Licence STEP L2

Module Physique pour les géosciences 2

Mécanique des solides et des planètes

MS2: Corrigé du TD du 4 février 2008

Exercices obligatoires

Exercice 1 :

Considérons un objet de masse m en MCU sur une orbite circulaire de rayon R autour d'un objet de masse M. La force qui maintient un objet sur une trajectoire circulaire est centripète et son intensité (module) est mV^2/R où $V=2\pi R/T$ est la vitesse. Cette force est ici la force d'attraction dont le module est GmM/R^2. On a donc :

$$m\frac{V^2}{R} = m4\pi^2\frac{R}{T^2} = G\frac{mM}{R^2} \tag{1}$$

soit

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \tag{2}$$

C'est l'expression de la troisième loi de Kepler.

Titan se trouve à 1 220 000 km de Saturne et sa période de rotation est 383 heures. La masse de Saturne est donc :

$$M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2} \tag{3}$$

$$M = \frac{4\pi^2}{6.67\times10^{-11}}\frac{(1.22\times10^9)^3}{(1.379\times10^6)^2} = \frac{4\pi^2}{6.67}\frac{(1.22)^3}{(1.379)^2}\times10^{26} = 5.7\times10^{26}kg$$

Une unité astronomique (UA) est la distance moyenne Terre-Soleil, soit environ 150 millions de km ou plus précisément 1.49597871×10^{11} m. La période orbitale de la Terre est environ 365.25 jours soit 3.1558×10^7 s. La masse du Soleil obtenue par (2) est :

$$M_S = \frac{4\pi^2R_{ST}^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2}{6.67\times10^{-11}}\frac{(1.4960\times10^{11})^3}{(3.1558\times10^7)^2} = \frac{4\pi^2}{6.67}\frac{(1.496)^3}{(3.1558)^2}\times10^{30} = 1.99\times10^{30}kg$$

Cette valeur est identique à celle qu'on trouve dans les tables de données.

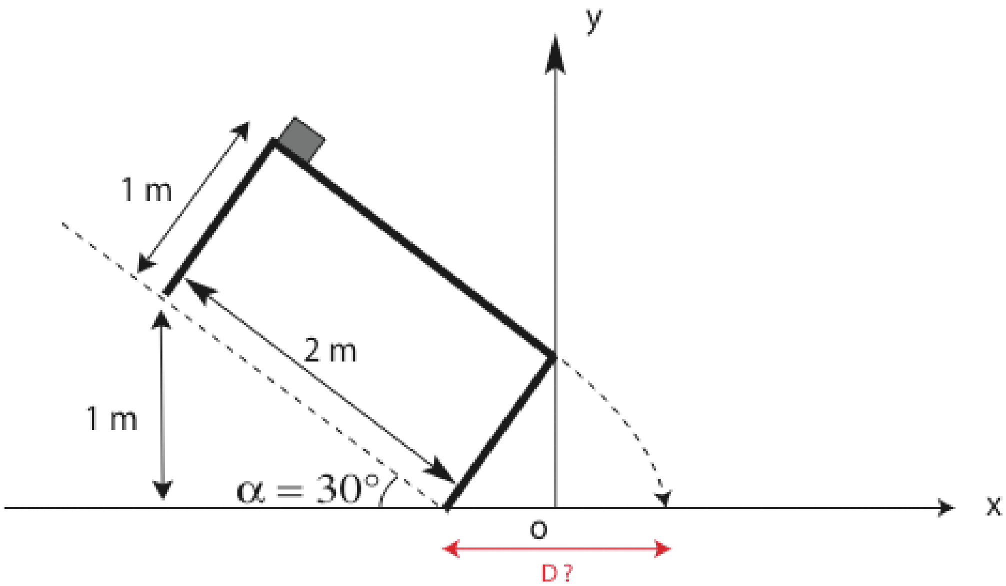
Pour estimer la masse de la Terre, on utilise la Lune. La distance moyenne Terre-Lune est 384 390 km, soit 3.8439×10^8 m pour une période orbitale de 27.322 jours soit 2.3606×10^6 s. La masse de la Terre obtenue par (2) est donc :

$$M_T = \frac{4\pi^2 R_{TL}^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2}{6.67\times10^{-11}}\frac{(3.8439\times10^8)^3}{(2.3606\times10^6)^2} = \frac{4\pi^2}{6.67}\frac{(3.8439)^3}{(2.3606)^2}\times10^{23} = 6.0\times10^{24} kg$$

Si la distance Terre-Lune est fausse de 0.01 %, alors la masse de la Terre sera fausse de 0.03 %.

