Chapitre 1
L'univers de la mécanique classique

Au cours de vos années d'études antérieures, vous avez étudié quelques notions de la mécanique du point. Dans ce cours, nous allons essayer de comprendre quelques fondements de la mécanique des objets qui nous entourent qui, au lieu d'être des points, comme vous l'avez remarqué, sont des paquets étendus de matière, parfois rigides, parfois avec des pièces mobiles. Comprendre la mécanique de ces objets est bien utile dans la vie de tous les jours; c'est aussi important pour comprendre la physique des planètes, et, parmi celles-ci, la Terre qui nous intéresse particulièrement en Géosciences.

Dès l'Antiquité, on avait des notions intuitives de mécanique du solide, du rôle du centre de gravité, qu'on appelle aussi centre d'inertie, de la notion de levier, et de ce qu'on appelle aujourd'hui le moment d'une force. Ces notions étaient mises en pratique dans l'artisanat, et surtout dans l'art des armes, dans toutes les cultures du monde, par exemple dans l'Egypte Ancienne, puis en Grèce ou en Asie, depuis l'Inde jusqu'aux royaumes chinois. Les arts martiaux, illustres trésors des cultures de la Chine ou du Japon, sont avant tout un ensemble de connaissances intuitives de la mécanique du corps humain et de la physique des mouvements. Ces arts martiaux reposent aussi sur une recherche de l'harmonie et supposent une unité entre le mouvement du corps et les mouvements célestes. Aujourd'hui, on peut débarrasser ces analogies de croyances religieuses et de magie, et les interpréter à la lumière de la mécanique newtonienne. C'est finalement ce que nous allons faire dans ce cours.

Dans ce chapitre, nous allons refaire ensemble, en quelques pas de géants, l'histoire de la mécanique et récolter au passage quelques notions qui nous serviront dans les séances suivantes. Nous ferons aussi quelques clins d'œil à d'autres cours en évoquant quelques aspects de la mécanique des corps célestes.

1.1 Les précurseurs de la mécanique: Kepler, Galilée, Descartes et Huygens

Dans l'Antiquité, les Grecs ne cherchaient pas à lier le mouvement des planètes à des observations de la vie courante. Au contraire, leur but était une recherche de la perfection, avec une approche souvent très théorique. Ainsi Aristote avait-il conçu des lois de la mécanique souvent contraires à l'intuition. La plupart des astronomes grecs exigeaient aussi que les planètes se déplacent sur des cercles, formes idéales pour eux, avec un mouvement circulaire uniforme (MCU). La Terre était au centre du monde et les planètes comme le Soleil tournaient autour de la Terre avec des MCU. Les théories souvent fausses d'Aristote et cet a priori du MCU resta ancré profondément dans les mentalités jusqu'à la Renaissance. C'est en effet en 1543, reprenant les idées de certains savants de l'Antiquité, notamment Aristarque (310-230 av. J.C.), que Copernic (1473-1543) proposa qu'il était beaucoup plus simple de décrire le mouvement des planètes en les faisant toutes tourner autour du Soleil, y compris la Terre.

1.1.1 Kepler et les orbites des planètes

Kepler (1571-1630) était d'accord avec Copernic mais il était arrivé à cette conclusion en réfléchissant en détail sur les trajectoires des planètes. En particulier, il avait pu étudier soigneusement de remarquables données sur l'orbite de Mars, accumulées par l'équipe de Tycho Brahe (1546-1601), et il put jeter au panier l'idée de la trajectoire circulaire. Il montra en effet que l'orbite de Mars n'était pas un cercle mais une ellipse dont le soleil était l'un des foyers. C'est la Première Loi de Kepler (1603).

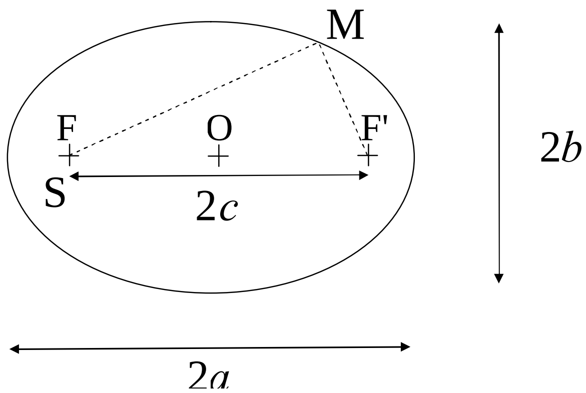


Figure 1.1. Rappel des paramètres d'une ellipse

Rappelons-nous ce qu'est une ellipse (Figure 1.1). C'est une courbe plane qu'on obtient en maintenant un crayon sur une ficelle de longueur donnée L entre deux points F et F' appelés les foyers. On appelle $a=L/2$ le demi-grand axe et b le demi-petit axe. La distance entre chaque foyer et le centre O de l'ellipse est notée c et on appelle excentricité e le rapport :

$$e = \frac{c}{a}. \tag{1.1}$$

On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 . \tag{1.2}$$

Notons ces deux relations dans un coin car nous nous en servirons plus tard.

