**Licence Sciences et Applications - Mention STEP**

*Geosciences 3 : « L'homme et la planète »*

## <u>**Devoir** : Modélisation des éruptions volcaniques explosives :</u>

On s'intéresse dans ce devoir à la quantification des phénomènes éruptifs explosifs, qui correspondent aux volcans dits andésitiques, et dont une description générale est donnée sur :
*http://www.ipgp.jussieu.fr/francais/rub-terre/acc-surface.html.*

L'aspect qui nous intéresse ici est qu'une éruption volcanique explosive peut évoluer soit en une colonne plinienne, peu dangereuse pour la population, un peu plus pour les avions, et qui peut surtout avoir des conséquences sur le climat, soit en une coulée pyroclastique, avalanche de débris volcaniques incandescents, très destructrice et souvent mortelle.

Pour comprendre la transition entre ces deux régimes éruptifs, et espérer à terme la prédire, il faut utiliser des notions de dynamique des fluides que nous allons introduire dans ce devoir.

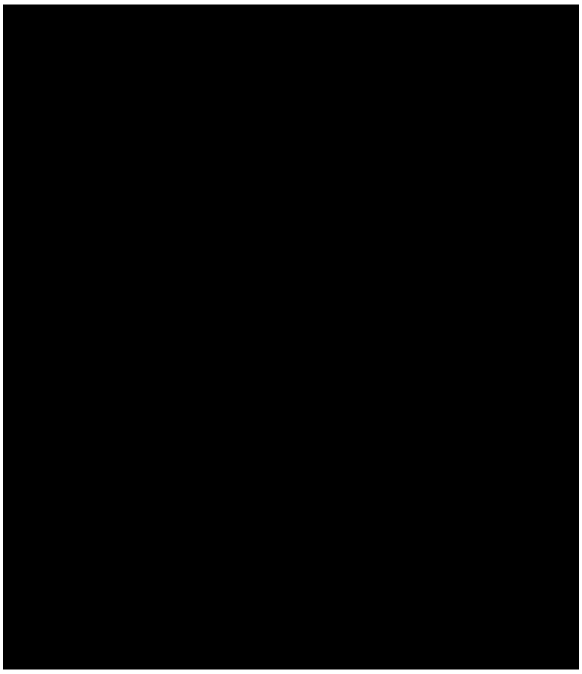

FIGURE 1 : jet turbulent

Nous nous intéressons ici à la dynamique ce que l'on appelle un jet turbulent, donc un exemple généré dans de l'eau en laboratoire est donné sur la figure 1. On voit sur cette figure que le rayon du jet augmente avec la distance à la source : c'est le phénomène d'entraînement turbulent, du fluide extérieur vers l'intérieur du jet, par les tourbillons à sa périphérie. Ce phénomène est à la base de la modélisation physique des jets turbulents, dont les jets volcaniques.

*A/. Description physique du phénomène :*

Avant de nous lancer dans les équations, nous allons décrire les grandes lignes de la physique du phénomène à partir de quelques questions préliminaires qui vont poser les jalons du modèle complet

**1/.** Le jet volcanique est formé de gaz chaud et de fragments de lave. Il est donc plus lourd que l'air ambiant à la sortie du conduit éruptif, et sa vitesse initiale décroît dans un premier temps. Si sa vitesse change c'est que des forces s'exercent sur le fluide (la mixture gaz + fragments de lave). La plus évidente des forces est le poids du fluide (force résistante) ; la seconde est la poussée d'Archimède exercée par l'air ambiant sur le jet (force motrice).

La force nette qui s'exerce sur le jet dépend de la différence de densité (ou plutôt masse volumique en kg $m^{-3}$) $\Delta\rho$ entre la mixture volcanique (densité $\rho$) et l'air ambiant (densité $\rho_a$) ; on l'appelle force de flottabilité. Pour la quantifier il faut connaître l'équation d'état du mélange entre les fragments volcaniques et l'air ambiant en fonction de x la fraction de fragments dans le mélange (x entre 0 et 1, sans dimension ; 1-x correspond à la fraction d'air dans le jet). La différence de densité $\Delta\rho$ le jet et l'air ambiant n'est pas qu'une simple fonction linéaire de x car deux effets jouent : d'une part plus la quantité d'air est importante plus le mélange est léger, mais d'autre part plus il y a de fragments plus le mélange est chaud et donc léger. Le résultat de ces deux effets est au premier ordre une dépendance quadratique en x. Si $\rho_s$ est la densité des fragments de magma, proposez une expression pour $\Delta\rho/(\rho_s-\rho_a)$ en fonction de x sachant que $x_m=1/3$ est la fraction de fragments pour laquelle la densité est minimum. Réécrivez cette relation en faisant apparaître un terme $(1-x/x_m)^2$.

