Deux échantillons de taille 11 et 15 sont tirés de deux populations normales de variance 40 et 60. Si les variances des échantillons sont respectivement 90 et 50, déterminer si la variance du premier échantillon est significativement plus grande que la variance du second au risques de 5% et de 1%.

Pour les échantillons 1 et 2, nous avons $N_1 = 11$, $N_2 = 15$, $\sigma_1^2 = 40$, $\sigma_2^2 = 60$, $s_1^2 = 90$, $s_2^2 = 50$. Donc

$$F = \frac{\dfrac{N_1 s_1^2}{(N_1-1)\sigma_1^2}}{\dfrac{N_2 s_2^2}{(N_2-1)\sigma_2^2}} = 2.772$$

.

Les degrés de liberté du numérateur et du dénominateur de F sont $\nu_1 = N_1 - 1 = 10$ et $\nu_2 = N_2 - 1 = 14$. Dans le tabeau, nous pouvons lire que $F_{0.95} = 2.6$ et $F_{0.99} = 3.94$.
→ Comme le F calculé est supérieur à $F_{0.95}$, nous concluons que la variance de l'échantillon 1 est significativement supérieure à la variance de de léchantillon 2.
→ Comme le F calculé est inférieur à $F_{0.99}$, nous ne pouvons pas conclure que la variance de l'échantillon 1 est plus grande que la variance de l'échantillon 2 au risque de 1%.

Attention, l'écart type a volontairement été pris égal à 0.008 g.

Une machine outil produit des boulons de poids moyen $\mu = 0.574\ g$ et d'écart type $\sigma = 0.008\ g$ à la fréquence de 1 boulons par seconde. Toutes les minutes, 10% des boulons sont prélevés pour vérifier le bon fonctionnement de la machine. En prenant 1% de risque, établir l'hypothèse principale H_0. Quelles sont les hypothèse alternatives? En considérant que seule la masse moyenne des boulons peut varier si la machine outil commence à mal fonctionner, faire la courbe de puissance de test.

Objectif :
En prélevant toutes les minutes 10% des boulons produits par une machine outil, nous cherchons à définir un protocole expérimental nous permettant de vérifier le bon fonctionnement de cette machine.

Le protocole :
Nous allons peser les boulons prélevés et estimer leur poids moyens $\mu_{\bar{x}}$. Si ce

poids moyen est compris entre une borne inférieure m^{inf} et une borne supérieure m^{sup} nous conclurons que la machine est en bon état de marche.

Les hypothèses :
H_0 : la machine marche si
$$m^{inf} < \mu_{\bar{x}} < m^{sup}.$$

H_1 : la machine ne marche pas si
$$m^{inf} > \mu_{\bar{x}} \qquad \text{ou} \qquad m^{sup} < \mu_{\bar{x}}.$$

Les erreurs commises :
Type α : une machine qui fonctionne bien et qui dans $\alpha\%$ des cas produit 6 boulons dont la masse moyenne est en dehors de l'intervalle $[m^{inf}; m^{sup}]$.
Type β : une machine qui fonctionne mal et qui produit 6 boulons dont la masse moyenne est comprise dans l'intervalle $[m^{inf}; m^{sup}]$.
Caractéristiques de notre échantillonnage :

- Ce sont des échantillons de petite taille
$$n = 6 \; boulons.$$
- Ils sont issues d'une population infinie dans la mesure où le résultat d'un tirage n'affecte pas le résultat des tirages à venir.

$\Rightarrow$ Il faut donc utiliser la théorie des tests exacts pour étudier les distributions d'échantillonnage des statistiques.
$\Rightarrow$ Pour la distributions d'échantillonnage du poids moyen de ces boulons, il faut donc utiliser la distribution de Student T avec
$$n_{dl} = n - 1 = 5$$
degrés de libertés (voir Tab. 1).