Non seulement l'orbite n'est pas un cercle mais Kepler avait même constaté auparavant, dès 1600, que le mouvement n'est pas uniforme. Mais ce mouvement ne se fait pas pour autant n'importe comment. Kepler montra qu'il suit une Loi des Aires aussi dite "Deuxième Loi de Kepler": le corps en orbite balaie des aires égales de la trajectoire en des temps égaux (Figure 1.2).

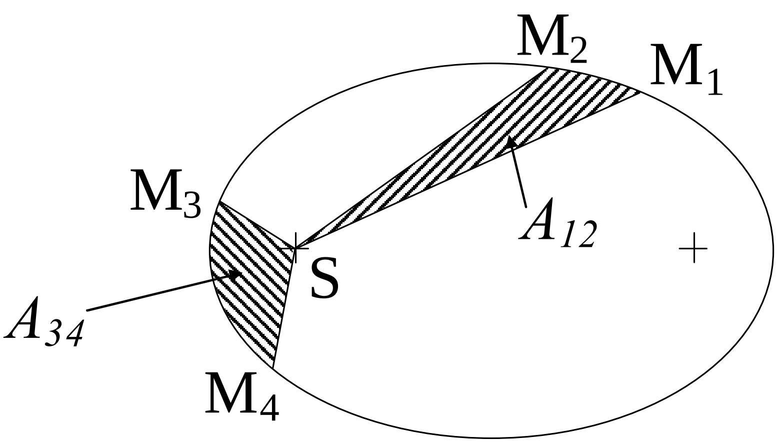


Figure 1.2. Aires balayées sur l'ellipse par les rayons vecteurs.

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 les positions du corps en orbite autour du soleil S à des instants t_1, t_2, t_3 et t_4 et soient A_{12} l'aire de l'orbite entre M_1 et M_2 et A_{34} l'aire entre M_3 et M_4. Alors on a :

$$\frac{A_{34}}{t_4 - t_3} = \frac{A_{12}}{t_2 - t_1}, \qquad (1.3)$$

ce qu'on peut aussi exprimer en disant que la vitesse de variation de l'aire (la vitesse aréolaire) est constante:

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \text{Constante} . \qquad (1.4)$$

Entre parenthèses, on remarque que cela veut dire que, quand le corps se trouve plus près du soleil, il va plus vite.

Plus tard, en 1618, Kepler, après des années de calculs monstrueux, pour les moyens de l'époque, mit en évidence une relation entre la période T du mouvement sur l'orbite, qui est le temps au bout duquel la planète a fait un tour complet, et le demi-grand axe a de l'ellipse. Considérons un corps 1 sur une orbite de demi-grand axe a_1 et de période T_1 et un corps 2 sur une orbite de demi-grand axe a_2 et de période T_2, alors on a :

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} . \qquad (1.5)$$

C'est la Troisième Loi de Kepler, qu'on peut aussi écrire:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{3}{2}}, \qquad (1.6)$$

ce qui se traduit en mots en "le rapport entre les périodes de deux planètes quelconques est en proportion précisément sesquilatère de celles de leurs distances moyennes" [Lindemann, p 110]. Nous aurons l'occasion de jouer avec cette relation.

Remarquons que Kepler a cherché à décrire le mouvement des planètes, mais il ne les explique pas. C'est un physicien italien de la même époque, Galilée, qui allait poser les premières pierres d'une théorie dynamique.

1.1.2 Galilée : le mouvement sur Terre et dans le ciel

Galilée (1564-1642) s'intéresse comme Kepler au mouvement des planètes mais il est aussi le premier, en 1610, à avoir l'idée de pointer une lunette vers le ciel, cette lunette qui vient d'être inventée. Et quelles surprises! Il observe le relief de la Lune, les phases de Vénus et il découvre quatre satellites qui tournent autour de Jupiter. Que d'idées reçues s'effondrent! Décidément, tout ne tourne pas autour de la Terre! La Terre n'est pas le centre du monde!

Mais Galilée va plus loin, et c'est plus important pour le propos de notre cours. Il va être le premier à s'intéresser en détail aux mouvements des corps sur la Terre. Il remet complètement en question les postulats de la physique des Grecs, à partir d'expériences et d'observations (première évolution), et il va idéaliser ces expériences pour en extraire des principes (deuxième révolution). Ces expériences concernent le mouvement dans le champ de la pesanteur terrestre et sont célèbres.

Les premières concernent la chute libre (Figure 1.3a). Il montre que, contrairement à ce que disait Aristote, deux corps de matières différentes lâchés en même temps arrivent en bas en même temps. C'est la fameuse expérience de la tour de Pise qu'on peut reproduire depuis le haut d'une chaise avec une boule de pâte à modeler et une boule de papier. Constatez par vous-même! L'effet de la friction dans l'air est ici négligeable, ce qui ne sera pas nécessairement toujours le cas... L'étude de la chute libre est cependant difficile si on veut regarder les choses finement car cela va très vite. Galilée eut l'idée d'utiliser un dispositif qui ralentit considérablement le mouvement et permet de l'étudier en long et en large. C'est le plan incliné, un dispositif sur lequel on peut faire glisser des objets sans frottement (Figure 1.3b). Il montre alors quantitativement que le mouvement est un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA), mouvement qu'il distingue précisément du mouvement rectiligne uniforme (MRU).