Exercice 2:

L'énoncé n'étant pas excessivement précis, on peut proposer l'interprétation suivante, attrayante car elle permet de poser que l'angle de la table est 30° :



L'équation de la trajectoire est :

$$y = y_0 - \tan 30° x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_1^2 \cos^2 30°}$$

où V_1 est la vitesse du mobile à la fin du glissement sur la table. Ce glissement est un MRUA d'accélération gsin30°=5 m.s^{-2}, on a donc :

$$V_1 = \sqrt{2\times 5 m.s^{-2} \times 2m} = 2\sqrt{5} m.s^{-1}$$

Soit x_1 le point de contact avec le sol. On a :

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{x_1^2}{3}$$

La solution positive de cette équation du deuxième degré est :

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{3}})$$

Le mobile tombe à une distance D du pied de la table qui est donnée par :

$$D = \frac{1}{2} + x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}(\sqrt{1 + 2\sqrt{3}} - 1)}{2}$$

soit à 1.46 m du pied de la table.

Exercice 3:

La quantité de mouvement du wagon est :

$$p = mV = 10^3 \times \frac{144 \times 1000}{3600} = 4 \times 10^4 m.s^{-1}$$

et son énergie cinétique :

$$E_k = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} 10^3 \times 40^2 = 8 \times 10^5 J$$

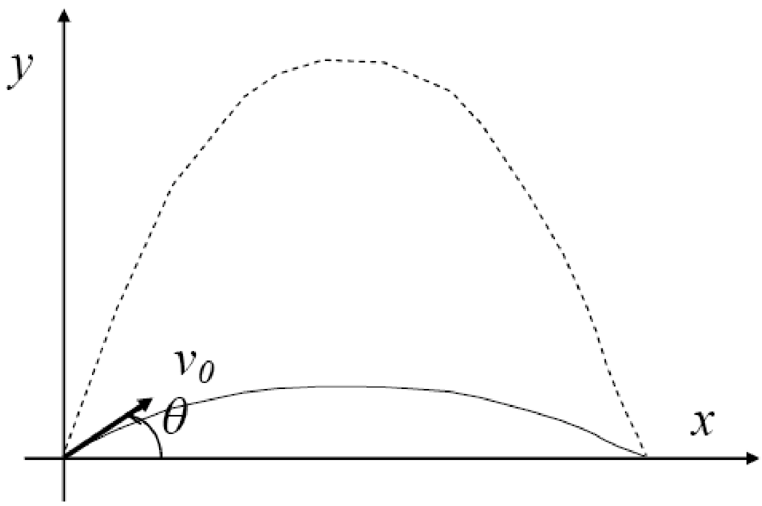
Au moment du choc, ce wagon se colle sur le deuxième wagon initialement à 72 km/h. La quantité de mouvement initiale totale est donc $mV+mV/2=3/2mV$. Après le choc, les deux wagons forment un petit train de masse *2m* (il n'y a pas éjection de débris). Si la vitesse finale du train est V_f alors sa quantité de mouvement est $2m\ V_f$, qui est égale à la quantité de mouvement initiale, soit $3/2mV$. On a donc :

$$V_f = \frac{3}{4} V = 30 m.s^{-1}$$

On peut vérifier que, dans ce choc, l'énergie cinétique totale n'est pas conservée, mais est diminuée. C'est en effet un choc mou. Une partie de l'énergie cinétique est utilisée pour absorber le choc; elle est convertie en chaleur.

Exercices complémentaires

Exercice 1C:



La portée *R* vérifie :

$$R = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\theta$$

Sachant que d'après l'énoncé $R = 80\ m$ et $V_o = 40\ m.s^{-1}$, cela donne :

$$\sin 2\theta = \frac{Rg}{V_0^2} = \frac{1}{2}$$

Soit $\theta = \theta_1 = 15°$ ou $\theta = \theta_2 = 75°$.

La hauteur maximale *H* de la trajectoire du boulet est donnée par :

$$H = \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

et donc pour les deux trajectoires possibles on a :

$$H_1 = 20(2-\sqrt{3}) = 5.4m$$

ainsi que :

$$H_2 = 20(2+\sqrt{3}) = 75m$$

La durée *T* du vol du boulet est donnée par :

$$T = \frac{2V_0 \sin\theta}{g}$$

Or, on a :

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{2\pm\sqrt{3}}{4}$$

et donc pour les deux trajectoires possibles on a :

$$T_1 = 4\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2.1s$$

ainsi que :

$$T_2 = 4\sqrt{2+\sqrt{3}} = 7.7s$$

<u>Remarques:</u>

Si on a oublié la formule qui donne la portée *R*, on peut la retrouver facilement en remarquant que pour une ordonnée égale à *R,* l'abscisse de la trajectoire est nulle. Donc en écrivant l'équation de la trajectoire pour le couple *(x,y)=(R,0)* on retrouve l'expression de *R*:

$$0 = 0 + R\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{R^2}{V_0^2\cos^2\theta}$$

De même, on peut retrouver facilement l'expression de la durée *T* du vol du boulet en écrivant que la vitesse verticale v_y est nulle pour le maximum de la trajectoire, qui correspond à $t=T/2$:

$$0 = V_0\sin\theta - g\frac{T}{2}$$

et on peut alors déduire l'expression de la hauteur maximale *H*:

$$H = \sin\theta\, V_0\frac{T}{2} - \frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{V_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

