# Remise à niveau en mathématiques

**Devoir à rendre à la scolarité (G. Pernat) au plus tard le 12 Octobre 2007**

Chaque question a le même poids.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en $x$ de $xe^{x+1}$

2. Calculer le rotationnel et la divergence du gradient du potentiel scalaire suivant: $\phi = 3x^2 - 2y^4 + 3z^2$.

3. Soit la fonction: $f(r, \theta, \varphi) = r^2[3\cos^2\theta - 1]$. Calculer en coordonnées sphériques $\vec{\nabla} f$, $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$

4. Trouver les racines du polynome $x^3 + x^2 + x + 1$.

5. Soit un ellispoide de révolution, de demi-grand axe $a$ et de demi petit-axe $c$. Sa surface est décrite , en cartésiennes, par l'équation:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
On note $\frac{a-c}{a} = \alpha$ l'aplatissement de l'ellipsoide. Ecrire cette surface en utilisant les coordonnées sphériques. On exprimera le rayon $r$ comme une fonction de $\theta$, $\varphi$, en supposant $\alpha << 1$ (on fera un développement limité au premier ordre en $\alpha$).

6. Calculer la distance à la surface de la sphère terrestre entre Paris (colatitude $41.16^o$, longitude $2.34^o E$) et New York (colatitude $49^o$, longitude $72^o W$).

7. En utilisant les notations indicielles, montrer que
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$
*Rappel: le laplacien d'un vecteur $\vec{A}$ est un vecteur dont la ieme composante est le laplacien de la composante $A_i$.*

8. Résoudre l'équation differentielle $x'' + 16x = 0$.
Quel type de système physique cette équation décrit-elle ?
Déterminer la pulsation propre correspondante.

9. Soit la fonction créneau $2\pi$ periodique :
$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si} \quad (2k - \frac{1}{2})\pi < t < (2k + \frac{1}{2})\pi \\ \\ -\frac{\pi}{4} & \text{si} \quad (2k + \frac{1}{2})\pi < t < (2k + \frac{3}{2})\pi \end{cases}$$
avec $k$ entier. Calculer les coefficients $a_n^m$ et $b_n^m$ de la décomposition en série de Fourier de $f(t)$.

# Correction devoir mathématiques 2007

**Exercice 1.** $f(x) = x\,e^{x+1}$

Développement limité à l'ordre 3 de $f(x)$ au voisinage de 0.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{3} + \varepsilon(x^4)$$

$$\begin{cases} f'(x) = (1+x)\,e^{x+1} \\ f''(x) = (2+x)\,e^{x+1} \\ f'''(x) = (3+x)\,e^{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = e \\ f''(0) = 2e \\ f'''(0) = 3e \end{cases}$$

d'où $f(x) = e\left[x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right]$

**Exercice 2** $\phi = 3x^2 - 2y^4 + 3z^2$

- Calcul du gradient : $\vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} 6x \\ -8y^3 \\ 6z \end{pmatrix}$

- Calcul de $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\phi)$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 6x \\ -8y^3 \\ 6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le rotationnel d'un gradient est toujours nul.

- Calcul de $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$ :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial}{\partial x}(6x) + \frac{\partial}{\partial y}(-8y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(6z)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = 12(1 - 2y^2)$$

Exercice 3 $\quad f(r,\theta,\varphi) = r^2(3\cos^2\theta - 1)$.

En coordonnées sphériques : $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} f \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} f \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} f \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2r(3\cos^2\theta - 1) \\ -6r\cos\theta\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

· En coordonnées sphériques $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla} f$ :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(0) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(-6r\cos\theta\sin\theta)\right]\frac{1}{r\sin\theta} \\ \left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(2r(3\cos^2\theta-1)) - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r\times 0)\right]\frac{1}{r\sin\theta} \\ \left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot(-6r\cos\theta\sin\theta)) - \frac{\partial}{\partial\theta}(2r(3\cos^2\theta-1))\right]\times\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

le rotationnel d'un gradient est nul.

· Laplacien de $f$ en coordonnées sphériques.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot 2r(3\cos^2\theta-1))\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta(-6r\sin\theta\cos\theta$$

$$= (3\cos^2\theta - 1)\times 6 + \frac{6}{\sin\theta}(\sin^3\theta - \cos\theta\, 2\sin\theta\cos\theta)$$

$$= 6\left[3\cos^2\theta - 1 + \sin^2\theta - 2\cos^2\theta\right]$$

$$= 6\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1\right]$$

$$= 0$$

$f$ est une harmonique sphérique (zonale de degré 2).

Exercice 4 $\quad P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

$x = -1$ est une racine évidente.