Propriétés de la loi d'échantillonnage de la moyenne :
$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 0.574 \; g \qquad \text{et} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} = \frac{0.008}{\sqrt{5}} \; g$$

Intervalles de confiance de la moyenne pour une erreur α de 1%:
Nous avons
$$t = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}}.$$

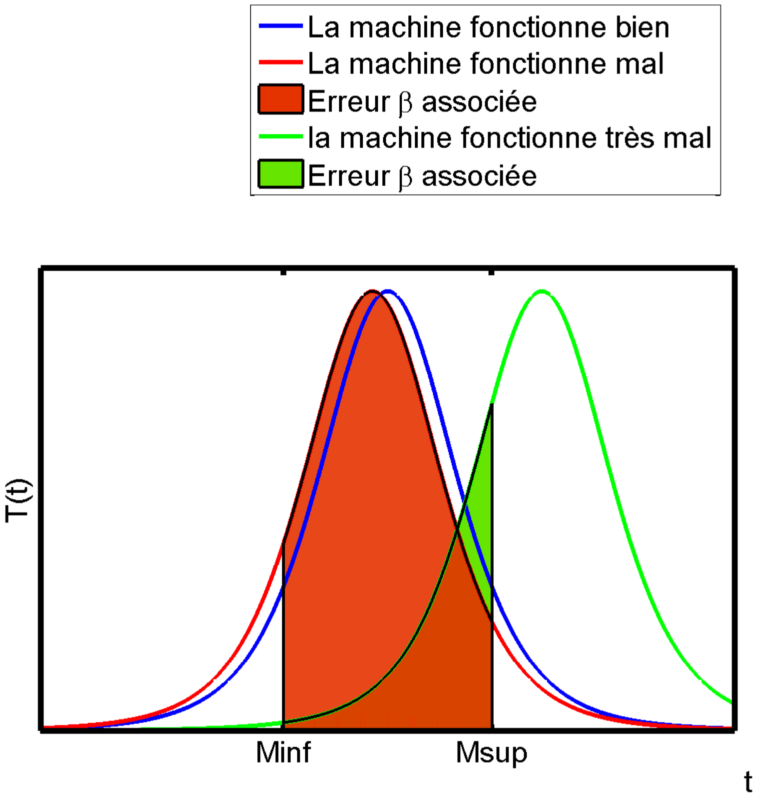


Figure 1: Les erreurs β pour une valeur de $\mu^d > \mu$ (rouge) et une valeur de $\mu^d > \mu$ (vert). Noter que l'erreur α correspond à l'intégrale de la courbe bleue en dehors de l'intervalle $[m^{inf}; m^{sup}]$.

Donc, en prenant la valeur $t_{0.99}$ pour $n_{dl} = 5$, nous pouvons conclure que 99% des échantillons seront composés de boulons ayant un poids moyen compris entre

$$m^{inf} < \bar{X} < m^{sup},$$

avec

$$m^{inf} = \mu - t_{0.99}\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} = 0.55957\ g \qquad \text{et} \qquad m^{sup} = \mu + t_{0.99}\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} = 0.58843.\ g$$

L'erreur β

Une machine ne fonctionnant plus correctement $\mu = \mu^d \neq 0.574\ g$ peut produire des échantillons de 6 boulons dont le poids moyen est compris dans l'intervalle

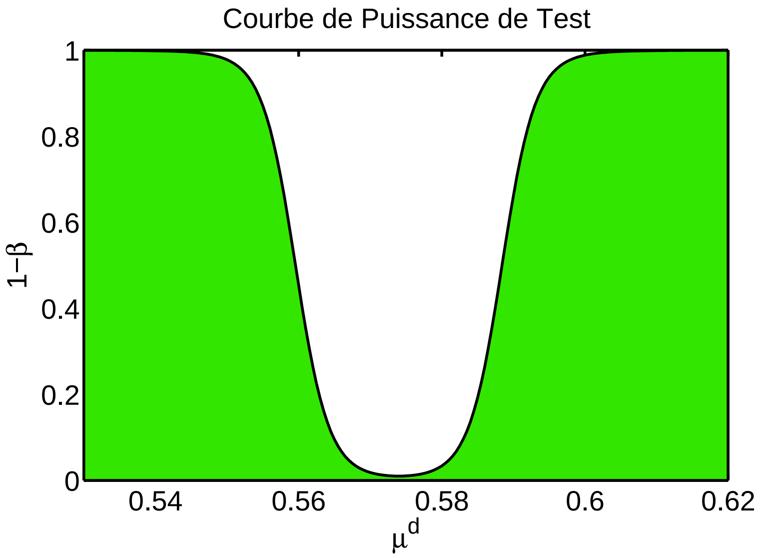


Figure 2: La courbe de puissance de test pour une erreur α de 1%.