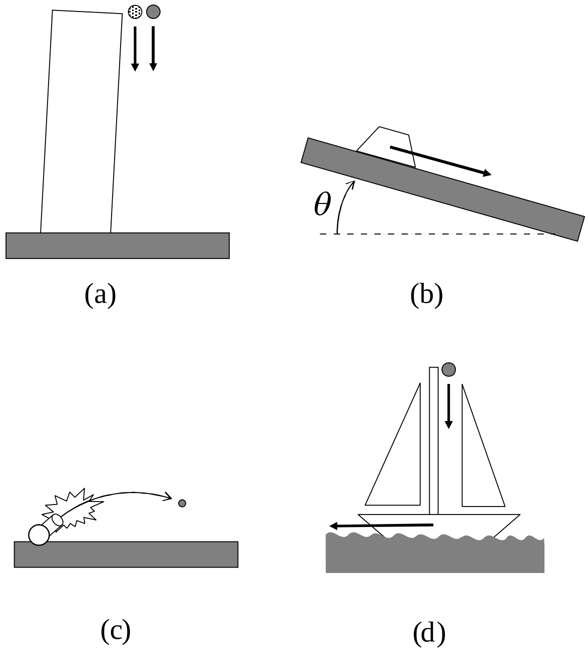


Figure 1.3. Les expériences de Galilée (vue schématique).

Rappelons-nous quelques relations simples sur le MRUA. Si x_0 et U sont respectivement la position et la vitesse initiale (t=0), la vitesse V et la position au temps t sont données par:

$$V = U + at \tag{1.7}$$

$$x = x_0 + Ut + \frac{1}{2}at^2 , \tag{1.8}$$

où a est l'accélération.

On a en plus la relation suivante bien utile entre la vitesse et la distance parcourue:

$$V^2 = U^2 + 2a(x - x_0) . \tag{1.9}$$

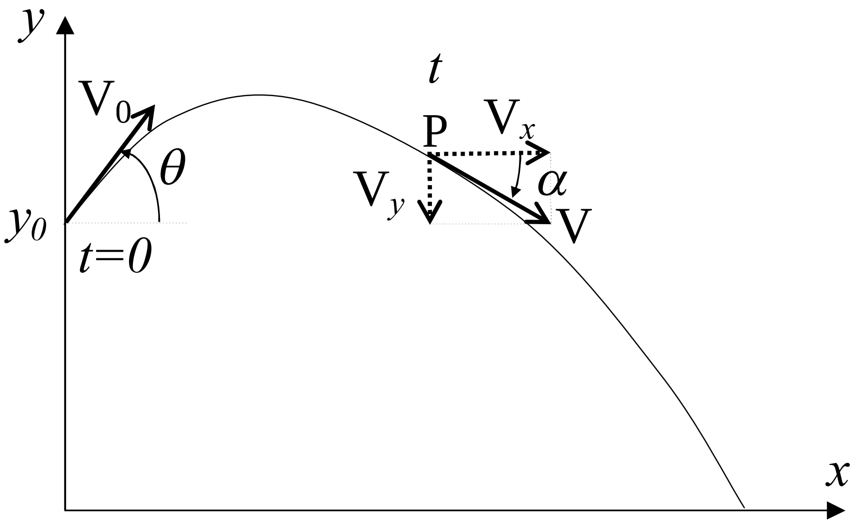
Dans le cas du plan incliné, l'accélération a est liée à l'accélération de la gravité g, qui contrôle la chute libre verticale, et l'angle θ du plan avec l'horizontale:

$$a = g \sin\theta . \tag{1.10}$$

Ce plan incliné est un outil à la fois simple et profond. C'est pourquoi je vous propose de vous y intéresser de près. Il permet de refaire les expériences de Galilée et de suivre sa démarche. Il est aussi très instructif de voir comment les choses sont modifiées quand on fait rouler des objets étendus, comme des roues ou des boules, ou encore un petit chariot. Nous y reviendrons à plusieurs reprises dans ce cours. J'inviterai aussi certains d'entre vous à réfléchir sur la chute libre, grâce à des dispositifs qui aujourd'hui nous permettent de bien mesurer les temps de chute.

Une troisième série d'expériences conduites par Galilée, d'ailleurs en relation avec ses expériences sur le plan incliné, concernent les trajectoires balistiques (Figure 1.3c). Il s'agit de la trajectoire d'un objet, par exemple un boulet ou une flèche, lancés avec une certaine vitesse et un certain angle avec l'horizontale. Les applications militaires sont bien entendu considérables. Galilée montre que le mouvement balistique se décompose en un MRU horizontal et un MRUA vertical, et que la trajectoire est alors une parabole. Pour vous rafraîchir la mémoire sur ces notions simples que vous avez déjà étudiées, des relations utiles sur le mouvement balistique ont été rassemblées dans l'encadré 1.1. Je vous encourage à les vérifier et à les manipuler, notamment à l'occasion des exercices. Ces relations nous serviront aussi pour effectuer quelques expériences.