On factorise $\Rightarrow \quad P(x) = (x+1)(x^2+1)$

$x^2+1 = 0 \Rightarrow (x+i)(x-i) = 0$

Les racines sont donc : $-1 ; -i ; +i$

## Exercice 5. Ellipsoïde de révolution.

En coordonnées cartésiennes, la surface d'un ellipsoïde de révolution de demi-grand axe $a$ et de demi-petit axe $c$ est décrite par l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (*)$$

En coordonnées sphériques : $\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$

(*) s'écrit alors :

$$\frac{r^2}{a^2}\left(\sin^2\theta + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\theta\right) = 1.$$

ou encore $\boxed{r = a \Big/ \sqrt{\sin^2\theta + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\theta}}$

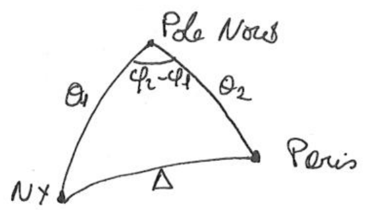
le rayon d'un ellipsoïde de révolution ne dépend pas de la longitude.

Soit $\alpha$ l'aplatissement : $\alpha = \frac{a-c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 - \alpha$

$\Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ avec $\alpha \ll 1$ ; $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\alpha$

$$\Rightarrow r = \frac{a(1-\alpha)}{\sqrt{(1-\alpha)^2\sin^2\theta + \cos^2\theta}} \simeq a(1 - \alpha\cos^2\theta)$$

## Exercice 6 distance sur la sphère.




NY : colatitude $\theta_1$
longitude $\varphi_1$

Paris : colatitude $\theta_2$
longitude $\varphi_2$

Formule de Gauss

$$\cos\Delta = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

on trouve $\Delta = 51°$

$\Rightarrow$ la distance entre New York et Paris est

$$d = \frac{\Delta}{180} \times \pi \times 6371 = 5671 \text{ km}.$$

où $R = 6371$ km est le rayon de la Terre sphérique.

**Exercice 7 :** Calcul indiciel.

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\Big]_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\varepsilon_{klm}\,\partial_l A_m$$

$$= \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm}\,\partial_j\partial_l A_m$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\,\partial_j\partial_l A_m$$

$$= \partial_i\partial_j A_j - \partial_j\partial_j A_i$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A}.$$

**Exercice 8** Equation différentielle $\ddot{x} + 16x = 0$

L'équation caractéristique s'écrit : $-\omega^2 + 16 = 0$

elle admet deux racines $\omega = \pm 4i$

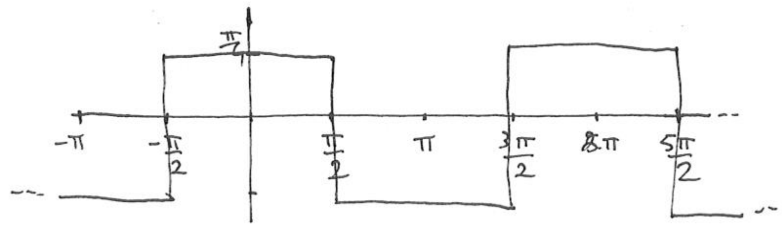
La solution de l'équation différentielle est donc de la forme : $x(t) = C_1 e^{-4it} + C_2 e^{4it}$

ou encore $x(t) = A_1 \cos 4t + B_1 \sin 4t$

les constantes réelles $A_1$ et $B_1$ sont déterminées par les conditions initiales sur $x$ et $\dot{x}$.

**Exercice 9,** Décomposition en série de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } (2k-\frac{1}{2})\pi < t < (2k+\frac{1}{2})\pi \\ -\pi/4 & \text{si } (2k+\frac{1}{2})\pi < t < (2k+\frac{3}{2})\pi \end{cases}$$




C'est la fonction créneau qui est $2\pi$ périodique.
La décomposition de cette fonction en série de Fourier s'écrit :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos 2n\frac{\pi t}{T} + b_n \sin 2n\frac{\pi t}{T}\right)$$

avec $T = 2\pi$.

$f(t)$ est paire : $f(-t) = f(t) \Rightarrow$ les coefficients $b_n$ seront nuls.

$$\Rightarrow f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

Calculons les coefficients $a_0$ et $a_n$ :

- $$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\pi}{4}\,dt - \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\pi}{4}\,dt\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{8}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$a_0 = 0$$

- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(t) \cos nt \, dt$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \cos nt \, dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(t) \cos nt \, dt \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nt \, dt - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos nt \, dt \right]$$

$$= \frac{1}{4n} \left[ \left[ \sin tn \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \left[ \sin nt \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \right]$$

$$= \frac{1}{4n} \left[ \sin n\frac{\pi}{2} + \sin n\frac{\pi}{2} - \sin n\frac{3\pi}{2} + \sin n\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\sin n\frac{3\pi}{2} = \sin\left(n\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= - \sin n\pi/2$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{n} \sin n\frac{\pi}{2}$$

$\begin{cases} \text{si } n \text{ est pair, } a_n = 0. \\ \text{si } n \text{ est impair, on pose alors } n = 2k+1 \text{ et } a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k}{2k+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(2k+1)t$$

au premier ordre : $f(t) = \cos t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{5}\cos 5t \ldots$