$[m^{inf}; m^{sup}]$. Il s'agit alors de calculer

$$t^{inf} = \frac{m^{inf} - \mu^d}{\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}} \qquad \text{et} \qquad t^{sup} = \frac{m^{sup} - \mu^d}{\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}}$$

afin d'évaluer le pourcentage de la population compris dans l'intervalle $[t^{inf}; t^{sup}]$ (voir la Tab. 1). Cette densité de population correspond à l'erreur β. Cette erreur dépend bien entendu de μ^d et il faut alors calculer

$$\beta(\mu^d),$$

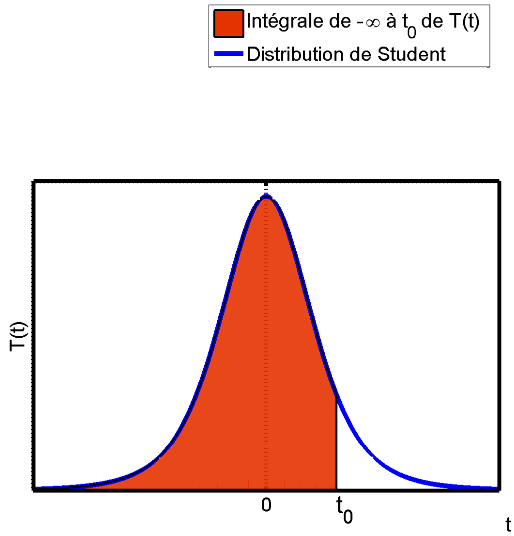
c'est à dire les pourcentages de la population compris dans les intervalles $[t^{inf}(\mu^d); t^{sup}(\mu^d)]$. La Fig. 1 montre graphiquement l'amplitude de ces erreurs pour $\mu^d < \mu$ et $\mu^d > \mu$. Notez que plus la valeur de μ^d est proche de celle de μ, plus l'erreur β augmente. Par définition nous avons $\beta = 1 - \alpha$ à $\mu^d = \mu$.

La courbe de puissance de test indique la qualité du protocole qui a été mis en place et correspond donc pour une erreur α donnée à

$$1 - \beta(\mu^d).$$

Cette fonction est visible sur la Fig. 2.