**2/.** Si le rayon du jet augmente en fonction de la distance à la source, c'est qu'il incorpore de l'air ambiant. Cet entraînement a lieu par les tourbillons à la périphérie du jet. On note $F_i$ le flux de volume par unité de surface (en m $s^{-1}$) incorporé par les bords du jet. À l'aide d'une analyse aux dimensions, donnez l'expression du flux $F_i$ en fonction de U la vitesse verticale du jet, R son rayon et $\Delta\rho$ l'anomalie de densité du jet. On notera $\alpha$ la constante de proportionnalité qui apparaît ($\alpha\approx0.1$).

***B/.** Équations de conservation :*

L'écoulements des fluides est régi par trois équations de conservation. La conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont les deux que nous allons utiliser ici. Quelle serait la troisième à utiliser pour un modèle complet ?

**1/.** Conservation de la masse :

Comme les différences de densité sont faibles dans le cas des jets volcanique, on va s'intéresser ici uniquement à la conservation du volume. Pour écrire la conservation du volume, on s'intéresse à un petit volume du jet, dit « de contrôle », entre les distances z et z+dz de la source, représenté figure 2.

Pour écrire la conservation du volume, on réalise un bilan des flux. Sachant que la vitesse verticale du jet est U(z) et que son rayon est R(z) en z, quel est le flux de volume (ou débit) entrant (c'est à dire le volume qui transite par le jet, en $m^3\ s^{-1}$) en z en fonction de U(z) et R(z) si le jet est <u>conique</u> (donc sa section est un disque). Même question pour le flux sortant en z+dz, en fonction de U(z+dz) et R(z+dz).

Un second flux entrant doit être pris en compte, celui constitué par l'entraînement de l'air sur les bords du jet. Sachant que la surface de notre volume de contrôle pour dz petit est $S(z)\approx 2\pi R(z)dz$, ce flux est Fi(z)S(z). Donnez son expression en fonction de $\alpha$.

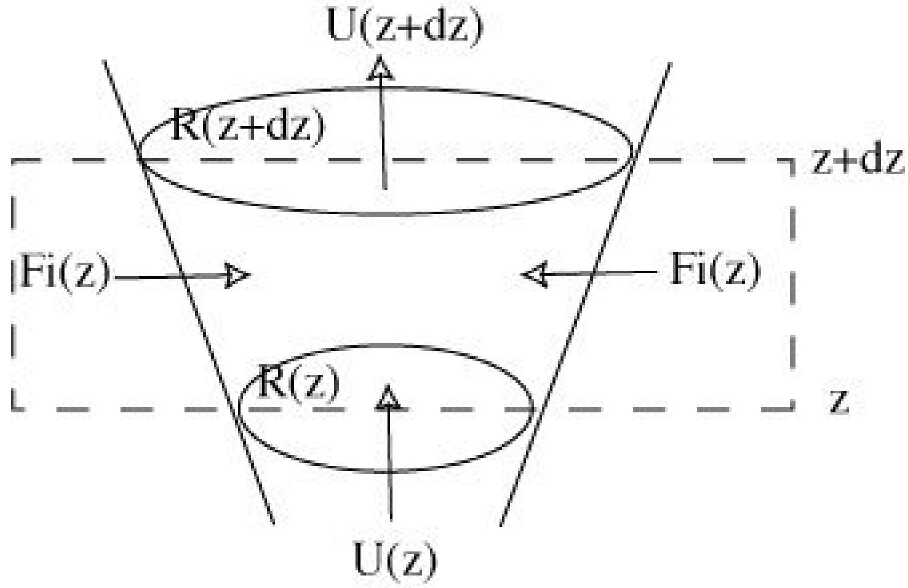


Figure 2 – coupe en z à travers le jet <u>conique</u>

En écrivant que le flux de volume sortant est égal à la somme des deux flux entrants et en prenant la limite où dz est infinitésimal, écrivez l'équation différentielle donnant la conservation du flux sous la forme

