

# Chapitre 3

## Description générale du mouvement d'un solide

Dans ce chapitre, nous allons aborder l'étude du mouvement général d'un ou plusieurs solides. Pour cela, nous allons commencer par quelques considérations générales.

### 3.1 Considérations préliminaires à l'étude générale du mouvement d'un système

Avant de nous précipiter sur la description mathématique de la cinématique du solide, regardons quelques systèmes simples. Commençons par imaginer (ou regarder si nous l'avons sous les yeux) une petite voiture équipée de quatre roues. Quand je la tiens dans mes mains, ce n'est pas très facile de décrire la position de chaque partie. Je peux déplacer ma voiture dans l'espace, changer son orientation, et je peux faire tourner indépendamment chaque roue. Par contre, quand je pose cette voiture sur la table, les choses sont plus simples. En effet, ma voiture ne peut maintenant avancer que vers l'avant ou vers l'arrière. Finalement, sa position est toujours sur une ligne et je peux la décrire par un seul nombre, la coordonnée le long de cette ligne. De plus, je vois que les pneus garantissent qu'il y a une bonne adhérence et chaque fois que je bouge ma voiture, les roues tournent d'un angle correspondant au déplacement horizontal. Plus précisément, pour chaque déplacement horizontal  $\Delta x$  de ma voiture, les roues tournent toutes d'un angle  $\Delta\theta$  donné par :

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x}{R}, \quad (3.1)$$

où  $R$  est le rayon de la roue. On voit que cela revient à dire que la distance parcourue est enroulée sur le pourtour de la roue. Pour un tour de roue, la voiture a avancé, ou reculé, de  $2\pi R$ . Pour que cela soit vrai, il faut cependant que la friction entre le plan et la roue soit suffisante. On dit alors qu'on a roulement sans glissement. Ce n'est plus vrai si la roue glisse ou dérape car, dans ce cas, elle tourne alors que le véhicule ne bouge pas, ou inversement, le véhicule avance et les roues restent immobiles.

Dans le cas du roulement sans glissement, on voit que la position de mon véhicule et de chacune de ses parties est définie par un seul nombre, la coordonnée de ma véhicule le long de sa ligne. On dit que ce système n'a qu'un seul degré de liberté.

Nous avons déjà vu au chapitre 1 un autre système à un degré de liberté, le pendule simple oscillant dans un plan (Figure 3.1). En réalité, ce n'est pas si facile de faire osciller un point matériel dans un plan, il a tendance à bouger dans la direction perpendiculaire au plan d'oscillation. On dit qu'on a alors un pendule "sphérique" et il faut deux nombres pour décrire sa position dans l'espace. On peut par exemple (Figure 3.2) choisir l'angle  $\theta$  avec la verticale et l'angle  $\varphi$  entre un axe de référence horizontal et la projection, dans ce plan horizontal, de la tige soutenant le mobile. Ce système a alors deux degrés de liberté.

Considérons maintenant le système suivant (Figure 3.3). Il est constitué de deux points  $M_1$  et  $M_2$  de masse  $m_1$  et  $m_2$  liées par un fil qui passe sur deux poulies. C'est une version simple de machines inventées en 1780 par George Atwood (1745-1807), d'où le nom de machine d'Atwood. Nous supposons, pour ces machines d'Atwood, que le fil n'est pas extensible, que le contact entre le fil et les poulies est sans glissement et que les poulies sont sans friction sur leur axe de rotation et sans masse. Pour chaque déplacement vertical de la masse  $M_1$ , j'ai un déplacement égal et opposé de  $M_2$ , et les poulies tournent, dans le même sens, d'un angle imposé par leur rayon. Ce système n'a donc qu'un degré de liberté. Vous

verrez en exercice que l'intérêt de cette machine est qu'elle permet de ralentir l'effet de la gravité et donc de faire des expériences précises sans grand effort, un peu comme avec un plan incliné.

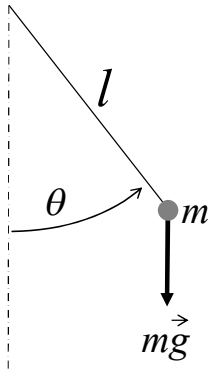


Figure 3.1. Pendule simple.

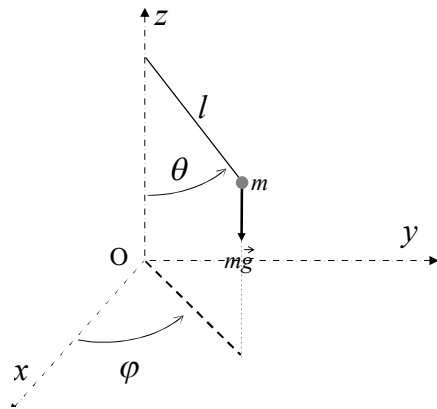


Figure 3.2. Pendule sphérique.

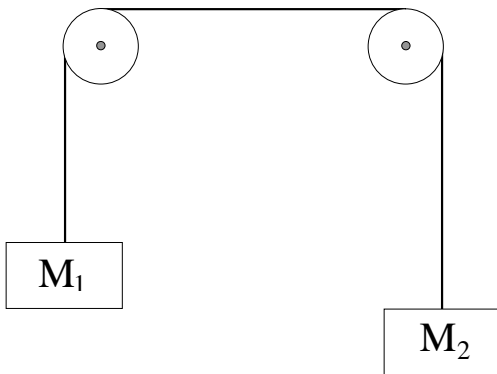


Figure 3.3. Machine d'Atwood.

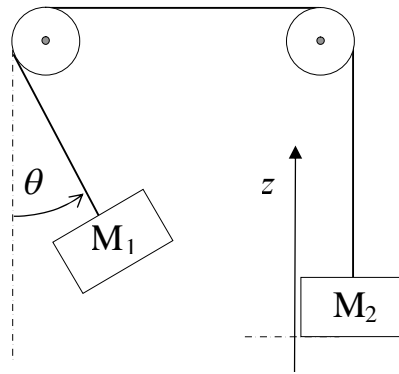


Figure 3.4. Pendule d'Atwood.

Faisons maintenant osciller le point  $M_1$  dans le plan du système. On a alors un système qu'on a baptisé pendule d'Atwood (Figure 3.4) et il a deux degrés de liberté : la position verticale de  $M_2$  et l'angle  $\theta$  que fait le fil tenant  $M_1$  avec la verticale. Parfois on a des objets qui paraissent plus compliqués, comme la machine de Stirling (Figure 3.5). Mais on peut constater que toutes les pièces, pistons, roues et arbres de transmission, sont liés entre eux et, en fait, il n'y a qu'un degré de liberté, par exemple l'angle de rotation du volant extérieur.



Figure 3.5. Machine de Stirling.

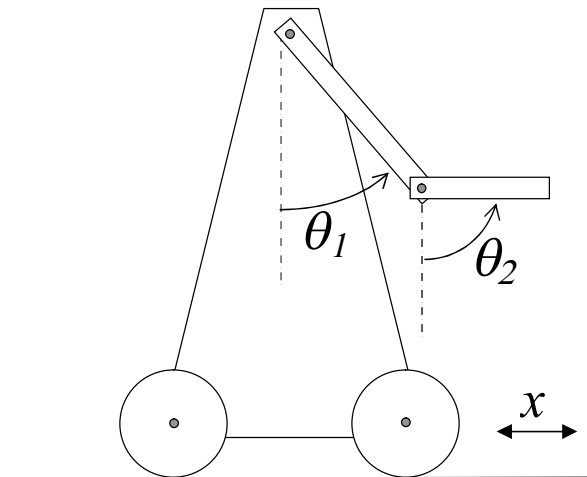


Figure 3.6. Double pendule sur chariot.

Maintenant, je vais vous montrer un cas plus compliqué, un double pendule installé sur un chariot (Figure 3.6). Faisons l'inventaire de ses degrés de liberté. Il y a d'abord l'angle  $\theta_1$  du premier bras avec la verticale, puis l'angle  $\theta_2$  du deuxième bras avec la verticale, on pourrait aussi d'ailleurs utiliser l'angle entre le premier bras et le deuxième bras (c'est  $\theta_2 - \theta_1$ ). Et puis le chariot peut avancer ou reculer. Si le contact entre les roues et le plan est bon, comme précédemment, on est dans le cas du roulement sans glissement et la position du chariot et de ses roues est imposée par la coordonnée du chariot le long de sa ligne de marche. Il y a ainsi 3 degrés de liberté dans ce système.

Ainsi on voit que le nombre de degrés de liberté peut être défini par le nombre minimal de paramètres nécessaires pour décrire la position de toutes les parties d'un système. Le nombre de degrés de liberté dépend des propriétés des liaisons entre les différentes parties du système.