Encadré 1.1: **Trajectoires balistiques**



$$\begin{cases} y = y_0 + (V_0)_y t + \frac{1}{2} a_y t^2 = y_0 + V_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x = (V_0)_x t = V_0 \cos\theta\, t \end{cases}$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2$$

$$V^2 = V_0^2 + 2g\left(y_0 - y\right)$$

$$\begin{cases} V_y = V_0 \sin\theta - g t \\ V_x = V_0 \cos\theta \end{cases}$$

$$\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x}$$

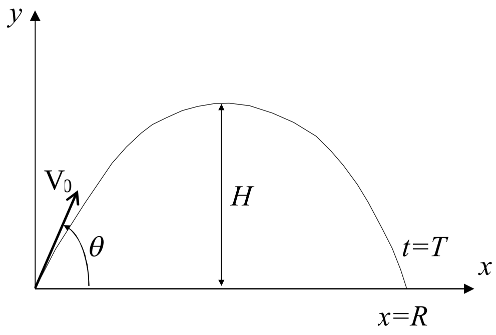
$$y = y_0 + \tan\theta\, x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta}$$

$$\sin\alpha = \frac{V_y}{V} \qquad \cos\alpha = \frac{V_x}{V}$$

$$y = \left(y_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2} \right) + \tan\theta\, x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2} \tan^2\theta$$

$$\tan\alpha + \tan\theta = 2 \frac{y - y_0}{x}$$

Trajectoires sol-sol :



$$T = \frac{2V_0 \sin\theta}{g}$$

$$H = \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$R = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\theta$$

Ellipses dans le ciel, paraboles sur la Terre, les coniques font décidément apparition avec insistance en mécanique. Galilée s'intéresse aussi à un autre mouvement, très fréquent dans la vie quotidienne, celui du pendule simple, un objet suspendu au bout d'un fil. Il remarque et il vérifie par des expériences que la période des petites oscillations du pendule simple ne dépend ni de la nature ni de la masse de l'objet suspendu, mais uniquement de la longueur l du fil. Plus précisément, il établit que la période T est proportionnelle à la racine carrée de la longueur. Nous savons aujourd'hui que:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} . \qquad (1.11)$$

Ainsi sont nées les bases de la description du mouvement du point, ce qu'on appelle la cinématique du point. Galilée, mis aux arrêts à la fin de sa vie, put néanmoins faire paraître son dernier texte secrètement. C'est bien sûr lui le personnage que je vous demandais d'identifier dans la deuxième devinette et le texte en question[1] représentait la synthèse des différentes contributions que je viens de vous résumer sur le mouvement.

Cependant, malgré ces avancées considérables, Galilée n'avait pas tellement plus progressé que Kepler sur la compréhension de l'origine du mouvement. On avait introduit dès Aristote la notion de force, qui est ce qui cause le mouvement, mais on n'était pas tellement plus avancé. Cependant, Galilée avait déjà mis en avant le rôle particulier du MRU. Pour lui, les choses se passaient exactement de la même façon dans un objet en MRU que dans un objet au repos. Il n'y avait pas de trains à cette époque pour vérifier cette idée, mais il suggéra une expérience sur un bateau, expérience qui fut effectivement réalisée plus tard par Gassendi. Pour Galilée, si on lâche un objet depuis le haut du mât d'un bateau en MRU (Figure 1.3d), donc un bateau qui avance doucement en ligne droite sur une mer calme, alors l'objet tombe au pied du mât, et non pas en arrière comme le disait Aristote.

1.1.3 De Descartes à Huygens

Descartes (1596-1650) propose vers 1640 que les forces entre les planètes soient en fait des illusions et que les planètes reposent sur une matière omniprésente et en rotation. Ainsi les planètes sont entraînées par le mouvement d'un grand tourbillon centré sur le soleil, comme des morceaux de pain dans une grande soupe en rotation. Cette théorie fut par la suite contestée par Newton.

Plus durables furent deux autres notions introduites par Descartes. D'abord il constata qu'au cours d'interactions de contact, des chocs en l'occurrence, on pouvait introduire une quantité qu'il appela la <u>quantité de mouvement</u>. C'est une quantité vectorielle $\vec{p}$ qui est le produit de la masse m d'un point par sa vitesse $\vec{V}$:

$$\vec{p} = m\vec{V} . \qquad (1.12)$$

Descartes remarqua que, pour plusieurs points, par exemple avant et après un choc, la quantité de mouvement totale est conservée:

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i\vec{V}_i = \text{Constante} . \qquad (1.13)$$

D'autre part, Descartes introduisit la notion de <u>travail</u> d'une force. Quand une force $\vec{F}$ est déplacée d'une petite quantité $\delta\vec{x}$, le travail est le produit scalaire:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{x} . \qquad (1.14)$$

