L2 - STEP
Physique pour les Sciences de l'univers
TD N°3

Vendredi 29 février 2008

Exercice 1 : Circulation et flux

On considère un champ vectoriel $\overrightarrow{V} = y\overrightarrow{e_x} - x\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}$. On veut savoir la valeur de la circulation de ce vecteur sur un cercle parallèle au plan (xy), de rayon R et centré sur l'axe des z à une hauteur $h > 0$.

1) Faire un dessin.

2) Faire le calcul explicite de la circulation ; puis utiliser le théorème de Stokes.

3) On veut calculer maintenant la valeur du flux de ce même champ à travers la surface fermée d'un cylindre centré sur l'axe des z, de rayon R et de hauteur comprise entre 0 et $h > 0$, avec un calcul explicite et à l'aide du théorème de Green-Ostrogradsky.

Exercice 2 : Champ dipolaire

1) On considère une charge q isolée. Donner l'expression du champ électrique engendré, puis l'expression du flux à travers une sphère de rayon R centrée sur la charge, avec le calcul intégral. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de Green-Ostrogradsky ?

2) On considère un champ vectoriel $\overrightarrow{E}$ en coordonnées sphériques, qui a pour composantes :

$$E_\rho = \frac{2k\cos\theta}{\rho^3}, \quad E_\phi = 0, \quad E_\theta = \frac{k\sin\theta}{\rho^3}.$$

Calculer explicitement le flux de ce champ à travers la surface d'une sphère de rayon R centrée à l'origine.

3) Maintenant ce champ est en réalité celui d'un dipôle constitué d'une charge positive q et d'une charge négative $-q$ placées symétriquement par rapport à O et infiniment proches (i.e. éloignées de $d \ll R$) : retrouver la valeur du flux.

Plus difficile

On considère à présent le champ défini par $E_r = \dfrac{2k\cos\theta}{r^3}$ et $E_\theta = \dfrac{k\sin\theta}{r^3}$. Il s'agit d'un repère local polaire (r, θ) en 2-D. Quel rapport avec le champ précédent ?

4) Déterminer l'équation des lignes de champ en coordonnées polaires, et faire un dessin.

5) Déterminer le potentiel $U(r, \theta)$ dont dérive ce champ.

6) Pour se convaincre de l'intérêt d'utiliser les coordonnées sphériques, exprimer U en coordonnées cartésiennes, et en déduire les composantes cartésiennes de $\overrightarrow{E}$. Conclusion ?