Loi de Student
$n_{dl} = 5$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.50000	0.50380	0.50759	0.51139	0.51518	0.51897	0.52276	0.52655	0.53033	0.53411
0.10	0.53788	0.54166	0.54542	0.54918	0.55294	0.55669	0.56043	0.56416	0.56789	0.57161
0.20	0.57532	0.57902	0.58271	0.58640	0.59007	0.59373	0.59738	0.60103	0.60465	0.60827
0.30	0.61188	0.61547	0.61905	0.62261	0.62616	0.62970	0.63322	0.63673	0.64022	0.64370
0.40	0.64716	0.65061	0.65404	0.65745	0.66085	0.66423	0.66759	0.67093	0.67426	0.67756
0.50	0.68085	0.68412	0.68737	0.69060	0.69382	0.69701	0.70018	0.70333	0.70647	0.70958
0.60	0.71267	0.71574	0.71879	0.72182	0.72483	0.72782	0.73078	0.73372	0.73665	0.73955
0.70	0.74243	0.74528	0.74812	0.75093	0.75372	0.75649	0.75923	0.76196	0.76466	0.76734
0.80	0.76999	0.77263	0.77524	0.77783	0.78039	0.78294	0.78546	0.78795	0.79043	0.79288
0.90	0.79531	0.79772	0.80011	0.80247	0.80481	0.80713	0.80943	0.81170	0.81395	0.81618
1.00	0.81839	0.82058	0.82274	0.82488	0.82700	0.82910	0.83118	0.83324	0.83527	0.83728
1.10	0.83927	0.84125	0.84320	0.84512	0.84703	0.84892	0.85079	0.85263	0.85446	0.85627
1.20	0.85805	0.85982	0.86157	0.86330	0.86500	0.86669	0.86836	0.87001	0.87164	0.87326
1.30	0.87485	0.87643	0.87798	0.87952	0.88104	0.88255	0.88403	0.88550	0.88695	0.88838
1.40	0.88980	0.89120	0.89258	0.89394	0.89529	0.89663	0.89794	0.89924	0.90053	0.90180
1.50	0.90305	0.90429	0.90551	0.90671	0.90791	0.90908	0.91025	0.91139	0.91253	0.91365
1.60	0.91475	0.91584	0.91692	0.91798	0.91904	0.92007	0.92110	0.92211	0.92310	0.92409
1.70	0.92506	0.92602	0.92697	0.92790	0.92883	0.92974	0.93064	0.93153	0.93240	0.93327
1.80	0.93412	0.93496	0.93580	0.93662	0.93743	0.93823	0.93901	0.93979	0.94056	0.94132
1.90	0.94207	0.94281	0.94354	0.94425	0.94496	0.94566	0.94636	0.94704	0.94771	0.94837
2.00	0.94903	0.94968	0.95031	0.95094	0.95157	0.95218	0.95278	0.95338	0.95397	0.95455
2.10	0.95512	0.95569	0.95625	0.95680	0.95734	0.95788	0.95841	0.95893	0.95944	0.95995
2.20	0.96045	0.96095	0.96144	0.96192	0.96239	0.96286	0.96332	0.96378	0.96423	0.96468
2.30	0.96511	0.96555	0.96597	0.96639	0.96681	0.96722	0.96762	0.96802	0.96842	0.96881
2.40	0.96919	0.96957	0.96994	0.97031	0.97067	0.97103	0.97139	0.97173	0.97208	0.97242
2.50	0.97275	0.97309	0.97341	0.97374	0.97405	0.97437	0.97468	0.97498	0.97528	0.97558
2.60	0.97588	0.97617	0.97645	0.97673	0.97701	0.97729	0.97756	0.97783	0.97809	0.97835
2.70	0.97861	0.97886	0.97911	0.97936	0.97960	0.97984	0.98008	0.98032	0.98055	0.98078
2.80	0.98100	0.98123	0.98145	0.98166	0.98188	0.98209	0.98230	0.98250	0.98271	0.98291
2.90	0.98310	0.98330	0.98349	0.98368	0.98387	0.98406	0.98424	0.98442	0.98460	0.98478
3.00	0.98495	0.98512	0.98529	0.98546	0.98562	0.98579	0.98595	0.98611	0.98627	0.98642
3.10	0.98657	0.98672	0.98687	0.98702	0.98717	0.98731	0.98745	0.98759	0.98773	0.98787
3.20	0.98800	0.98814	0.98827	0.98840	0.98853	0.98865	0.98878	0.98890	0.98902	0.98914
3.30	0.98926	0.98938	0.98950	0.98961	0.98972	0.98984	0.98995	0.99006	0.99016	0.99027
3.40	0.99037	0.99048	0.99058	0.99068	0.99078	0.99088	0.99098	0.99108	0.99117	0.99126
3.50	0.99136	0.99145	0.99154	0.99163	0.99172	0.99181	0.99189	0.99198	0.99206	0.99215
3.60	0.99223	0.99231	0.99239	0.99247	0.99255	0.99263	0.99270	0.99278	0.99285	0.99293
3.70	0.99300	0.99307	0.99314	0.99321	0.99328	0.99335	0.99342	0.99349	0.99356	0.99362
3.80	0.99369	0.99375	0.99381	0.99388	0.99394	0.99400	0.99406	0.99412	0.99418	0.99424
3.90	0.99430	0.99435	0.99441	0.99446	0.99452	0.99457	0.99463	0.99468	0.99473	0.99479
4.00	0.99484	0.99489	0.99494	0.99499	0.99504	0.99509	0.99514	0.99518	0.99523	0.99528
4.10	0.99532	0.99537	0.99541	0.99546	0.99550	0.99554	0.99559	0.99563	0.99567	0.99571
4.20	0.99576	0.99580	0.99584	0.99588	0.99592	0.99595	0.99599	0.99603	0.99607	0.99611
4.30	0.99614	0.99618	0.99621	0.99625	0.99629	0.99632	0.99635	0.99639	0.99642	0.99646
4.40	0.99649	0.99652	0.99655	0.99659	0.99662	0.99665	0.99668	0.99671	0.99674	0.99677
4.50	0.99680	0.99683	0.99686	0.99689	0.99692	0.99694	0.99697	0.99700	0.99703	0.99705
4.60	0.99708	0.99711	0.99713	0.99716	0.99718	0.99721	0.99723	0.99726	0.99728	0.99731
4.70	0.99733	0.99736	0.99738	0.99740	0.99742	0.99745	0.99747	0.99749	0.99751	0.99754
4.80	0.99756	0.99758	0.99760	0.99762	0.99764	0.99766	0.99768	0.99770	0.99772	0.99774
4.90	0.99776	0.99778	0.99780	0.99782	0.99784	0.99786	0.99788	0.99789	0.99791	0.99793
5.00	0.99795	0.99797	0.99798	0.99800	0.99802	0.99803	0.99805	0.99807	0.99808	0.99810

Table 1: Table de Student pour $n_{dl} = 5$.