Regardons maintenant notre gyroscope de démonstration (Figure 3.7). Dans un premier temps, je bloque tous les mouvements sauf la rotation autour de son axe propre. Il n'a alors qu'un degré de liberté. Si je débloque les deux vis de l'axe horizontal, j'ajoute un degré de liberté, qui est le mouvement autour de l'axe horizontal. Si maintenant je débloque l'axe vertical, alors je vois que le gyroscope a désormais trois de degrés de liberté. Je peux toujours définir mes degrés de liberté de différentes façons, comme on a vu dans le cas du double pendule sur chariot (Figure 3.6). Par contre, on essaie en pratique de choisir des paramètres qui correspondent de façon simple aux mouvements principaux observés en réalité. Clairement, dans le cas de ce gyroscope, ce sont les trois angles suivants : l'angle de rotation autour de son axe propre, l'angle entre le support autour de l'axe horizontal qui le soutient, et l'angle de la première fourche extérieure autour de l'axe vertical.



Figure 3.7. Notre gyroscope de démonstration.

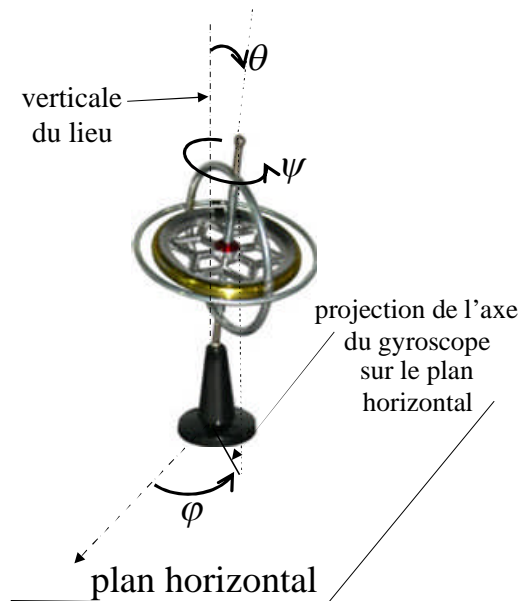


Figure 3.8. Mouvement d'un gyroscope autour d'un point fixe.

Considérons maintenant ce gyroscope que je lance et que je fais tourner autour d'un point fixe (Figure 3.8). Il a aussi trois degrés de liberté. Il y a d'abord son angle de rotation sur lui-même, que nous notons  $\psi$ . On voit qu'à tout moment, son axe fait un angle donné, que nous noterons  $\theta$ , avec la verticale. On observe que cet axe se met à tourner autour de cette verticale, on dit qu'on a un mouvement de précession. Pour définir la position de l'axe, il me faut donc un troisième angle, par exemple l'angle  $\varphi$  de la projection de l'axe sur le plan

horizontal. Pendant le mouvement de précession, on voit que c'est cet angle qui varie. Puis, quand le gyroscope commence à ralentir, on voit que l'angle avec la verticale augmente progressivement. Quand l'angle avec la verticale change, on parle de nutaton. Les trois degrés de liberté du gyroscope posé sur un point fixe sont donc rotation propre, précession et nutation et on appelle angles d'Euler les trois angles  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ .

Comme vous le savez maintenant, puisque c'est une des recherches documentaires que je vous avais demandées, que l'axe de rotation de la Terre n'est pas fixe dans l'espace, mais qu'il tourne lentement autour de l'axe perpendiculaire au plan de l'orbite de la Terre autour du soleil (l'écliptique), avec une période d'environ 26 000 ans. C'est le phénomène de précession des équinoxes découvert par Hipparque en 129 avant J.-C. Nous reviendrons à plusieurs reprises sur ce phénomène. Mais revenons maintenant sur notre gyroscope. Si le point de contact peut maintenant glisser sur la table, alors j'ai désormais cinq degré de liberté : les trois degrés de liberté précédents, et les deux coordonnées du point de contact sur le plan.

Avant d'aborder l'étude d'un système physique, il est bon de prendre le temps d'analyser la nature des liaisons entre ses différentes parties et d'inventorier les degrés de liberté. Il faut ensuite choisir comment on définit précisément les différentes variables qui décrivent le système, en essayant que ces choix soient les plus pertinents possibles pour décrire la réalité physique du mouvement. Nous verrons plusieurs cas en exercices pour se familiariser avec cette procédure. Dans la partie suivante, avant de jouer avec des assemblages de plusieurs solides dans les chapitres ultérieurs et les exercices, nous allons nous intéresser au mouvement d'un solide rigide ou indéformable.

### 3.2 Cas du mouvement général d'un solide indéformable

Considérons donc (Figure 3.9) le mouvement d'un solide quelconque indéformable par rapport à un repère  $Oxyz$  orthonormé comme au chapitre précédent. Comme les considérations précédentes nous permettent de l'intuiter, les vitesses des points du solide ne peuvent pas varier n'importe comment. Le fait que le solide soit rigide impose une forte organisation des vitesses à chaque instant  $t$ .

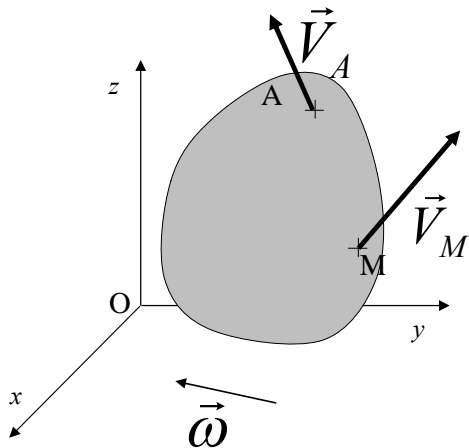


Figure 3.9. Mouvement quelconque d'un solide rigide.

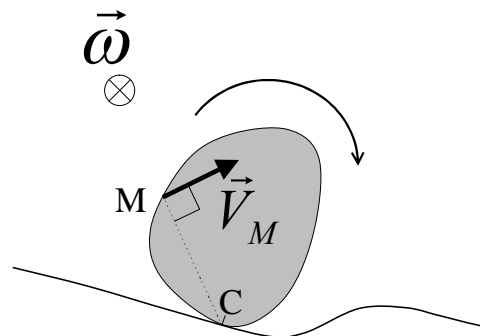


Figure 3.10. Solide roulant sans glisser sur une surface.

#### 3.2.1 Théorème de Chasles-Euler pour un solide indéformable

On peut montrer, de façon générale, que tout mouvement d'un solide indéformable se décompose en un mouvement de translation et un mouvement de rotation autour d'un axe.

C'est la règle ou théorème de Chasles-Euler, d'après le mathématicien allemand Leonhard Euler (1707-1783), déjà rencontré, décidément omniprésent, et le mathématicien français Michel Chasles (1793-1880). Il existe donc à chaque instant  $t$  un vecteur instantané de rotation  $\vec{\omega}$ . Si on considère deux points A et M du solide (Figure 3.9), alors leurs vitesses  $\vec{V}_A$  et  $\vec{V}_M$ , estimées dans le repère fixe Oxyz, sont liées par la relation suivante :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}, \quad (3.2)$$

dite relation de Chasles-Euler. Ainsi les vecteurs vitesses linéaires sont liées au vecteur vitesse de rotation angulaire.

Une autre façon d'exprimer ce résultat est de dire que la vitesse relative du point M par rapport à A, notée  $\vec{V}_{M/A}$ , et définie par :

$$\vec{V}_{M/A} = \vec{V}_M - \vec{V}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}, \quad (3.3)$$

est le produit vectoriel  $\vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}$ .

Cela se comprend bien si on se place par rapport à un point A quelconque (Figure 3.9). Regardons alors uniquement le mouvement relatif par rapport à A. Autrement dit, on élimine le mouvement de translation commun à tous les points du solide. Le mouvement relatif est alors une rotation pure autour de l'axe  $\Delta$  de direction  $\vec{\omega}$  et passant par A. Soit H la projection du point M sur cet axe. Sa vitesse  $\vec{V}_{M/A}$  est alors perpendiculaire à l'axe et au rayon vecteur  $\overrightarrow{HM}$  et son module est  $\omega.HM$ , et elle peut donc s'écrire vectoriellement comme le produit vectoriel  $\vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}$ .

La relation de Chasles-Euler peut servir à exprimer des conditions sur le mouvement du solide. Par exemple, nous avons discuté tout à l'heure du roulement sans glissement. Si C est le point de contact du solide avec la surface (Figure 3.10), on peut dire, en l'absence de glissement, que sa vitesse  $\vec{V}_C$  dans le repère fixe est nulle. Pour tout point M du solide, on peut donc écrire à tout instant :

$$\vec{V}_M + \vec{\omega} \times \overrightarrow{MC} = 0. \quad (3.4)$$

La règle de Chasles-Euler a aussi plusieurs conséquences très importantes que nous allons voir au cours du chapitre. Auparavant, nous allons recenser quelques relations générales, valables pour tout système de points, déformable ou pas, et revenir au cas du solide déformable.