$$\frac{d}{dz}\left(R(z)^2 U(z)\right) = ??$$

**2/.** Conservation de la quantité de mouvement :

La quantité de mouvement pour un solide est le produit de la masse par la vitesse ; pour un fluide c'est le produit de la masse volumique $\rho$ par la vitesse, $\rho U$.

Pour écrire la conservation de la quantité de mouvement du fluide, on écrit que le flux de quantité de mouvement en un point est égal au flux de volume multiplié par la quantité de mouvement en ce point. En notant $\rho(z)$ la densité du jet à une distance z de la source, donnez l'expression du flux de quantité de mouvement entrant en z et du flux de quantité de mouvement sortant en z+dz en utilisant les flux de volume obtenus précédemment (on peut ici négliger le flux entrant par les côtés).

Il faut prendre en compte l'effet de la force de flottabilité sur la quantité de mouvement (principe de la dynamique Newtonienne). Pour notre volume de contrôle ($V(z) \approx \pi R^2(z)dz$), à l'aide d'une analyse aux dimensions, donnez l'expression de cette force en fonction de V(z), g l'accélération de la gravité, et $\Delta\rho(z)$. La constante de proportionnalité qui apparaît vaut 1. En écrivant que le flux de quantité de mouvement sortant est égal au flux entrant plus la force de flottabilité, donnez l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour dz infinitésimal sous la forme

$$\frac{d}{dz}\left(r(z)R(z)^2U^2(z)\right) = ??$$

Comme la densité du mélange varie peu et est proche de celle de l'air, on peut considérer que dans le membre de gauche, $\rho$ vaut quasiment $\rho_a$. Divisez les deux membres de l'équation par $\rho_a$ et réécrivez l'équation en posant $\Delta\rho/\rho_a\, g = g'$ (gravité réduite).

**3/** Équation de mélange :

Pour boucler le problème il nous faut maintenant une équation dite de mélange qui nous donne la fraction d'air x en z. Pour cela on écrit simplement que le flux de masse de particules transporté par le jet $xUR^2$ est constant, soit

$$x = x_0 \frac{U_o R_o^2}{U(z)R(z)^2}$$

avec $x_0$, $U_o$ et $R_o$, les valeurs à la source (z=0). Utilisez cette relation pour exprimer g' dans la conservation de la quantité de mouvement.

*C/. Résolution des équations :*

Moyennant quelques manipulations, la série d'équations que nous avons obtenue peut se ramener à

$$\frac{d}{dz}(Q) = 2a M^{1/2},$$

$$M\frac{d}{dz}(M) = G\left[1 - \left(1 - \frac{x_0}{Qx_m}\right)^2\right]Q^2,$$

où $M = U^2R^2/U_0^2R_0^2$ est le flux de quantité de mouvement sans dimension et $Q = UR^2/U_0R_0^2$ est le flux de masse sans dimension. $G = (\rho_m-\rho_a)g(U_0R_0^2)^3/\rho_a(U_0^2R_0^2)^{5/2}$, avec $\rho_m$ la densité minimale du jet ($x=x_m$), est une recombinaison sans dimension des paramètres décrivant la gravité réduite.

En combinant les deux équations précédentes et en intégrant l'expression obtenue, proposez une relation valable en tout z entre Q et M. Tracez M en fonction de Q (Q entre 1 et 2.5) pour 3 valeurs de $x_0/x_m=2,3,4$ et en posant $G=4\alpha/5$. Sachant que l'effondrement d'un jet est obtenu pour M=0, commentez le graphe.

Déduire de la solution de l'équation précédente l'expression de Q en fonction de M une condition sur $x_0$ pour que le collapse ait lieu (M=0) en remplaçant G par son expression complète (*rmq* : comme le jet entraîne de l'air ambiant, Q est réel>1 pour z>0).