Licence STEP L2

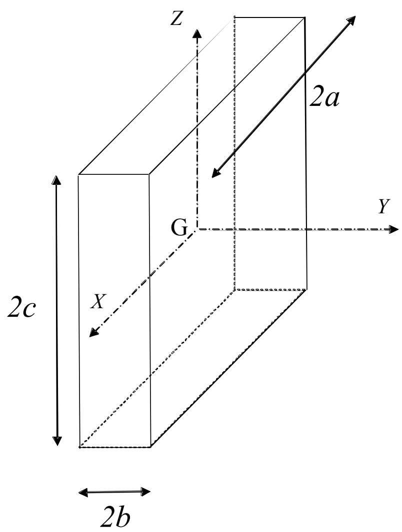
Module Physique pour les géosciences 2

Mécanique des solides et des planètes

MS4: Corrigé du TD du 3 mars 2008

Exercice 1

Considérons (voir figure ci-dessous) un parallélépipède homogène, supposé rectangle et droit, de masse M et de côtés $2a$, $2b$ et $2c$. Le centre d'inertie G est au centre de l'objet et on choisit les axes GX, GY et GZ perpendiculaires aux faces.



Calcul intégral pour I_Δ et $I_{\Delta'}$

On considère le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ qui n'est autre que l'axe GZ dans ce cas-là.

$$I_\Delta = \iiint_{volume} dm\,(dist\ axe\ \Delta)^2$$

avec

$$dm = \rho dV = \frac{M}{8abc} dx\,dy\,dz$$

et on obtient :

$$I_\Delta = \frac{M}{8abc}\int_{z=-c}^{z=+c} dz \int_{y=-b}^{y=+b} dy \int_{x=-a}^{x=+a} dx\,(x^2+y^2) = \frac{M}{3}(b^2+a^2)$$

Ensuite on considère l'axe *Δ'* et un repère qui se trouverait dans un coin de l'objet (par exemple) ansi la formule :

$$I_{\Delta'} = \iiint_{volume} dm\,(dist\ axe\ \Delta')^2$$

devient :

$$I_{\Delta'} = \frac{M}{8abc}\int_{z=0}^{z=+2c} dz \int_{y=0}^{y=+2b} dy \int_{x=0}^{x=+2a} dx\,(x^2+y^2) = \frac{4M}{3}(b^2+a^2)$$

Et on a bien la relation de Steiner-Huygens :
$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + M\,dist(\Delta', \Delta)^2$, puisque $dist(\Delta', \Delta)^2 = a^2 + b^2$.

<u>Matrice d'inertie avec les propriétés de symétrie :</u>

Les plans GXY, GYZ et GXZ sont des plans de symétrie : donc tous les produits d'inertie sont nuls. On connaît le moment d'inertie $I_{\Pi XY}$ du parallélépipède par rapport au plan GXY : c'est le moment d'inertie par rapport à son plan médian d'un objet cylindrique, soit $M(2c)^2/12=Mc^2/3$ (voir chapitre 3 paragraphe *3.4.2*). De même, on a :

$$I_{\Pi YZ} = \frac{Ma^2}{3} \quad \text{et} \quad I_{\Pi XZ} = \frac{Mb^2}{3}\ . \tag{1.1}$$

Le moment d'inertie par rapport à un axe est égal à la somme des moments d'inertie de deux plans perpendiculaires qui se coupent par cet axe (chapitre 3 paragraphe *3.4.1*). On a donc :

$$I_{XX} = I_{\Pi XY} + I_{\Pi XZ} = \frac{Mc^2}{3} + \frac{Mb^2}{3} = \frac{M\left(b^2+c^2\right)}{3} \tag{1.2}$$

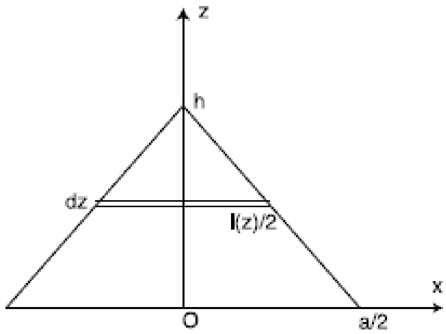
et des expressions analogues pour les deux autres axes.

La matrice d'inertie du parallélépipède dans le repère GXYZ s'écrit donc :

$$\bar{I}_G = \begin{bmatrix} \frac{M\left(b^2+c^2\right)}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M\left(a^2+c^2\right)}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\left(a^2+b^2\right)}{3} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Exercice 2

On note h la hauteur et a la longueur du coté de la base carrée. A une hauteur z, la longueur du coté de la petite plaque carrée d'épaisseur dz est de $l(z) = a\,(h-z)/h$ (dessin ci-dessous).