### 3.2.2 Moment cinétique d'un système par rapport à un point P

Soit P un point quelconque de l'espace, de vitesse  $\vec{V}_P$ . P peut être un point du solide ou être un autre point complètement indépendant du système. Exprimons le moment cinétique du solide par rapport à P. On a, d'après la définition (2.29) :

$$\vec{\sigma}_P = \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times m_i \vec{V}_i = \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times m_i (\vec{V}_{i/P} + \vec{V}_P), \quad (3.5)$$

où on a fait apparaître la vitesse relative  $\vec{V}_{i/P}$  de chaque point du solide par rapport à P. L'expression peut alors se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_P &= \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times m_i \vec{V}_{i/P} + \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times m_i \vec{V}_P = \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times m_i \vec{V}_{i/P} + \left( \sum_i \overrightarrow{PM}_i m_i \right) \times \vec{V}_P \\ &= \sum_i \overrightarrow{PM}_i \times m_i \vec{V}_{i/P} + (\overrightarrow{MPG}) \times \vec{V}_P \end{aligned} \quad (3.6)$$

d'après la définition du centre d'inertie (2.25). On a donc :

$$\vec{\sigma}_P = \vec{\sigma}_{/P} + \overrightarrow{PG} \times M\vec{V}_P, \quad (3.7)$$

où  $\vec{\sigma}_{/P}$  indique le moment cinétique du solide dans son mouvement relatif par rapport au point P. Le résultat (3.7) est à la fois simple mais hautement non trivial. Il signifie effectivement, en termes physiques, que le moment cinétique total d'un solide par rapport à un point P est égal à la somme du moment cinétique du mouvement relatif par rapport à ce point et du moment cinétique par rapport à ce point P du centre d'inertie du solide affecté de la vitesse absolue du point P.

Remarque : Prenons le cas particulier où P coïncide avec le centre d'inertie G. On a alors :

$$\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}_{/G}. \quad (3.8)$$

C'est très pratique. En effet, cela veut dire que, pour calculer le moment cinétique par rapport au centre d'inertie, on peut utiliser indifféremment les vitesses absolues, ou les vitesses relatives du mouvement par rapport à ce centre d'inertie.

### 3.2.3 Premier théorème de Koenig pour un système quelconque

Regardons maintenant le cas du moment cinétique total du système par rapport à l'origine  $\vec{\sigma}_O$ . On a :

$$\vec{\sigma}_O = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \times m_i \vec{V}_i = \sum_i (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i) \times m_i \vec{V}_i, \quad (3.9)$$

où, cette fois, on ne touche pas au terme de vitesse mais où on a fait apparaître le centre d'inertie G. Réarrangeons les termes :

$$\vec{\sigma}_O = \sum_i \overrightarrow{GM}_i \times m_i \vec{V}_i + \sum_i \overrightarrow{OG} \times m_i \vec{V}_i = \vec{\sigma}_G + \overrightarrow{OG} \times \left( \sum_i m_i \vec{V}_i \right), \quad (3.10)$$

soit, en utilisant (3.8) et la définition de la quantité de mouvement totale  $\vec{P}$  (2.28) :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}_{/G} + \overrightarrow{OG} \times \vec{P}. \quad (3.11)$$

C'est le Premier Théorème de Koenig, d'après le suisse Samuel Koenig (1712-1757). Il est valable pour l'origine mais aussi pour tout autre point de l'espace. Physiquement, ce théorème dit que le moment cinétique d'un solide par rapport à un point est égal à la somme du moment cinétique par rapport au centre d'inertie et du moment cinétique du centre d'inertie par rapport au point considéré.

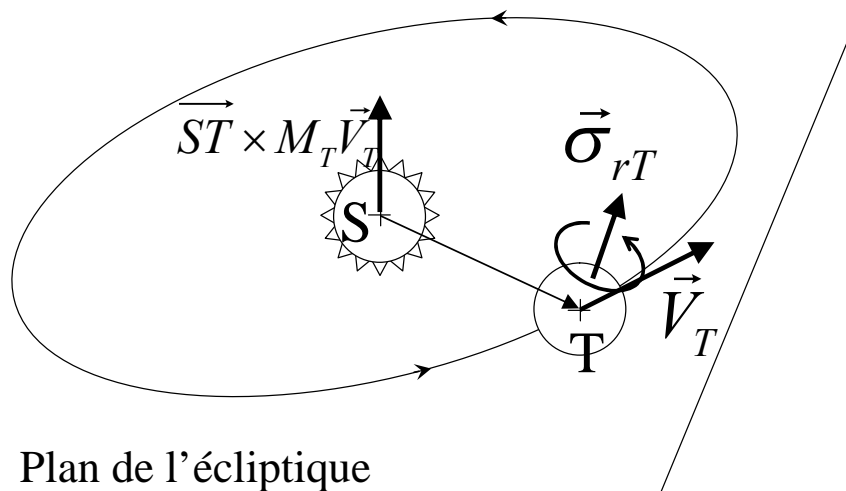


Figure 3.11. Décomposition du moment cinétique total de la Terre par rapport au Soleil.

Regardons par exemple le cas de la Terre qui tourne autour du Soleil (Figure 3.11). Le moment cinétique total  $\vec{\sigma}_S$  de la Terre par rapport au Soleil S est égal, d'après notre théorème, à la somme du moment cinétique de rotation de la Terre sur elle-même  $\vec{\sigma}_T$  et du moment cinétique de rotation du centre d'inertie T de la Terre par rapport au soleil.

$$\vec{\sigma}_S = \vec{\sigma}_T + \vec{ST} \times M_T \vec{V}_T, \quad (3.12)$$

où  $M_T$  est la masse de la Terre et  $\vec{V}_T$  sa vitesse de rotation sur son orbite autour du Soleil.

### 3.2.4 Deuxième théorème de Koenig pour un système quelconque

Regardons maintenant l'énergie cinétique totale du système. On a vu au chapitre précédent (2.31), qu'elle s'écrit :

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_G + \vec{V}_{i/G})^2, \quad (3.13)$$

où on a fait apparaître les vitesses relatives  $\vec{V}_{i/G}$  par rapport au centre d'inertie G et la vitesse absolue  $\vec{V}_G$  de ce centre d'inertie. En développant le carré, cette expression devient :

$$\begin{aligned} E_K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{V}_G^2 + \sum_i m_i \vec{V}_G \cdot \vec{V}_{i/G} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{V}_{i/G}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \right) \vec{V}_G^2 + \vec{V}_G \cdot \left( \sum_i m_i \vec{V}_{i/G} \right) + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{V}_{i/G}^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Mais l'expression qui apparaît au deuxième terme est nulle car elle s'écrit :

$$\sum_i m_i \vec{V}_{i/G} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{GM}_i = 0 \quad (3.15)$$

d'après la relation (2.26). On a donc :

$$E_K = \frac{1}{2} M \vec{V}_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{V}_{i/G}^2. \quad (3.16)$$

C'est le Deuxième Théorème de Koenig. Physiquement, ce théorème dit que l'énergie cinétique d'un système est la somme de l'énergie cinétique de son centre d'inertie et de l'énergie cinétique du mouvement relatif par rapport au centre d'inertie. C'est un résultat très puissant que nous allons illustrer immédiatement. D'abord, en nous appuyant sur ce théorème, nous savons maintenant écrire l'énergie cinétique totale de la Terre. C'est l'énergie cinétique de son mouvement de rotation sur elle-même, plus l'énergie cinétique de sa rotation autour du soleil. Regardons une autre application.

### 3.2.5 Retour sur le roulement sans glissement d'un solide indéformable.

Revenons sur notre solide qui roule sans glisser (Figure 3.10). La règle de Chasles-Euler nous dit que ce mouvement est la somme d'une translation et d'une rotation de vecteur instantané  $\vec{\omega}$ . Considérons que ce vecteur est perpendiculaire au plan de la figure. Nous avons vu plus haut que la condition de roulement sans glissement implique que le point C du solide en contact à l'instant  $t$  a une vitesse nulle à cet instant. La vitesse  $\vec{V}_G$  du centre d'inertie G est alors, d'après (3.4) :

$$\vec{V}_G = -\vec{\omega} \times \vec{GC} = \vec{\omega} \times \vec{CG}. \quad (3.17)$$

Soit  $I_{AG}$  le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $\Delta_G$  parallèle à  $\vec{\omega}$  passant par G. L'énergie cinétique de la rotation autour de cet axe s'écrit donc  $\frac{1}{2} I_{AG} \omega^2$  d'après la relation (2.2) et l'énergie cinétique totale, d'après le deuxième théorème de Koenig, s'écrit donc :

$$E_K = \frac{1}{2} MCG^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta G} \omega^2 . \quad (3.18)$$

Mais, puisque le point C du solide a, à cet instant, une vitesse nulle, on peut considérer que le mouvement est une rotation pure de vitesse  $\omega$  autour d'un axe  $\Delta$  parallèle à  $\vec{\omega}$  passant par C. L'énergie cinétique totale, avec cette approche, doit donc s'écrire :

$$E_K = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2 . \quad (3.19)$$

où  $I_{\Delta}$  désigne le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe. Cependant, d'après la règle de Steiner-Huygens, nous avons :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta G} + MCG^2 . \quad (3.20)$$

et les deux expressions de l'énergie cinétique (3.18) et (3.19) sont égales ! Les deux approches sont équivalentes.

