un rayon réfléchi correspondait au plus court chemin. Regardons ce qui se passe dans le cas de la réfraction.

Figure 1.11: Trajet réfléchi

Considérons un point J distinct de I d'une petite distance δl et imaginons un

Figure 1.12: Trajet réfracté

rayon lumineux virtuel qui va de A à B en passant par J plutôt que par I. Soit la H la projection de I sur le rayon virtuel et K la projection de J sur le trajet réel. On a

$$\begin{aligned} HJ &= IJ \sin \theta_1 = \delta l \sin \theta_1, \\ IK &= IJ \sin \theta_2 = \delta l \sin \theta_2. \end{aligned}$$

Quelle est la différence de temps de parcours δt entre le rayon lumineux et le rayon virtuel ? Au premier ordre :

$$\delta t \approx \frac{HJ}{v_1} - \frac{IK}{v_2},$$

soit

$$\delta t \sim \delta l \left[\frac{\sin \theta_1}{c/n_1} - \frac{\sin \theta_2}{c/n_2} \right] \sim \frac{\delta l}{c} [n_1 \sin \theta_1 - n_2 \sin \theta_2].$$

Si le temps de parcours pour le vrai rayon est minimal, alors $\delta t = 0$, d'où

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Le principe de moindre action est analogue au principe de moindre temps de Fermat. Lagrange classa ces problèmes dans une seule famille, les *problèmes variationnels*, qu'on analyse avec le *calcul variationnel*. En mécanique, la trajectoire imaginaire est ce que l'on appelle une *variation* et le point J dans le cas de Fermat est aussi une variation.

D'une façon générale, si on a une intégrale I

$$I = \int_A^B F(y, \dot{y}, x) dx$$

où F est une fonction de x et d'une trajectoire $y(x)$ et de sa dérivée, et qu'on recherche les minima et maxima de I , alors le principe variationnel dit que

$$\delta I = 0$$

si on change la trajectoire $y(x)$ de toute quantité $\delta y(x)$. On dit que I est stationnaire et ce qui est remarquable est que l'on peut contraindre la trajectoire à partir de cette condition.