C'est alors que Huygens (1629-1695) entre en scène. Huygens, qui a été éduqué dans les cercles cartésiens, va s'inspirer du travail de Descartes, mais va rapidement s'écarter de cette influence. D'abord, contrairement à Descartes et comme Galilée, et peut-être même beaucoup plus que Galilée, il va s'appuyer sur de solides expériences. Il se fabrique lui-même une

[1] *Dialogues concernant deux nouvelles sciences* (1638)

lunette de meilleure qualité que celle de Galilée et il observe les astres. En 1655, il découvre Titan, satellite de Saturne, et l'année suivante les anneaux de Saturne. Il reprend ensuite la théorie des chocs de Descartes, en corrige des erreurs, et il introduit une nouvelle quantité conservée, la somme des produits des masses et des vitesses au carré:

$$\sum_i m_i V_i^2 = \text{Constante} \,. \qquad (1.15)$$

Cette nouvelle quantité est aussi conservée dans le cas de chocs parfaitement élastiques, mais, attention, pas dans le cas de cas de chocs mous.

Huygens essaie aussi de préciser la notion de force. Il s'intéresse en particulier au mouvement circulaire uniforme (MCU). Il montre que, pour un mobile de vitesse V soit maintenu sur une telle trajectoire de rayon r, il faut qu'il subisse une force centripète, dirigée vers l'intérieur (Figure 1.4), dont il donne l'expression du module:

$$F_C = m\frac{V^2}{r} \,. \qquad (1.16)$$

Si on appelle ω la vitesse angulaire de rotation, en radians par seconde, alors on a:

$$V = \omega r \,, \qquad (1.17)$$

$$F_C = m\omega^2 r \,. \qquad (1.18)$$

Il y a de nombreuses conséquences pratiques de cette force centripète, et de son opposée, la force centrifuge. Les mouvements de rotation ne sont pas uniquement importants pour les planètes, qui tournent sur elles-mêmes, mais pour de très nombreux objets de la vie courante. Je vous invite donc à explorer cette physique dans plusieurs miniprojets.

Dans tout ce que je viens de vous raconter, vous reconnaissez progressivement des choses connues et vous voyez comment elles se sont mises progressivement en place. Dans les expériences que j'aimerais que vous réalisiez, je souhaiterais vraiment que, par moment, vous vous mettiez dans la peau de ces personnages, et que vous essayiez, à votre façon, de reconstituer leur parcours, leurs modes de pensée. Pratiquer la science, c'est un peu la recréer chaque jour. La mécanique, au cours de ce module, va, je l'espère, nous en fournir l'occasion.

Bien sûr, c'est avec Isaac Newton que la mécanique dite classique a fait son développement le plus considérable.

2.1 La mécanique vectorielle de Newton

2.1.1 Rappel: Les Lois de Newton

Newton (1642-1727) est né l'année de la mort de Galilée. En 1686, il publie le "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", "Principes mathématiques de la physique". On dit plus simplement les *Principia*, car il s'agit d'un des textes les plus importants de toute l'histoire des sciences, à mettre à côté des Eléments d'Euclide par exemple.

Newton clarifie tout d'abord les notions de force et de mouvement. Contrairement à Aristote, et suivant les intuitions de Descartes et Galilée, il pose que le MRU correspond à l'absence de force imprimée: "Tout corps persévère en son état de repos ou de MRU sauf si des forces imprimées le contraignent d'en changer". C'est la Première Loi de Newton, dite aussi Principe d'Inertie de Galilée.

La Deuxième Loi de Newton stipule justement comment l'application d'une force $\vec{F}$ produit un changement dans le mouvement d'un point de masse m par l'intermédiaire d'une accélération $\vec{a}$:

$$m\vec{a} = \vec{F} \,, \qquad (1.19)$$

ce que je peux aussi écrire[2]:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = \vec{F} \,. \qquad (1.20)$$

Cette relation s'applique dans un référentiel lui-même fixe ou en MRU, ce qu'on appelle un référentiel Galiléen. Dans un repère accéléré, comme par exemple un repère lié à un objet en chute libre ou un objet en rotation, la deuxième loi de Newton reste valable mais il faut tenir compte des forces d'inertie. Nous y reviendrons dans un chapitre ultérieur et dans les exercices. C'est particulièrement important pour nous car, justement, la Terre n'est pas un référentiel Galiléen!

La Troisième Loi de Newton est le Principe d'Action et de Réaction qui à première vue peut paraître bien évident ou purement esthétique. En fait, on peut l'invoquer très souvent en pratique, comme nous le verrons dans les projets. Ce principe dit que, quand on a deux corps A et B en interaction, alors l'action (la force) exercée par A sur B est égale et opposée à celle exercée par B sur A. Ainsi la force exercée par la Lune sur la Terre est d'intensité égale et de direction opposée à celle exercée par la Terre sur la Lune. De même la force exercée par la table sur la boule que je pose dessus est d'intensité égale et de direction opposée à celle de la boule sur la table (son poids).