Notons que cet axe  $\Delta$ , tout comme d'ailleurs l'axe  $\Delta_G$  envisagé précédemment, n'est pas fixe, il se déplace au cours du temps avec une vitesse qui est d'ailleurs égale à  $\vec{V}_G$ .

### 3.2.6 Bilan sur le mouvement d'un solide.

Nous savons maintenant décomposer, par exemple à travers les deux théorèmes de Koenig, le mouvement général d'un solide en deux parties : le mouvement de son centre d'inertie, et le mouvement relatif autour de ce centre d'inertie. Traiter le mouvement du centre d'inertie est simple, au moins en principe. Il s'agit en effet de mouvement d'un point matériel et nous savons traiter ce problème. Reste donc à traiter le mouvement relatif autour du centre d'inertie. Dans le cas le plus général, quand le vecteur rotation peut changer au cours du temps, cela peut être très compliqué a priori. Cependant, les choses se simplifient si on évalue le mouvement relatif du solide autour de son centre d'inertie, non pas par rapport à un repère fixe, mais par rapport à un repère qui lui est attaché. C'est ce que nous allons faire maintenant.

## 3.3 Description générale du mouvement dans un repère lié au solide indéformable

Nous allons considérer maintenant qu'il existe dans le solide un point fixe C que nous appellerons le centre de rotation. Notons qu'il existe toujours au moins un tel point, le centre d'inertie G quand on considère le mouvement relatif autour de G. On peut cependant être plus général en considérant un point C fixe quelconque.

Puisque C est fixe, la vitesse  $\vec{V}_i$  de chaque point  $M_i$  du solide s'écrit, d'après la règle de Chasles-Euler :

$$\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CM}_i . \quad (3.21)$$

### 3.3.1 Expression du moment cinétique par rapport au point fixe dans le repère lié au solide

Nous pouvons donc écrire l'expression du moment cinétique  $\vec{\sigma}_C$  par rapport au point C, en utilisant l'expression de la vitesse de chaque point (3.21) :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_C &= \sum_i \overrightarrow{CM}_i \times m_i \vec{V}_i = \sum_i \overrightarrow{CM}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \overrightarrow{CM}_i) \\ &= \sum_i m_i (CM_i^2 \vec{\omega} - \overrightarrow{CM}_i \cdot \vec{\omega} \overrightarrow{CM}_i) \end{aligned} \quad (3.22)$$

en utilisant le développement (2.43) du double produit vectoriel.



On va maintenant repérer tous les points du solide par rapport à un repère centré sur C et d'axes CX, CY et CZ qui seront fixes par rapport au solide (Figure 3.12). Dans ce repère CXYZ, les coordonnées  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  du vecteur instantané de rotation  $\vec{\omega}$ , en général, dépendent du temps  $t$ .

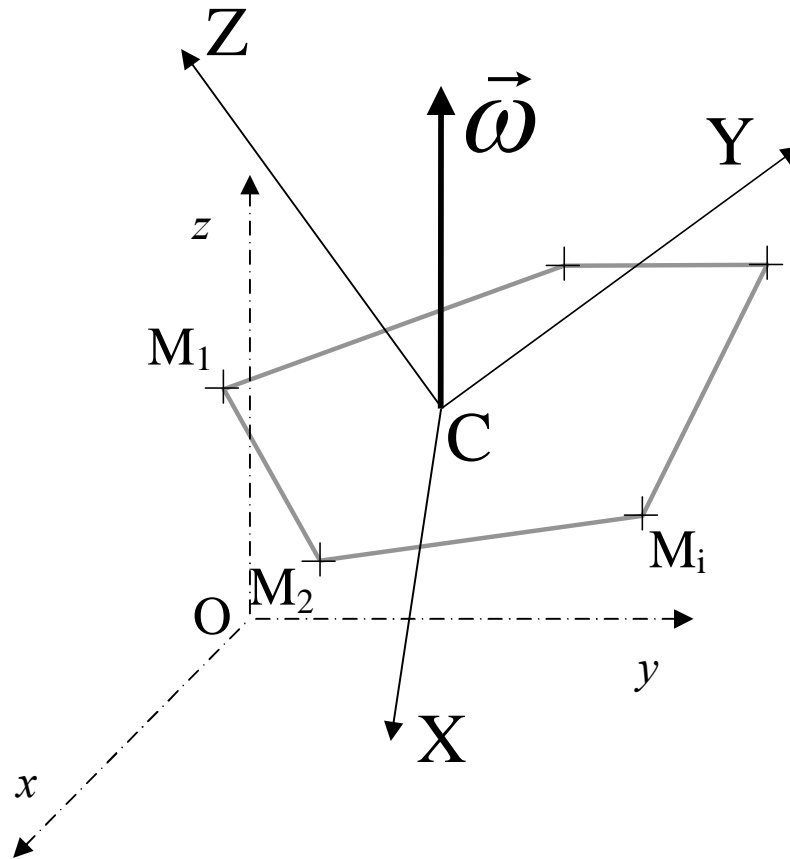


Figure 3.12. Mouvement autour d'un point fixe C et repère CXYZ lié au solide.

Soient  $X_i, Y_i, Z_i$  les coordonnées du point  $M_i$  dans le repère CXYZ, on peut alors exprimer les composantes  $\sigma_{CX}, \sigma_{CY}, \sigma_{CZ}$  de  $\vec{\sigma}_C$  en fonction des coordonnées  $X_i, Y_i, Z_i$  de  $M_i$  et de celles  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  de  $\vec{\omega}$ . Commençons par  $\sigma_{CX}$  :

$$\sigma_{CX} = \sum_i m_i \left( (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2) \omega_X - (X_i \omega_X + Y_i \omega_Y + Z_i \omega_Z) X_i \right) \quad (3.23)$$

qui peut être arrangé sous la forme :

$$\sigma_{CX} = \left( \sum_i m_i (Y_i^2 + Z_i^2) \right) \omega_X - \left( \sum_i m_i X_i Y_i \right) \omega_Y - \left( \sum_i m_i X_i Z_i \right) \omega_Z . \quad (3.24)$$

Posons par définition :

$$I_{XX} = \sum_i m_i (Y_i^2 + Z_i^2) \quad (3.25)$$

et :

$$I_{XY} = \sum_i m_i X_i Y_i . \quad (3.26)$$

On a alors, en généralisant (3.24) aux autres composantes :

$$\begin{cases} \sigma_{CX} = I_{XX}\omega_X - I_{XY}\omega_Y - I_{XZ}\omega_Z \\ \sigma_{CY} = -I_{XY}\omega_X + I_{YY}\omega_Y - I_{YZ}\omega_Z \\ \sigma_{CZ} = -I_{XZ}\omega_X - I_{YZ}\omega_Y + I_{ZZ}\omega_Z \end{cases} , \quad (3.27)$$

qu'on peut aussi mettre sous la forme :

$$\vec{\sigma}_C = \bar{I}\vec{\omega} \quad (3.28)$$

où  $\bar{I}$  est un objet appelé tenseur d'inertie dont une représentation est la matrice d'inertie suivante :

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} I_{XX} & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & I_{YY} & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_{ZZ} \end{bmatrix} . \quad (3.29)$$

En revenant à la définition (2.35) du moment d'inertie par rapport à un axe, on voit que les quantités  $I_{XX}, I_{YY}, I_{ZZ}$  sont, respectivement, les moments d'inertie par rapport aux axes CX, CY et CZ. Les quantités  $I_{XY}, I_{YZ}, I_{XZ}$  sont appelées produits d'inertie. Attention, il faut bien se souvenir du fait que les produits d'inertie entrent dans la matrice d'inertie avec un signe moins! Aucune des composantes de la matrice d'inertie ne dépend du temps, elles ne dépendent que de la répartition géométrique de la masse dans le solide et du choix des axes de référence CX, CY, CZ.