<u>Exercice 2C:</u>

La durée t_0 de la chute sans vitesse initiale depuis une hauteur $d = 20\ m$ est :

$$t_0 = \sqrt{\frac{2d}{g}} = 2\text{s}$$

et la vitesse v_0 au point d'impact est :

$$v_0 = \sqrt{2gd} = 20\text{ms}^{-1}$$

Le premier rebond s'effectue avec une énergie cinétique qui est 81 % de l'énergie cinétique au premier impact, soit avec une vitesse v_1 donnée par :

$$v_1 = \sqrt{0.81}v_0 = 0.9v_0$$

Soit t_1 la durée totale de ce premier rebond. Au temps $t_1/2$, la balle est au maximum du rebond et sa vitesse est nulle. On a donc :

$$0 = v_1 - g\frac{t_1}{2}$$

d'où :

$$t_1 = \frac{2v_1}{g} = \frac{2 \times 0.9 \times 20}{10} = 3.6\,\mathrm{s}$$

Le deuxième rebond s'effectue avec une vitesse initiale $v_2 = \alpha v_1$, avec $\alpha = 0.9$, et sa durée est $t_2 = 2v_2/g = \alpha t_1$, et ainsi de suite.
La durée totale T du mouvement est donc :

$$T = t_0 + t_1 + \alpha t_1 + \alpha^2 t_1 + \ldots = t_0 + t_1\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots\right)$$

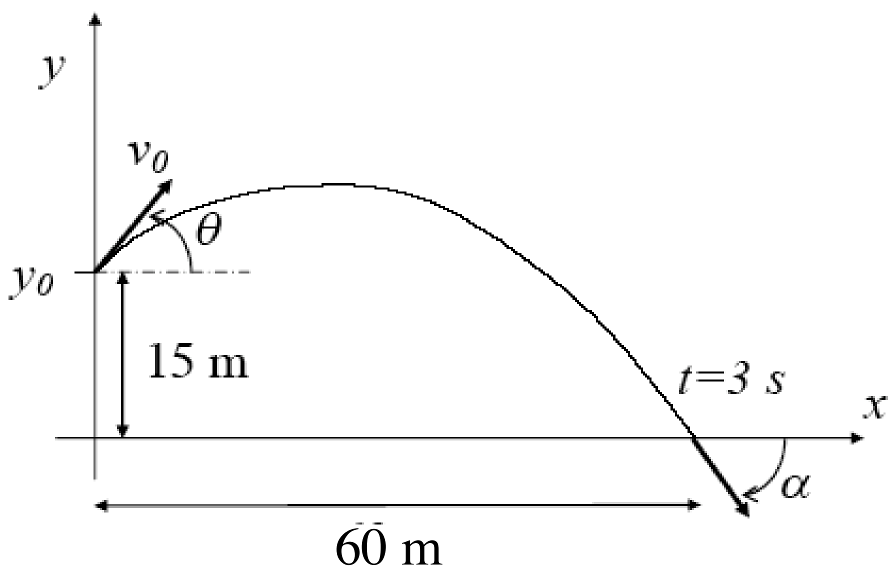
soit :

$$T = t_0 + \frac{t_1}{1-\alpha}$$

donc ***T=2+36=38s***

<u>Exercice 3C:</u>

Afin d'obtenir des résultats numériques en rapport avec la réalité, on considerera dans cet exercice que la distance horizontale entre les deux bâtiments est de 60 m et non 30 m comme cela est dit dans l'énoncé.



Au bout du temps t donné, la trajectoire de la moto passe à $y=0$ pour x vérifiant :

$$0 = y_0 + x\tan\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

d'où on tire :

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt^2 - y_0}{x} = \frac{1}{2}$$

ce qui fournit θ=25.6°

et :

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

La vitesse initiale est alors :

$$V_0 = \frac{x}{\cos\theta t} = 10\sqrt{5}$$

Ce qui donne $V_0 = 22.4\ m.s^{-1}$.

L'angle α à l'arrivée vérifie :

$$\tan\alpha + \tan\theta = 2\frac{y - y_0}{x} = -\frac{1}{2}$$

soit tan $\alpha = -1$ ou $\alpha = -45°$.

Remarque:

L'équation précédente est très utile car elle ne contient que des distances. Pour la démontrer on écrit la définition de α :

$$\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{V_0\sin\theta - gt}{V_0\cos\theta} = \frac{V_0\sin\theta t - gt^2}{V_0\cos\theta t}$$

Mais gt^2 peut s'exprimer en fonction de y, y_0 et $V_0 sin\theta t$:

$$-gt^2 = 2(y - y_0 - V_0\sin\theta t)$$

On obtient donc:

$$\tan\alpha = \frac{2(y - y_0) - V_0\ \sin\theta t}{V_0\cos\theta t} = \frac{2(y - y_0)}{x} - \tan\theta$$