Non seulement Newton pose ces trois principes mais il invente en prime, avec Leibniz, la méthode mathématique qui permet de trouver la trajectoire à partir des équations du mouvement (1.20). C'est le calcul différentiel et intégral, une vraie merveille! Dans l'encadré 1.2, vous trouverez par exemple comment on peut retrouver la période du pendule simple (1.11) à partir des équations du mouvement dans un champ de pesanteur uniforme. Un champ de pesanteur uniforme est une approximation valable à la surface de la Terre, qui dit que le poids $\vec{P}$ d'un objet de masse m s'écrit :

$$\vec{P} = m\vec{g} \,, \qquad (1.21)$$

où $\vec{g}$ est un vecteur constant dirigé vers le bas, de module g valant environ 10 m s^{-2}. Nous verrons dans les exercices d'autres applications des lois de Newton, à la mécanique du point d'abord, et ensuite à celle des solides.

2.1.2 La Gravitation Universelle

Newton ne s'arrête pas là. Pour lui, il n'y a pas de tourbillons à la Descartes mais une force qui est transmise à distance dans le vide, une force universelle qui ne dépend pas de la nature des corps mais uniquement d'un paramètre, leur masse, force dont il donne l'expression. La force de gravitation exercée par un objet de masse M sur un mobile de masse m situé à une distance r est proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance. Son module s'écrit:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \,, \qquad (1.22)$$

où G est la constante de la gravitation qui vaut approximativement 6.67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

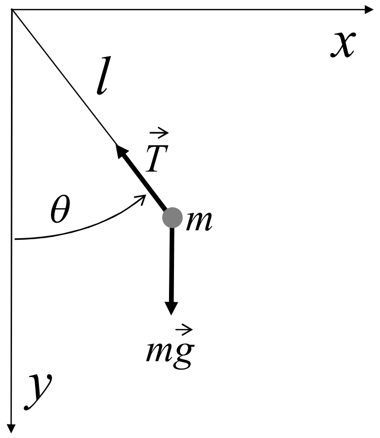
Newton démontre ensuite explicitement dans ses *Principia*, coup de génie, les trois lois de Kepler à partir de son expression de la force de gravitation et de ses lois du mouvement. Pour Newton, cette loi de la gravitation est universelle car elle s'applique aussi bien sur la Terre, que dans les étoiles. Avec le minimum, on explique le maximum, et on réalise aussi le rêve d'unité des anciens sages de l'Asie. Les principes de la mécanique du corps et des armes

[2] Nous utiliserons souvent la notation de Newton pour la dérivée par rapport au temps: un point au dessus de la quantité dérivée, et un double point pour la dérivée seconde par rapport au temps.

dans les arts martiaux sont bel et bien les mêmes principes que ceux qui régissent le mouvement des astres!

La mécanique de Newton, aboutissement des rêves de Galilée, est une révolution qui bouleverse complètement la physique. Malgré ses succès spectaculaires, la notion d'action à distance et la force de gravitation universelle mettront du temps à être acceptées. C'est qu'il demeure de nombreuses questions! En effet, comment ça peut marcher, une interaction à distance? Cette notion pose de nombreuses questions philosophiques mais aussi théoriques dont certains aspects demeurent encore incompris, même aujourd'hui, après Einstein.

Encadré 1.2: **Mouvement du pendule simple dans le plan vertical**



$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \dot{x} = l\cos\theta\dot{\theta} \\ \dot{y} = -l\sin\theta\dot{\theta} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{x} = l\cos\theta\ddot{\theta} - l\sin\theta\dot{\theta}^2 \\ \ddot{y} = -l\sin\theta\ddot{\theta} - l\cos\theta\dot{\theta}^2 \end{cases}$$

Les composantes de la tension du fil sont : $\begin{cases} T_x = -T\sin\theta \\ T_y = -T\cos\theta \end{cases}$

Les équations du mouvement donnent: $\begin{cases} m\ddot{x} = T_x \\ m\ddot{y} = mg + T_y \end{cases}$

La combinaison $m\ddot{x}\cos\theta - m\ddot{y}\sin\theta$ permet d'éliminer T et on obtient:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad \text{soit:}$$

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

Pour θ petit, on obtient: $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$

Cette équation a des solutions de la forme $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$ où ω est la pulsation qui vaut 2π/T où T est la période, et on obtient $\omega^2 = \frac{g}{l}$ soit encore: $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

L'œuvre de Newton sera rapidement connue dans toute l'Europe et elle donna lieu à de nombreux développements. Si Newton avait, une fois pour toutes, résolu le problème de l'attraction gravitationnelle de deux corps, il restait encore beaucoup à faire. En effet, il se trouve que, pour prédire correctement les trajectoires des objets célestes, il ne suffit pas de considérer l'attraction du soleil. Par exemple, pour calculer la trajectoire d'une comète, il faut au moins prendre en compte aussi Jupiter et les choses deviennent vite très compliquées.