Remarque : Dans le cas d'un solide continu, comme au chapitre précédent, on remplacera les sommes par des intégrales :

$$I_{XX} = \int dm(Y^2 + Z^2) = \int \rho(Y^2 + Z^2)dXdYdZ \quad (3.30)$$

et :

$$I_{XY} = \int dmXY = \int \rho XYdXdYdZ . \quad (3.31)$$

### 3.3.2 Expression de l'énergie cinétique dans le repère lié au solide

Calculons le produit scalaire de  $\vec{\sigma}_C$  par  $\vec{\omega}$ . En utilisant l'expression (3.22) trouvée ci-dessus, on a :

$$\vec{\sigma}_C \cdot \vec{\omega} = \sum_i m_i \left( CM_i^2 \omega^2 - (\overrightarrow{CM_i} \cdot \vec{\omega})^2 \right) = \sum_i m_i \left( \overrightarrow{CM_i} \times \vec{\omega} \right)^2 \quad (3.32)$$

car pour des vecteurs quelconques  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , on a :

$$a^2 b^2 = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 . \quad (3.33)$$

On a donc d'après (3.21) :

$$\vec{\sigma}_C \cdot \vec{\omega} = \sum_i m_i V_i^2 , \quad (3.34)$$

où on reconnaît, à un facteur deux près, l'énergie cinétique totale du solide. On a ainsi démontré que l'énergie cinétique totale  $E_K$  s'écrit :

$$E_K = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_C \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} {}^t \vec{\omega} \bar{I} \vec{\omega} , \quad (3.35)$$

où  ${}^t \vec{\omega}$  indique le vecteur ligne des composantes de  $\vec{\omega}$ , qu'on appelle en mathématiques le transposé de  $\vec{\omega}$ . En développant ce produit scalaire en fonction des composantes de la matrice d'inertie, on obtient l'expression suivante pour l'énergie cinétique :

$$E_K = \frac{1}{2} (I_{XX}\omega_X^2 + I_{YY}\omega_Y^2 + I_{ZZ}\omega_Z^2 - 2I_{XY}\omega_X\omega_Y - 2I_{XZ}\omega_X\omega_Z - 2I_{YZ}\omega_Y\omega_Z) . \quad (3.36)$$

Dans cette expression, remarquons une fois encore que les moments d'inertie et les produits d'inertie sont constants. Seules les composantes  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  dépendent éventuellement du temps.

### 3.3.3 Ellipsoïde d'inertie

En passant, je vais décrire rapidement la notion d'ellipsoïde d'inertie, due au français Poinsot (1777-1859). C'est une notion encore parfois utilisée et c'est la raison pour laquelle il faut en dire ici quelques mots, mais elle ne sera plus évoquée dans la suite de ce cours.

Dans l'expression (3.36), on peut séparer l'amplitude du vecteur rotation  $\vec{\omega}$  et sa direction. Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire portant  $\vec{\omega}$  et  $u_x, u_y, u_z$  ses coordonnées dans le repère CXYZ. L'énergie cinétique peut alors s'écrire :

$$E_K = \frac{1}{2} I_{\vec{u}} \omega^2 \quad (3.37)$$

avec :

$$I_{\vec{u}} = I_{XX} u_x^2 + I_{YY} u_y^2 + I_{ZZ} u_z^2 - 2I_{XY} u_x u_y - 2I_{XZ} u_x u_z - 2I_{YZ} u_y u_z . \quad (3.38)$$

Pour chaque direction de rotation  $\vec{u}$ , définissons un point N porté le long de  $\vec{u}$  tel que :

$$\vec{CN} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{I_{\vec{u}}}} \quad (3.39)$$

et soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les coordonnées de ce vecteur. On a alors en remplaçant dans l'équation (3.36) :

$$I_{XX} \alpha^2 + I_{YY} \beta^2 + I_{ZZ} \gamma^2 - 2I_{XY} \alpha\beta - 2I_{XZ} \alpha\gamma - 2I_{YZ} \beta\gamma = 1 . \quad (3.40)$$

Quand le vecteur  $\vec{u}$  balaie l'espace, le point N trace une surface déterminée par cette équation. Il s'agit d'un ellipsoïde qu'on appelle l'ellipsoïde d'inertie. Cet ellipsoïde possède des axes de symétrie et si les axes CX, CY et CZ coïncident avec ces axes de symétrie, alors la matrice d'inertie est diagonale.

### 3.3.4 Tenseur principal d'inertie

Dans la suite, nous nous contenterons d'accepter le fait, sans nécessairement nous appuyer sur l'ellipsoïde d'inertie, qu'il existe toujours trois axes perpendiculaires où la matrice d'inertie est diagonale, c'est-à-dire qu'elle s'y présente sous la forme :

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} . \quad (3.41)$$

Dans ce repère particulier, qu'on appelle repère principal d'inertie, on constate que tous les produits d'inertie sont nuls et les quantités  $A, B$  et  $C$  s'appellent les moments d'inertie principaux. En pratique, nous verrons que des considérations élémentaires de symétrie nous permettent souvent de trouver directement les axes qu'il faut choisir. Quand le centre de rotation C est le centre d'inertie du système, on parle de repère d'inertie principal central, et les moments d'inertie correspondants sont les moments d'inertie principaux centraux.

Avant de revenir à la cinématique du mouvement, nous allons examiner quelques exemples de calcul de moments d'inertie, exemples qui nous permettront d'exposer quelques astuces et notions complémentaires très utiles en pratique.

**3.4 Exemples de calcul de moment d'inertie et de tenseurs d'inertie**

Jusqu'à présent, nous avons rencontré les notions de moment d'inertie par rapport à un axe et de produit d'inertie. Ces quantités sont apparues dans les expressions du moment cinétique par rapport au centre C et de l'énergie cinétique. Nous allons maintenant introduire deux notions annexes qui nous permettront de gagner du temps : le moment d'inertie par rapport à un plan et le moment d'inertie polaire.

*3.4.1 Moment d'inertie par rapport à un plan*

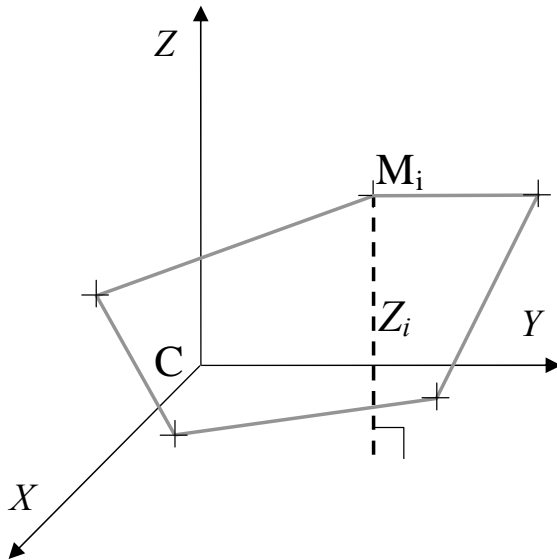


Figure 3.13. Moment d'inertie d'un système indéformable par rapport au plan CXY.

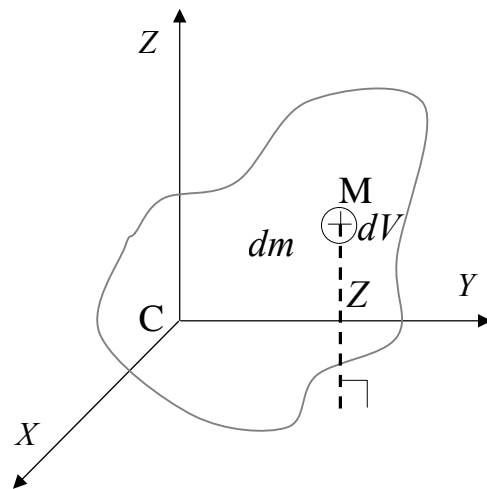


Figure 3.14. Moment d'inertie d'un solide continu indéformable par rapport au plan CXY.

Considérons de nouveau notre solide rapporté à ses axes CX, CY, CZ (Figure 3.13). Par définition, le moment d'inertie par rapport au plan CXY est la quantité :

$$I_{\text{CXY}} = \sum_i m_i Z_i^2 . \tag{3.42}$$

Pour un solide continu (Figure 3.14), comme au chapitre 2, on remplace les sommes par des intégrales :

$$I_{\text{CXY}} = \int dm Z^2 = \int \rho dV Z^2 , \tag{3.43}$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique.

On constate que le moment d'inertie par rapport à l'axe CX peut s'écrire comme :

$$I_{\text{CX}} = I_{\text{CXY}} + I_{\text{CXCZ}} , \tag{3.44}$$

ce qu'on peut exprimer en disant que le moment d'inertie par rapport à un axe est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires qui se coupent par cet axe. Cette propriété est très utile car, comme on va le voir, les moments d'inertie par rapport à des plans sont souvent plus faciles à calculer que les moments d'inertie par rapport à des axes. Regardons par exemple le cas du moment d'inertie d'un cylindre droit quelconque par rapport à son plan médian.