On cherche à calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe des z. On prend un repère cartésien, comme pour l'exercice précédent et on écrit :

$$I_z = \iiint_{pyramide} dm\,(dist\ axe\ z)^2$$

avec

$$dm = \rho dV = \frac{3M}{a^2 h} dx\, dy\, dz$$

Ce qui donne :

$$I_z = \frac{3M}{a^2 h} \int_{z=0}^{z=h} dz \int_{y=0}^{y=l(z)} dy \int_{x=0}^{x=l(z)} dx\,(x^2 + y^2)$$

On intègre en faisant attention aux bornes qui dépendent de z et on trouve :

$$I_z = \frac{2M}{a^2 h} \int_0^h dz\; l(z)^4 = \frac{2M}{5} a^2$$

Exercice 3

La vitesse angulaire ω de la machine est 24 000 tours par minute, soit 400 tours par seconde ou 800π radians par seconde. Un objet à une distance 25 cm de l'axe (rayon de la pièce) est donc projeté avec une vitesse de 200 π m/s. Si la masse de cet objet est 50 g soit 0.05 kg, son énergie cinétique est 1/2_0.05 $(200\,\pi)^2 = 1000\,\pi^2$ soit environ 10 000 J.

Malgré sa petite taille, le projectile possède une énergie cinétique importante, comme une balle de fusil. Notons aussi que la vitesse est supersonique, le bruit sera aussi de forte intensité. En général, les objets en rotation sont très dangereux, et évidemment les machines en rotation rapide. Seuls les ouvriers hautement qualifiés utilisent des machines UGV et l'opérateur est toujours protégé.

Exercice 1C

L'énergie cinétique E_K d'un objet tournant autour d'un axe fixe est égale à $E_K=1/2I\omega^2$, où I est le moment d'inertie autour de cet axe et ω la vitesse angulaire de rotation. Si on assimile le volant à un cerceau, on a $I=MR^2$ où M est sa masse et R son rayon, soit $I=4$ kg·m². On a donc $E_K=1/2\times4\times(2\pi\times600/60)^2=8\times100\times\pi^2=8000$ kg·m²· s⁻¹.

Exercice 2C

Le moment d'inertie polaire d'une coquille creuse infiniment fine est :

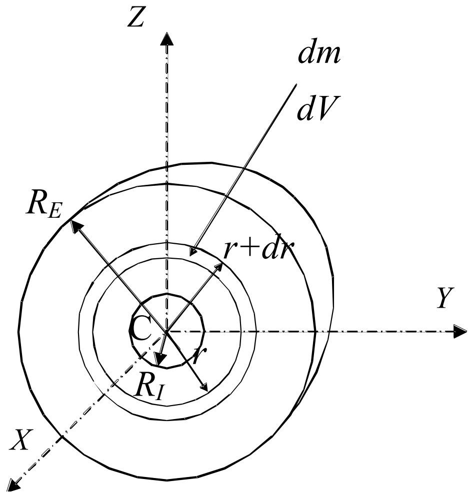
$$I_C = \int dmr^2 = R^2\int dm = MR^2 \ . \qquad (2C.1)$$

Le moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe qui passe par le centre C de la coquille est (chapitre 3 paragraphe *3.4.3*) :

$$I_\Delta = \frac{2}{3}I_C = \frac{2}{3}MR^2 \ . \qquad (2C.2)$$

Pour la balle de ping-pong, I_Δ=2/3_0.0024_(0.019)^2 soit environ 5.8 10^{-7} kg m^2.

Exercice 3C



Considérons une sphère creuse homogène de masse M, de rayon extérieur R_E et de rayon intérieur R_I. Soit ρ la masse volumique. Le volume total de matière est le volume compris entre les deux sphères, soit $4/3\pi(R_E^3-R_I^3)$. La masse volumique est donc :

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\left(R_E^{\ 3} - R_I^{\ 3}\right)} = \frac{3M}{4\pi\left(R_E^{\ 3} - R_I^{\ 3}\right)}. \qquad (3C.1)$$

Le moment d'inertie polaire par rapport au centre est donné par définition par :

$$I_C = \int dm r^2 \ . \qquad (3C.2)$$

Pour le calculer, on découpe la sphère en petits éléments de volume dV compris entre les sphères de rayon r et $r+dr$ (voir figure ci-dessus). On a $dV=4\pi r^2 dr$. On a ainsi :

$$I_C = \int_{R_I}^{R_E} dm r^2 = \int_{R_I}^{R_E} \rho dV r^2 = \rho \int_{R_I}^{R_E} \left(4\pi r^2 dr\right) r^2 = 4\pi \frac{3M}{4\pi\left(R_E^3 - R_I^3\right)} \int_{R_I}^{R_E} r^4 dr = \frac{3}{5} M \frac{R_E^5 - R_I^5}{R_E^3 - R_I^3} \qquad (3C.3)$$

Le moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe qui passe par le centre C de la sphère creuse est, comme plus haut :

$$I_\Delta = \frac{2}{3} I_C = \frac{2}{5} M \frac{R_E^5 - R_I^5}{R_E^3 - R_I^3} \ . \qquad (3C.4)$$