D'autre part, on ne pouvait pas se contenter de décrire le mouvement de points matériels, mais les planètes sont des objets étendus, et les objets de notre quotidien sont aussi des objets étendus. Comment appliquer les lois de Newton dans le cas des solides? Leonard Euler (1707-1783) et d'autres se penchèrent sur la question. Euler montra en particulier comment on pouvait décrire le mouvement général d'un solide, et notamment le mouvement de la toupie ou l'instrument qu'on appelle gyroscope. Ce gyroscope fera d'ailleurs l'objet de certains de vos projets. En fait, la mécanique des solides n'est pas très simple, et on ne commença à comprendre les choses que vers le milieu du dix-neuvième siècle. Pour comprendre cette mécanique des solides, d'autres approches se révélèrent très fructueuses, complémentaires de celle de Newton, et je vais en dire quelques mots maintenant.

3.1 Une autre formulation : la mécanique scalaire ou analytique

3.1.1 La naissance de la mécanique scalaire

C'est une approche à laquelle en fait on vous a aussi initiés dans le passé, sans vous en détailler le contexte. Leibniz (1646-1716), rival de Newton dans la création du calcul infinitésimal, avait défini l'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{V}$ comme:

$$E_K = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 = \frac{1}{2} m\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right), \qquad (1.23)$$

où V_x, V_y et V_z désignent les trois composantes du vecteur vitesse dans un référentiel orthonormé. Leibniz reliait la variation de cette énergie cinétique au travail des forces:

$$dE_K = \delta W \ . \qquad (1.24)$$

Cette formulation est en fait équivalente à la deuxième loi de Newton mais elle prend une forme particulièrement simple dans le cas particulier où les forces peuvent s'exprimer comme les dérivées d'une fonction scalaire. Cela veut dire qu'on peut écrire:

$$\vec{F} = -gradE_P \ , \qquad (1.25)$$

ce qui veut simplement dire que les trois composantes de la force s'écrivent:

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_P}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z} \end{cases} . \qquad (1.26)$$

On dit aussi en jargon de physicien que la force dérive de la fonction E_P, qu'on appelle une énergie potentielle.

Dans ce cas, donc, où la force dérive d'une énergie potentielle E_P, le travail a une expression simple:

$$\delta W = F \cdot \delta x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}\delta x - \frac{\partial E_P}{\partial y}\delta y - \frac{\partial E_P}{\partial z}\delta z = -dE_P \ . \qquad (1.27)$$

Alors la variation simultanée de l'énergie cinétique devient:

$$dE_K = \delta W = -dE_P \,. \tag{1.28}$$

La quantité définie par:

$$E = E_K + E_P \,, \tag{1.29}$$

qu'on appelle énergie mécanique, est donc conservée pendant le mouvement. C'est un concept qui est très utile en pratique comme on va le voir.

Il se trouve en effet que les forces avec lesquelles nous travaillons beaucoup, comme le champ de pesanteur ou l'attraction gravitationnelle, dérivent effectivement d'un potentiel. Dans le cas du champ de pesanteur, la force est constante, et on peut considérer que le champ de pesanteur dérive d'une énergie potentielle qui croit linéairement avec la position verticale. Dans le cas de la force de gravité, qui varie avec le carré de l'inverse de la distance, l'énergie potentielle varie avec l'inverse de la distance.

L'idée de Leibniz était qu'on pouvait faire de la mécanique sans utiliser des vecteurs, mais en utilisant des quantités scalaires, plus aisées à manipuler. Cette formulation fut développée considérablement par la suite.

3.1.2 La mécanique analytique de Lagrange et Hamilton

Je n'en dirai que quelques mots ici mais les étudiants intéressés trouveront plus de détails dans les documents distribués et les exercices. Lagrange (1736-1813) montra en effet qu'on pouvait formuler la deuxième loi de Newton d'une manière scalaire, en introduisant la quantité suivante

$$L = E_K - E_P \,, \tag{1.30}$$

qu'on appelle aujourd'hui le Lagrangien. Les équations du mouvement sont alors obtenues à partir de l'équation suivante, dite équation d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \,, \tag{1.31}$$

où q est une variable quelconque décrivant l'état du système mécanique, par exemple une coordonnée, un angle. C'est une formulation qui a l'avantage d'être extrêmement concise et élégante pour traiter des problèmes complexes. L'encadré 1.3 donne par exemple la solution du mouvement du pendule simple en utilisant cette méthode.

Encadré 1.3: **Mouvement du pendule simple dans le plan vertical: Solution analytique**

On a (voir encadré 1.2) : $\begin{cases} E_K = \dfrac{1}{2} m V^2 = \dfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \\ E_P = mgl(1-\cos\theta) \end{cases}$

ce qui donne: $L = \dfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl\,(1-\cos\theta)$

Les équations d'Euler-Lagrange se réduisent ici à :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

soit: $\dfrac{d}{dt}\left(m l^2 \dot{\theta}\right) = -mgl\sin\theta$ et on retrouve donc directement l'équation du mouvement de l'encadré 1.2.