3.4.2 Moment d'inertie par rapport à son plan médian d'un cylindre droit quelconque.

Considérons en effet le cylindre homogène droit quelconque représenté sur la Figure 3.15, de section  $S$  et de longueur  $L$ . Soit  $M$  la masse de ce cylindre, qui est égale à  $\rho SL$  où  $\rho$  est la masse volumique (uniforme dans un solide homogène). Soit  $CZ$  l'axe du cylindre et  $CXY$  le plan médian perpendiculaire à cet axe. Le moment d'inertie par rapport à ce plan s'écrit :

$$I_{\text{IXY}} = \int dmZ^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho SZ^2 dZ = \rho S \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} Z^2 dZ = \rho S 2 \frac{1}{3} \left( \frac{L}{2} \right)^3 = \frac{M}{L} \frac{L^3}{12} . \quad (3.45)$$

soit :

$$I_{\text{IXY}} = \frac{ML^2}{12} . \quad (3.46)$$

C'est un résultat très général qu'il peut être utile de garder en mémoire.

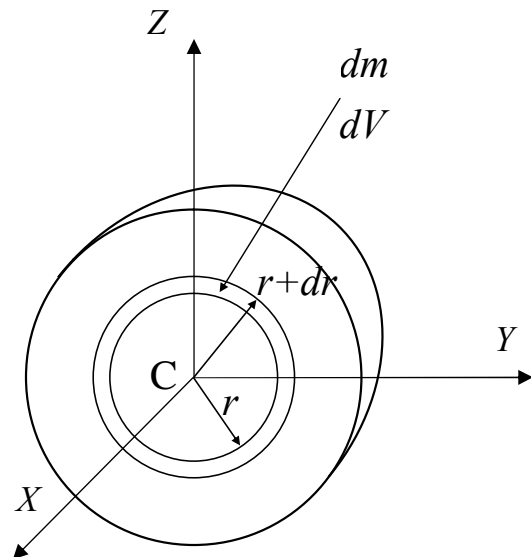
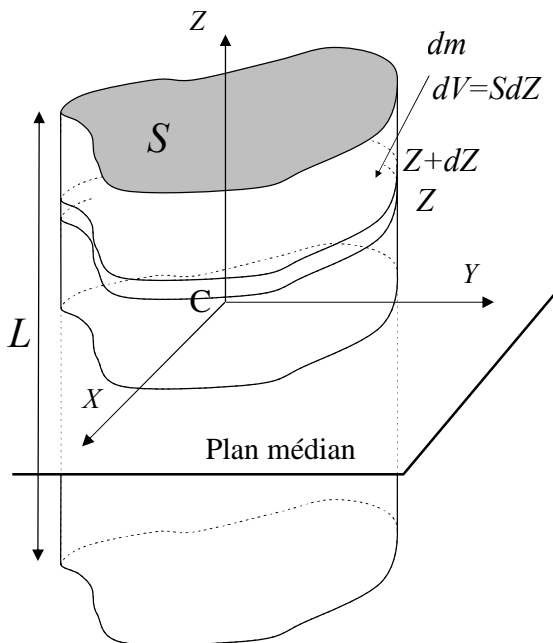


Figure 3.15. Moment d'inertie par rapport à son plan médian d'un cylindre homogène droit de section quelconque.

Figure 3.16. Moment d'inertie polaire d'une sphère homogène.

3.4.3 Moment d'inertie par rapport au centre de rotation ou moment d'inertie polaire.

Par analogie avec le moment d'inertie par rapport à un plan, on définit le moment d'inertie par rapport au centre de rotation  $C$ , ou moment d'inertie polaire :

$$I_C = \sum_i m_i (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2) . \quad (3.47)$$

On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 I_C &= I_{\Pi YZ} + I_{XX} = I_{\Pi XZ} + I_{YY} = I_{\Pi XY} + I_{ZZ} \\
 &= I_{\Pi YZ} + I_{\Pi XZ} + I_{\Pi XY} \\
 &= \frac{1}{2}(I_{XX} + I_{YY} + I_{ZZ})
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

Parfois, il est très simple de passer par ce moment d'inertie polaire. Regardons par exemple (Figure 3.16) le cas d'une sphère homogène de masse  $M$  et de rayon  $R$ . La masse volumique  $\rho$  est donnée par  $\rho=3M/4\pi R^3$ . Nous avons calculé en exercice lors du chapitre précédent le moment d'inertie  $I_\Delta$  par rapport à un axe passant par son centre mais on aura remarqué qu'aussi bien en coordonnées cylindriques que sphériques, c'est assez lourd. Utilisons le moment d'inertie polaire :

$$I_C = \int dm r^2 = \int_0^R \rho(4\pi r^2 dr) r^2 = \frac{3M}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5}MR^2 .
 \tag{3.49}$$

mais, d'après (3.48), on a :

$$I_C = \frac{1}{2}(I_{XX} + I_{YY} + I_{ZZ}) = \frac{1}{2}(I_\Delta + I_\Delta + I_\Delta) = \frac{3}{2}I_\Delta
 \tag{3.50}$$

et on trouve donc, en identifiant (3.45) et (3.46) :

$$I_\Delta = \frac{2}{5}MR^2 .
 \tag{3.51}$$

Pensons donc à utiliser le moment d'inertie polaire chaque fois que nous avons un objet à symétrie sphérique comme une boule creuse, une coquille sphérique, une boule avec cœur dur, une planète, etc...

### 3.4.4 Plan de symétrie et produit d'inertie

Prenons maintenant le cas d'un objet possédant un plan de symétrie, comme illustré en Figure 3.17. Prenons le centre de rotation  $C$  dans ce plan. Nous avons aussi la liberté de choisir les axes  $CX$ ,  $CY$  et  $CZ$  tels que le plan de symétrie est le plan  $CXY$ .

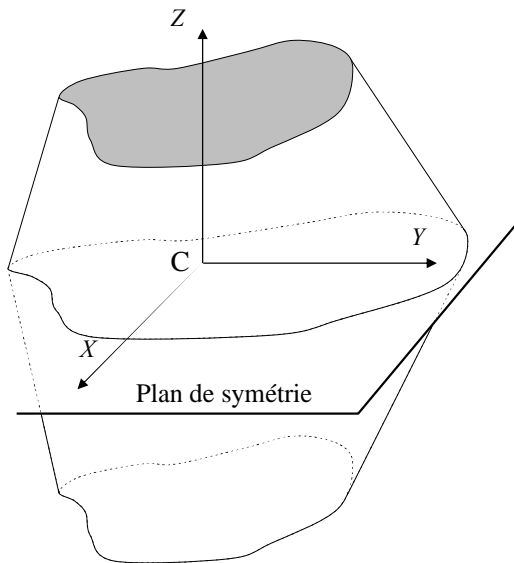


Figure 3.17. Solide avec un plan de symétrie.

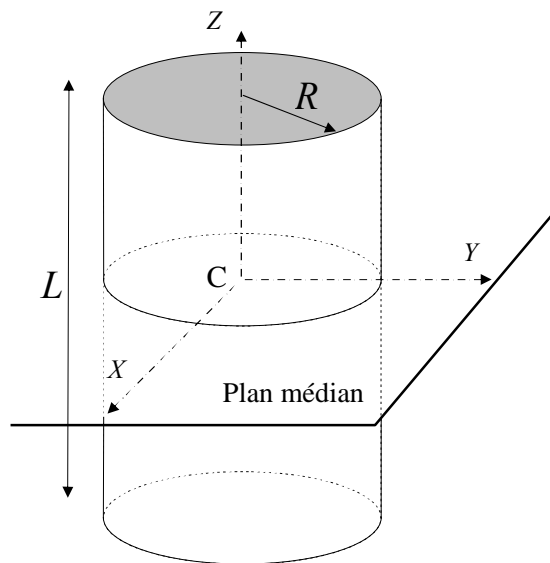


Figure 3.18. Cylindre de révolution.

Cherchons le produit d'inertie  $I_{XZ}$ . On a :

$$I_{XZ} = \sum_i m_i X_i Z_i = \sum_{Z_i \geq 0} m_i X_i Z_i + \sum_{Z_i \leq 0} m_i X_i Z_i . \quad (3.52)$$

Mais, comme l'objet est symétrique en changeant  $Z$  en  $-Z$ , pour chaque terme  $m_i X_i$  pour un  $Z_i$  donné, il existe le terme identique  $m_i X_i$  avec  $-Z_i$ . On a donc :

$$I_{XZ} = 0 . \quad (3.53)$$

Pour les mêmes raisons, on a :

$$I_{YZ} = 0 . \quad (3.54)$$

Dès qu'on a un plan de symétrie, les deux produits d'inertie correspondants sont nuls. Si on trouve deux plans de symétrie perpendiculaires, alors on voit immédiatement que les trois produits d'inertie sont nuls et le repère est un repère d'inertie principal. Cet argument est une arme de choc à utiliser sans modération!