En fait, la mécanique analytique ne se limite pas à une simple reformulation. Hamilton (1805-1865) montrera plus tard que cette formulation permet d'interpréter les lois de Newton comme un cas particulier d'un principe plus général, dit principe de moindre action. Ce principe permet de faire le lien avec d'autres parties de la physique, et sera très fructueux pour permettre la formulation de la mécanique quantique et la mécanique relativiste au vingtième siècle. Mais ces aspects sortent largement des objectifs que nous nous sommes fixés dans ce cours. S'il m'arrivera d'évoquer parfois les équations d'Euler-Lagrange, nous nous bornerons surtout à l'application des lois de Newton dans le cas des solides. Pour cela, nous commencerons dès le prochain cours par apprendre comment on peut décrire le mouvement d'un solide dans l'espace.

Pour conclure, j'aimerais répondre à une question que vous ne manquez pas de vous poser depuis le début de ce cours. Mais pourquoi diable étudier cette mécanique? On pourrait bien déclarer que toutes ces vieilleries sont dépassées et que, dans un cursus centré sur les sciences de l'environnement, on ferait mieux de s'intéresser à la chimie ou à la biologie. En fait, on aurait bien tort. Il s'avère tout d'abord que ces phénomènes mécaniques sont omniprésents, et qu'ils expliquent bien des aspects de notre environnement. En outre, cette mécanique du solide ne doit pas vous faire peur. Au contraire, j'aimerais que vous appreniez à en percevoir la pertinence dans la vie de tous les jours, avant de visualiser les grands mouvements qui affectent notre planète, comme le mouvement de précession des équinoxes auquel nous allons progressivement nous initier. J'espère que les mini-projets expérimentaux vous permettront de pénétrer cette compréhension et de vous familiariser avec les concepts. Enfin, la mécanique du solide est une discipline qui apprivoisera pour nous cette démarche physique qui ne doit plus vous effrayer. Cette physique qui toujours recherche la simplicité et qui, devenue familière, nous mènera depuis la compréhension des phénomènes de notre réalité quotidienne jusqu'à celle des planètes. Ainsi ferons-nous sans cesse l'aller-retour entre notre environnement et les astres, lors de nos mini-projets ou à l'occasion des exercices. Ainsi pourrons-nous, comme les Anciens, penseurs Grecs ou moines tibétains, rêver à l'unité des phénomènes de notre univers, univers qui, débarrassé des magies obscures et des interventions divines, n'en demeure pas moins chargé de mystère.

Annexe 1.1: Tableau historique des principaux acteurs et fondateurs de la mécanique

1500	1600	1700	1800	1900
Nicolas **Copernic** 1473 1543	Galileo **Galilei** 1564 1642	Edmond **Halley** 1656 1742	William **Hamilton** 1805 1865	Richard **Feynman** 1918 1988
Tycho **Brahe** 1546 1601	Isaac **Newton** 1642 1727	Joseph-Louis **Lagrange** 1736 1813	Albert **Einstein** 1879 1955	
Johannes **Kepler** 1571 1630	Pierre **Maupertuis** 1698 1759	Urbain **Le Verrier** 1811 1877	Paul **Dirac** 1902 1984	
Francis **Bacon** 1561 1626	Gottfried **Leibniz** 1646 1716	Pierre Simon **Laplace** 1749 1827	Henri **Poincaré** 1854 1912	
René **Descartes** 1596 1650	Johann **Bernoulli** 1667 1748	Carl Friedrich **Gauss** 1777 1855	Erwin **Schrödinger** 1887 1961	
Giordano **Bruno** 1548 1600	Christiaan **Huygens** 1629 1695	Leonard **Euler** 1707 1783	Gaspard **Coriolis** 1792 1848	Hendrik **Lorentz** 1853 1928
Blaise **Pascal** 1623 1662	Jean **D'Alembert** 1717 1783	Carl **Jacobi** 1804 1851	Albert **Michelson** 1852 1931	
Pierre de **Fermat** 1601 1665	Alexis **Clairaut** 1713 1765	Léon **Foucault** 1819 1868	Niels **Bohr** 1885 1962	
Jean-Dominique **Cassini** 1625 1712	Gaspard **Monge** 1746 1818	Hippolyte **Fizeau** 1819 1896	Werner **Heisenberg** 1901 1976	
Pierre **Gassendi** 1592 1655	Samuel **König** 1712 1757	Jakob **Steiner** 1796 1863	Clyde **Tombaugh** 1906 1997	
Isaac **Beeckman** 1588 1637	Henry **Cavendish** 1731 1810	John **Adams** 1819 1892		
Olaf **Römer** 1644 1710	Siméon Denis **Poisson** 1781 1840	Louis **De Broglie** 1892 1987		
Marin **Mersenne** 1588 1648	William **Herschel** 1737 1822	Arthur **Eddington** 1882 1944		
James **Bradley** 1693 1762	Joseph **Liouville** 1809 1882			
Robert **Hooke** 1635 1703	Adrien Marie **Legendre** 1752 1833	Lorand **Eötvös** 1848 1919		
Friedrich **Bessel** 1784 1846				