Nous pouvons maintenant faire usage de ces astuces pour calculer le tenseur d'inertie principal central d'un cylindre de révolution.

**Encadré 3.1 : Tenseur, produits et moments d'inertie : quelques relations à retenir.**

Expression du moment cinétique par rapport à un point fixe C :

$\vec{\sigma}_C = \bar{I} \vec{\omega}$  où  $\bar{I}$  est le tenseur d'inertie représenté par la matrice :

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} I_{XX} & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & I_{YY} & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_{ZZ} \end{bmatrix}$$

Dans le repère principal CXYZ, on

a: 
$$\bar{I} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

Produit d'inertie :

$$I_{XY} = \sum m_i X_i Y_i$$

Moments d'inertie :

Par rapport à un axe :  $I_{XX} = \sum m_i (Y_i^2 + Z_i^2)$

Par rapport au plan CXY :  $I_{\Pi XY} = \sum m_i Z_i^2$

Propriété :  $I_{XX} = I_{\Pi XY} + I_{\Pi XZ}$

Par rapport au point C :  $I_C = \sum m_i (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2)$

Propriété :

$$I_C = I_{\Pi YZ} + I_{XX} = I_{\Pi XY} + I_{\Pi XZ} + I_{\Pi YZ} = \frac{1}{2}(I_{XX} + I_{YY} + I_{ZZ})$$

Propriétés utiles :

- Si CXY est le plan médian d'un cylindre droit de longueur  $L$ , alors :  $I_{\Pi XY} = \frac{ML^2}{12}$
- Si CXY est un plan de symétrie, alors :  $I_{XZ} = I_{YZ} = 0$

*3.4.5 Tenseur principal central d'inertie d'un cylindre de révolution.*

Considérons (Figure 3.18) un cylindre de révolution de masse  $M$ , de longueur  $L$  et de rayon  $R$ . Choisissons l'axe CZ selon l'axe de symétrie de révolution et CY, CZ deux axes perpendiculaires. On voit que les plans CXY, CXZ et CYZ sont des axes de symétrie. D'après l'argument précédent, tous les produits d'inertie dans ce repère sont nuls et il s'agit donc d'un repère d'inertie principal et central. La matrice d'inertie est diagonale. Nous connaissons déjà (voir chapitre précédent) le moment d'inertie par rapport à l'axe CZ. Il vaut :

$$C = I_{ZZ} = \frac{1}{2}MR^2 . \quad (3.55)$$

Mais on a par ailleurs, selon la relation (3.44),

$$C = I_{\Pi XZ} + I_{\Pi YZ} = 2I_{\Pi XZ} \quad (3.56)$$

car  $I_{\Pi XZ}$  et  $I_{\Pi YZ}$  sont égaux par symétrie, les axes CX et CY étant parfaitement équivalents. On a donc :

$$I_{\Pi XZ} = I_{\Pi YZ} = \frac{1}{4}MR^2 . \quad (3.57)$$

On connaît aussi déjà l'expression du moment d'inertie par rapport au plan CXY, puisque c'est un plan médian dans un cylindre. Comme on l'a vu au paragraphe 3.4.2, on a ;

$$I_{\Pi XY} = \frac{ML^2}{12} . \quad (3.58)$$

Il est alors aisé de trouver le moment d'inertie par rapport à l'axe CX, qui est égal par symétrie au moment d'inertie par rapport à l'axe CY :

$$A = B = I_{\Pi XY} + I_{\Pi XZ} = \frac{ML^2}{12} + \frac{MR^2}{4} = \frac{M}{4} \left( R^2 + \frac{1}{3}L^2 \right) . \quad (3.59)$$

On peut, par des arguments et astuces analogues, trouver, sans calcul supplémentaire, le tenseur d'inertie de nombreux objets simples. Les exercices fourniront quelques exemples. Pour mémoire, les définitions et relations utiles concernant les moments d'inertie ont été rassemblés dans l'encadré 3.1.

Récapitulons. Nous avons vu comment écrire les quantités cinématiques du solide en fonction du vecteur instantané de rotation  $\vec{\omega}$  et en fonction des moments et produits d'inertie. Nous avons désormais appris à calculer ces quantités. Il nous reste maintenant à exprimer le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  en fonction des degrés de liberté physiques du système, comme nous les avons identifiés au début du chapitre. Regardons par exemple le cas particulier du gyroscope en mouvement autour d'un point fixe.

### 3.5 Description du mouvement du gyroscope autour d'un point fixe

#### 3.5.1 Description du gyroscope

Soit un point de référence fixe C de l'espace et considérons un gyroscope, qu'on appelle aussi parfois toupie, et attachons-lui un repère CXYZ (Figure 3.19). On choisira un repère principal si bien que l'expression de la matrice d'inertie est diagonale, comme dans l'équation (3.39).

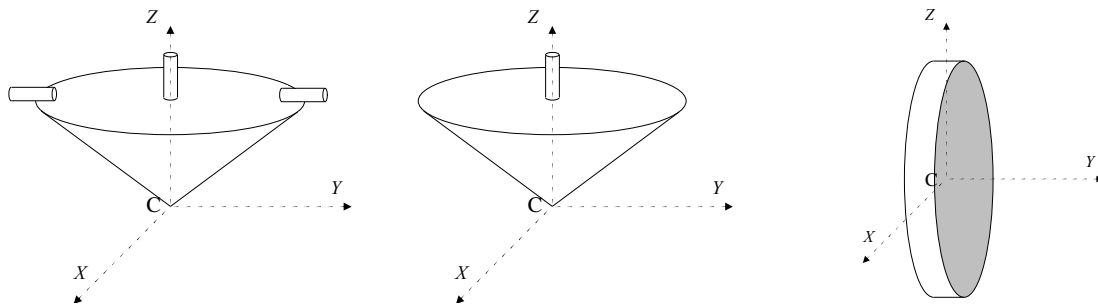


Figure 3.19. De gauche à droite : gyroscope ou toupie asymétrique, gyroscope ou toupie symétrique, et roue pivotante.

Dans le cas le plus général, les trois nombres  $A, B, C$  sont différents. On parle alors de gyroscope asymétrique (Figure 3.19). En pratique, il arrive souvent qu'on considère le cas où deux moments d'inertie sont égaux. Quand  $A=B \neq C$ , on parle d'un gyroscope ou toupie symétrique. Dans le cas  $A=C \neq B$ , on préfère parler de roue pivotante. Les planètes souvent se présentent comme des sphères légèrement aplaties le long de leur axe de rotation propre. C'est par exemple le cas de la Terre ou de Mars. La Lune, par contre, fournit l'exemple d'un objet



dont les trois moments d'inertie centraux sont différents. Nous reviendrons sur ces cas dans la suite du cours et dans les exercices.

Revenons à notre gyroscope et posons le maintenant sur le support fixe. Il faut définir sa position dans l'espace par rapport à un repère fixe  $Cxyz$ . Comme nous l'avons vu au début de ce chapitre (Figure 3.8), on le fait grâce aux angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  que nous allons définir précisément (Figure 3.20). L'angle de nutations  $\theta$  est l'angle entre l'axe  $CZ$  et la verticale  $Cz$  dans le repère fixe. On voit que le plan  $CXY$  coupe le plan  $Cxy$  en une droite qu'on appelle la ligne nodale (ou ligne des nodes). L'angle de précession  $\varphi$  est l'angle entre l'axe  $Cx$  et cette ligne nodale. L'angle de rotation propre  $\psi$  est l'angle entre la ligne nodale et l'axe  $CX$ . Pour se familiariser avec les angles d'Euler, on peut aussi utiliser le modèle de la Figure 3.21.

### 3.5.2 Description du mouvement du gyroscope autour d'un point fixe

A chacun de ces angles de rotation correspond un vecteur instantané de rotation. Pour le mouvement de rotation propre, ce vecteur est aligné avec l'axe  $CZ$  et son amplitude est  $\dot{\psi}$ . Le vecteur instantané de précession est aligné avec l'axe  $Cz$  et son amplitude est  $\dot{\varphi}$ . Le vecteur instantané de nutation est aligné avec la ligne des nodes, dont le vecteur directeur est  $\vec{u}_\varphi$ , et son amplitude est  $\dot{\theta}$ . Le vecteur instantané de rotation est alors :

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{u}_Z + \dot{\varphi} \vec{u}_z + \dot{\theta} \vec{u}_\varphi . \quad (3.60)$$

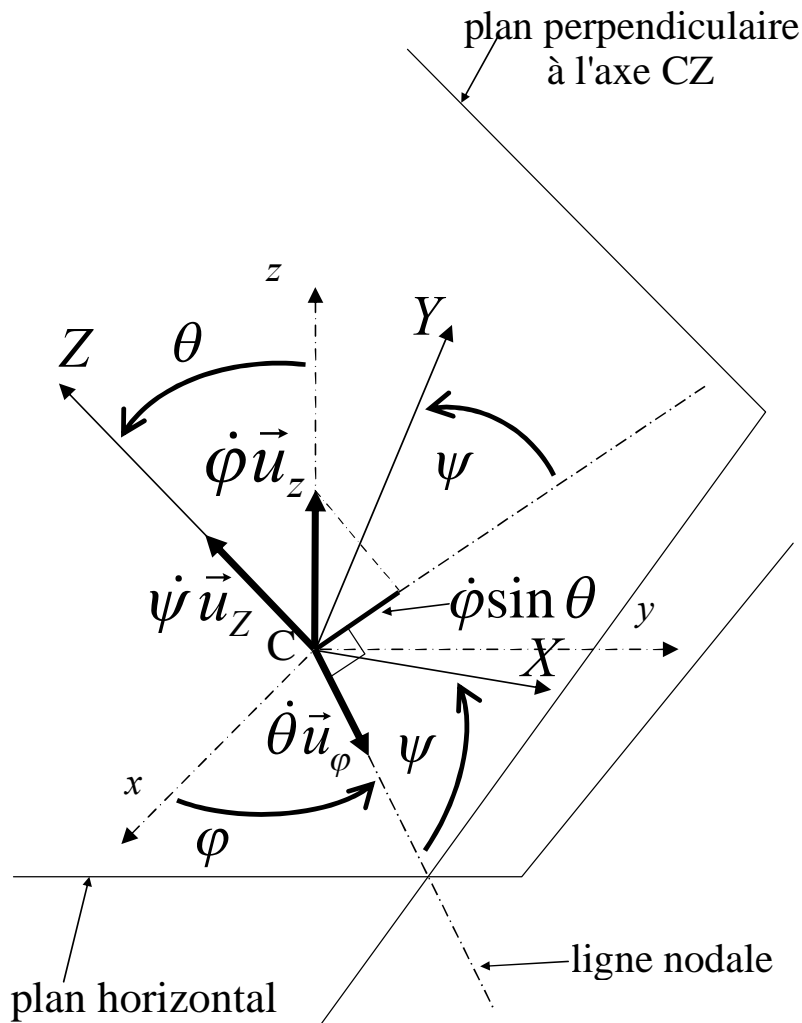


Figure 3.20. Angles d'Euler et décomposition du vecteur instantané de rotation.

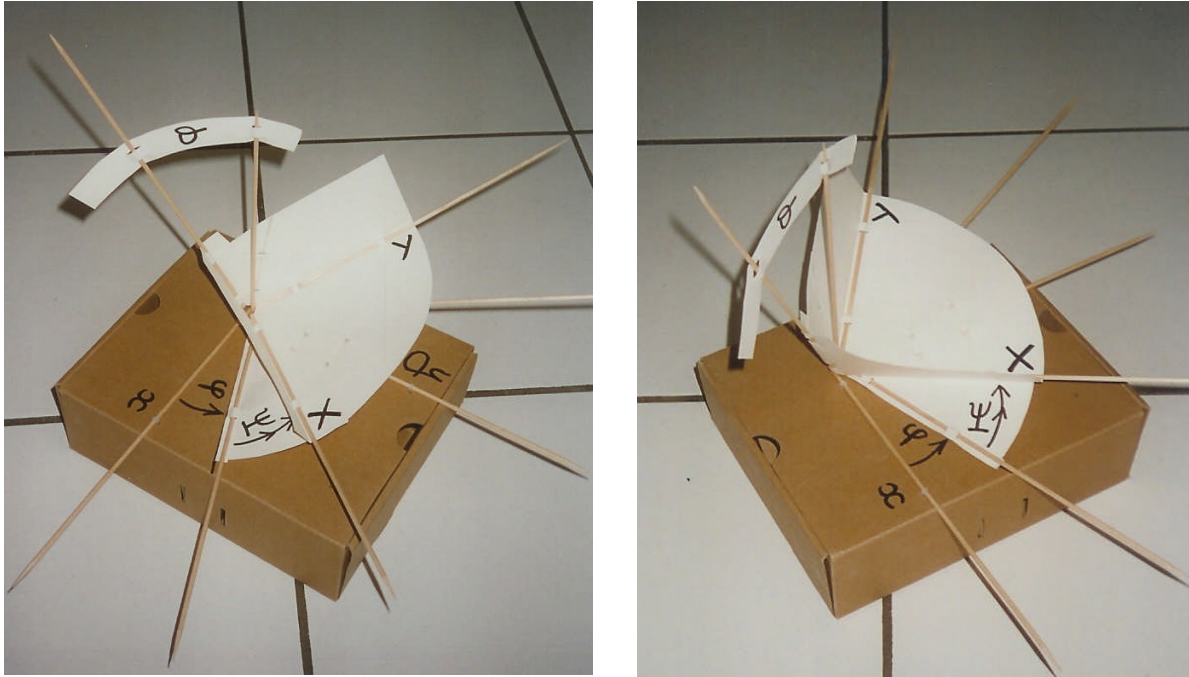


Figure 3.21. Modèle pour la représentation des angles d'Euler.

On souhaite exprimer les composantes dans le repère lié au solide CXYZ parce que c'est dans ce repère que l'expression du tenseur d'inertie est simple et qu'il ne dépend pas du temps. Les composantes de  $\vec{u}_z$  sont les plus simples :

$$\vec{u}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Les composantes du vecteur  $\vec{u}_\varphi$  sont assez faciles à obtenir, en regardant la Figure 3.20, puisque ce vecteur se trouve par définition dans le plan CXY. Il vient :

$$\vec{u}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Enfin, pour  $\vec{u}_\theta$ , c'est un peu plus compliqué. La projection de ce vecteur sur l'axe CZ est  $\cos\theta$  et un segment de longueur  $\sin\theta$  dans le plan CXY, aligné le long de la direction perpendiculaire à la ligne des nodes. Il faut ensuite projeter ce segment de longueur  $\sin\theta$  sur les deux axes CX et CY, ce qui fait tomber un facteur  $\sin\psi$  sur OX et  $\cos\psi$  sur CY. Les composantes de  $\vec{u}_\theta$  sont donc :

$$\vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\psi \\ \sin\theta \cos\psi \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Les composantes du vecteur rotation sont alors, en utilisant (3.55) à (3.58) :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_y = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

3.5.3 Expression du moment cinétique du gyroscope autour de son point fixe.

Le moment cinétique du gyroscope autour du point C est donné par :

$$\vec{\sigma}_C = \bar{I} \vec{\omega} = \begin{pmatrix} A(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \\ B(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \\ C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

3.5.4 Expression de l'énergie cinétique du gyroscope en mouvement autour d'un point fixe.

L'énergie cinétique s'écrit, en appliquant la relation (3.34) :

$$E_K = \frac{1}{2} (A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) \quad (3.66)$$

soit, en injectant les expressions (3.58) :

$$E_K = \frac{1}{2} \left( A(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + B(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \right). \quad (3.67)$$

Dans le cas du gyroscope symétrique ( $A=B$ ), en développant les carrés, les termes se regroupent et on obtient :

$$E_K = \frac{1}{2} A(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)^2 + \frac{1}{2} C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2. \quad (3.68)$$

Cette expression, qui finalement a plutôt une bonne tête, nous sera utile plus loin.

Nous savons maintenant décrire le mouvement de notre gyroscope, ou de tout autre solide dans l'espace. Pour prédire l'évolution du mouvement, il nous faut maintenant faire appel à la dynamique, aux forces, et aux lois de Newton. C'est ce que nous allons faire dans le prochain chapitre.

Ce qu'il faut retenir de ce chapitre :

- La notion de degré de liberté
- Les angles d'Euler pour le mouvement du gyroscope
- La règle de Chasles-Euler du champ de vitesse d'un solide
- Le premier théorème de Koenig (moment cinétique)
- Le deuxième théorème de Koenig (énergie cinétique)
- La définition du tenseur d'inertie et des produits d'inertie
- La notion de moment d'inertie par rapport à un plan
- La notion de moment d'inertie polaire
- Les règles et résultats de l'encadré 3.1
- Savoir retrouver l'expression des composantes du vecteur rotation instantanée du gyroscope en fonction des trois angles d'Euler